Vorlesung Analysis I — WS 07/08
Kapitel 3

Erich Ossa

Vorläufige Version

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Elementare Logik	1
1.1.A Aussagenlogik	1
1.1.B Prädikatenlogik	3
1.2 Elementare Mengenlehre	5
1.2.A Mengen	5
1.2.B Abbildungen	8
1.2.C Relationen	12
1.3 Die natürlichen Zahlen	13
1.3.A Induktion	13
1.3.B Zahlen zum Zählen	17
1.3.C Abzählbare Mengen	20
1.4 Die reellen Zahlen	22
1.4.A Algebraische Eigenschaften	22
1.4.B Ordnungs-Eigenschaften	23
1.4.C Vollständigkeit	25
1.4.D Darstellung reeller Zahlen	27
1.4.E Die Mächtigkeit von $\mathbf{R}$	29
1.5 Komplexe Zahlen	30
1.5.A Rechnen mit komplexen Zahlen	30
1.5.B Fundamentalsatz der Algebra	32
1.6 Arithmetisches und geometrisches Mittel	34
1.7 * Rekursive Definition	36

2	Folgen und Reihen	38
2.1	Folgen komplexer Zahlen	38
2.1.A	Konvergenz	38
2.1.B	Monotone Folgen reeller Zahlen	40
2.1.C	Häufungswerte	41
2.2	Unendliche Reihen	43
2.2.A	Grundbegriffe	43
2.2.B	Konvergenzkriterien	44
2.2.C	Absolut konvergente Reihen	45
2.3	Potenzreihen	47
3	Stetige Funktionen	49
3.1	Häufungspunkte und Grenzwerte	49
3.1.A	Häufungspunkte	49
3.1.B	Grenzwerte	50
3.2	Stetigkeit	51
3.2.A	Grundlagen	51
3.2.B	Globale Eigenschaften stetiger Funktionen	52
3.3	Elementare Funktionen	54
3.3.A	Polynome und rationale Funktionen	54
3.3.B	Exponentialfunktion und Logarithmus	55
3.3.C	Trigonometrische Funktionen	55
3.3.D	Hyperbelfunktionen	57

Dieses Skript ist noch nicht in seiner endgültigen Gestalt.
Für Fehlermeldungen, Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge wäre ich dankbar.

E. Ossa

3 Stetige Funktionen

In diesem Kapitel könnte D auch eine Teilmenge von $\mathbf{C}$ und f eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbf{C}$ sein. Wir interessieren uns aber insbesondere für den Fall $D \subset \mathbf{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ und formulieren Definitionen und Sätze deshalb nur für diesen Fall.

3.1 Häufungspunkte und Grenzwerte

3.1.A Häufungspunkte

Definition 3.1.1: Sei $a \in \mathbf{R}$.

1. Sei $\delta \in \mathbf{R}_+$. Die δ -Umgebung von a ist die Menge $U_\delta(a) := \{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < \delta\}$. Die punktierte δ -Umgebung von a ist $U_\delta^\bullet(a) := U_\delta(a) - \{a\}$.
2. Eine Teilmenge $V \subset \mathbf{R}$ heißt Umgebung von a , wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß die δ -Umgebung $U_\delta(a)$ von a ganz in V enthalten ist. Dann heißt a auch innerer Punkt von V .
3. Eine Teilmenge $V \subset \mathbf{R}$ heißt offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.

Definition 3.1.2: Sei $M \subset \mathbf{R}$ eine Teilmenge und $a \in \mathbf{R}$.

1. a heißt Häufungspunkt von M , wenn jede Umgebung von a unendliche viele Punkte von M enthält.
2. Ist $a \in M$, so heißt a isolierter Punkt von M , wenn a kein Häufungspunkt von M ist.
3. M heißt abgeschlossen (in $\mathbf{R}$), wenn M alle seine Häufungspunkte enthält.

Beispiele.

Hilfssatz 3.1.3: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. a ist Häufungspunkt von M ,
2. $U_\delta^\bullet(a) \cap M \neq \emptyset$ für jedes $\delta > 0$,
3. es gibt eine Folge (x_n) mit $x_n \in M - \{a\}$ und $\lim x_n = a$.

Hilfssatz 3.1.4: Sei $M \subset \mathbf{R}$ eine Teilmenge und $a \in \mathbf{R}$. Dann ist a genau dann kein Häufungspunkt von M , wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit $U_\delta(a) \cap M \subset \{a\}$.

Der Durchschnitt ist also entweder $= \emptyset$ oder $= \{a\}$.

Hilfssatz 3.1.5:

1. M ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathbf{R} - M$ offen ist.
2. Das offene Intervall $]c, d[$ ist offen.
3. Das abgeschlossene Intervall $[c, d]$ ist abgeschlossen.

3.1.B Grenzwerte

Definition 3.1.6: Sei $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion und sei $a \in \mathbf{R}$ ein Häufungspunkt von D . Sei $w \in \mathbf{R}$. Wir sagen, f habe in a den Grenzwert w , und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = w ,$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in D - \{a\}$ gilt:

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - w| < \varepsilon .$$

Offenbar ist der Grenzwert w eindeutig bestimmt. Die obige ε - δ -Bedingung können wir auch kurz schreiben als

$$x \in U_\delta^\bullet(a) \implies f(x) \in U_\varepsilon(w) .$$

Ist $E \subset D$ und $g := f|_E$ so schreibt man auch $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E}} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Mit $D^+ := \{x \in D \mid x > a\}$ und $D^- := \{x \in D \mid x < a\}$ setzt man $\lim_{x \searrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D^+}} f(x)$ und $\lim_{x \nearrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D^-}} f(x)$. Diese heißen rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert von f im Punkt a .

Hilfssatz 3.1.7: Sei a Häufungspunkt von D . Dann ist genau dann $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = w$, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D - \{a\}$ und $\lim x_n = a$ gilt: $\lim f(x_n) = w$.

Hilfssatz 3.1.8: Sei a Häufungspunkt von D und $w = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

1. Ist $\delta > 0$ und $f(x) \geq u$ für $x \in U_\delta^\bullet(a)$, so ist $w \geq u$.
2. Ist $w > u$, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß $f(x) > u$ ist für $x \in U_\delta^\bullet(a)$.

Definition 3.1.9: Seien $f, g : D \rightarrow \mathbf{R}$.

1. Die Funktion $f + g : D \rightarrow \mathbf{R}$ ist definiert durch $x \mapsto f(x) + g(x)$.
2. Die Funktion $f \cdot g : D \rightarrow \mathbf{R}$ ist definiert durch $x \mapsto f(x)g(x)$.

3. Sei $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$. Die Funktion $\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbf{R}$ ist definiert durch $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

Hilfssatz 3.1.10: Sei a Häufungspunkt von D und seien $f, g : D \rightarrow \mathbf{R}$ Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = v$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = w$.

1. Für $s := f + g$ und $p := f \cdot g$ gilt $\lim_{x \rightarrow a} s(x) = v + w$ und $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = v \cdot w$.
2. Ist $w \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß $q := \frac{f}{g}$ auf $D \cap U_\delta^\bullet(a)$ definiert ist, und es gilt $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = \frac{v}{w}$.

Korollar 3.1.11: Seien $f \in \mathbf{R}[t]$ und $g \in \mathbf{R}[t]$ Polynome.

1. Es ist $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
2. Sei $g(a) \neq 0$ und $q := \frac{f}{g}$. Dann ist $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = \frac{f(a)}{g(a)}$.

Hilfssatz 3.1.12: Sei $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $|a - x_0| < R$. Dann ist $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Beispiele.

3.2 Stetigkeit

3.2.A Grundlagen

Definition 3.2.1: Sei $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion und sei $a \in D$. Dann heißt f stetig im Punkt a , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Hilfssatz 3.2.2: Sei $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion und sei $a \in D$.

1. Ist a Häufungspunkt von D , so ist f genau dann stetig in a , wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ist.
2. Ist a isolierter Punkt von D , so ist f stetig in a .

Satz 3.2.3: Sei $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung und $a \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist stetig im Punkt a .
2. Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$ und $\lim x_n = a$ gilt: $\lim f(x_n) = f(a)$.

Satz 3.2.4: Seien $f, g : D \rightarrow \mathbf{R}$. Sei $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$. Sind f, g stetig in $a \in D$, so auch $f + g, f \cdot g$ und, falls $a \in D'$ ist, $\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbf{R}$.

Satz 3.2.5: Seien $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ und $g : E \rightarrow \mathbf{R}$ Abbildungen. Sei $F := \{x \in D \mid f(x) \in E\}$, und sei $a \in D$ mit $f(a) = b \in E$. Ist f stetig in a und g stetig in b , so ist $g \circ f : F \rightarrow \mathbf{R}$ stetig in a .

Korollar 3.2.6: Ist $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, so ist auch $|f| : D \rightarrow \mathbf{R}$ stetig im Punkt a .

Definition 3.2.7: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ heißt stetig auf D , wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Offenbar gelten dann die Analoga von Satz 3.2.4, Satz 3.2.5 und Korollar 3.2.6 auch für globale Stetigkeit.

Satz 3.2.8: Seien $f(t), g(t) \in \mathbf{R}[t]$ Polynome.

1. $x \mapsto f(x)$ definiert eine stetige Funktion $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.
2. Sei $g \neq 0, N := \{x \in \mathbf{R} \mid g(x) = 0\}$ und

$$N' := \{x \in N \mid g \text{ verschwindet in } x \text{ von höherer Ordnung als } f\}.$$

Dann definiert $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ eine stetige Funktion $f : \mathbf{R} - N' \rightarrow \mathbf{R}$.

Satz 3.2.9: Sei $f = \sum a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann definiert f eine stetige Funktion $f :]x_0 - R, x_0 + R[\rightarrow \mathbf{R}$.

3.2.B Globale Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir erinnern an die folgende nützliche Eigenschaft stetiger Funktionen:

Ist $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ stetig in $\xi \in D$ und $\eta \in \mathbf{R}$ mit $f(\xi) > \eta$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$x \in D \text{ und } |x - \xi| < \delta \Rightarrow f(x) > \eta.$$

Satz 3.2.10 (Zwischenwertsatz): Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ stetig und $\eta \in \mathbf{R}$ mit $f(a) < \eta < f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = \eta$.

Beweis: Sei $M := \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq \eta\}$ und seien $x_n \in M$ mit $\lim x_n = \xi := \inf(M)$. Wegen der Stetigkeit ist $f(\xi) \geq \eta$, also $\xi > a$, und wegen der obigen Vorbemerkung kann nicht $f(\xi) > \eta$ sein. $\square$

Der Spezialfall $\eta = 0$ wird manchmal Nullstellensatz oder auch Satz von Bolzano genannt.

Korollar 3.2.11: Sei $f(t) \in \mathbf{R}[t]$ ein Polynom von ungeradem Grad. Dann hat f eine Nullstelle in $\mathbf{R}$.

Satz 3.2.12 (Satz vom Maximum): Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis: Sei $M := \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ und $\eta := \sup(M) \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Seien $y_n \in M$ mit $\lim y_n = \eta$. Dann gibt es $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) = y_n$. Sei (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge und $\lim x_{n_k} = \xi$. Dann folgt $f(\xi) = \eta$; insbesondere ist also $\eta < \infty$ und $f(\xi) = \sup(M)$. $\square$

Korollar 3.2.13: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ stetig. Dann ist $\text{Bild}(f)$ ein (endliches) abgeschlossenes Intervall.

Satz 3.2.14 (Umkehrsatz): Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann ist

$$f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)] \text{ bijektiv}$$

und die Umkehrabbildung

$$g = f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$$

ist stetig.

Beweis: Da f streng monoton ist, ist f injektiv und $\text{Bild}(f) \subset [f(a), f(b)]$. Aber nach dem Zwischenwertsatz ist dann $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ auch surjektiv.

Sei $g := f^{-1}$ und seien $y_n \in [f(a), f(b)]$ mit $\lim y_n = \eta$. Sei $y_n = f(x_n)$ und sei (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge von (x_n) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$. Es folgt $f(\xi) = \lim y_{n_k} = \eta$, also $\xi = g(\eta)$. Daher ist (x_n) sogar konvergent und $\lim g(y_n) = g(\eta)$. $\square$

3.3 Elementare Funktionen

3.3.A Polynome und rationale Funktionen

Satz 3.3.1 (Interpolationsformel): Seien $x_0, x_1, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Punkte von $\mathbf{R}$. Dann gibt es zu $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbf{R}$ genau ein Polynom $f \in \mathbf{R}[t]$ vom Grad $\leq n$ mit $f(x_i) = y_i$ für $i = 0, \dots, n$, nämlich

$$f(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Satz 3.3.2 (Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen): Seien $f, g \in \mathbf{C}[t]$ Polynome und

$$g(t) = \prod_{j=1}^r (t - \alpha_j)^{n_j},$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen sind und $n_1, \dots, n_r$ positive natürliche Zahlen. Dann gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen

$$a_{j,\nu_j} \text{ für } j = 1, \dots, r \text{ und } 1 \leq \nu_j \leq n_j$$

und ein Polynom $p(t) \in \mathbf{C}[t]$, so daß gilt:

$$\frac{f(t)}{g(t)} = p(t) + \sum_{j=1}^r \sum_{\nu_j=1}^{n_j} \frac{a_{j,\nu_j}}{(t - \alpha_j)^{\nu_j}}. \quad (9)$$

Beispiel: Sei $f(t) = t^4 - 2t^3 - 6t + 3$ und $g(t) = (t + 1)^2(t - 1)$. In etwas übersichtlicher Notation soll

$$\frac{t^4 - 2t^3 - 6t + 3}{(t + 1)^2(t - 1)} = p(t) + \frac{a}{(t + 1)^2} + \frac{b}{t + 1} + \frac{c}{t - 1}$$

sein für geeignete komplexe Zahlen a, b, c . Multiplizieren wir diese Gleichung mit $(t + 1)^2$ so erhalten wir

$$\frac{f(t)}{t - 1} = (t + 1)^2 p(t) + a + b(t + 1) + c \frac{(t + 1)^2}{(t - 1)}.$$

Setzen wir hierin $t = -1$ ein, so verschwinden auf der rechten Seite alle Terme außer a ; es folgt $a = \frac{f(-1)}{-2} = -6$. Aus der ursprünglichen Gleichung erhalten wir nun durch Einsetzen von a :

$$\frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 3}{(t + 1)(t - 1)} = p(t) + \frac{b}{t + 1} + \frac{c}{t - 1}.$$

Nach Multiplikation mit $(t + 1)$ und nochmaligem Einsetzen von $t = -1$ folgt $b = 5$. Nach Vereinfachen und Multiplikation mit $(t - 1)$ erhalten wir schließlich

$$\frac{f(t)}{g(t)} = t - 3 - \frac{6}{(t + 1)^2} + \frac{5}{t + 1} - \frac{1}{t - 1}.$$

3.3.B Exponentialfunktion und Logarithmus

Satz 3.3.3 (und Definition): $\exp$ definiert eine stetige streng monotone Bijektion

$$\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+ .$$

Die Umkehrfunktion

$$\log : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$$

heißt der natürliche Logarithmus.

Bemerkung: Es ist $\log(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

Satz 3.3.4:

1. Es gilt $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.
2. Sei $a \in \mathbf{R}_+ - \{1\}$. Die Umkehrfunktion von $a^x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ ist

$$\log_a(x) := \frac{\log(x)}{\log(a)} .$$

3.3.C Trigonometrische Funktionen

Definition 3.3.5: Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus sind definiert durch die auf $\mathbf{R}$ absolut konvergenten Reihen

$$\begin{aligned} \sin(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} , \\ \cos(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} . \end{aligned}$$

Satz 3.3.6: Für $x \in \mathbf{R}$ gilt (mit $i = \sqrt{-1}$):

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) ,$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 ,$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) ,$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) .$$

Bemerkung: Für $0 < x < 2\sqrt{3}$ ist $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos(x) < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$. Insbesondere hat $\cos(x)$ eine Nullstelle x_0 mit $\sqrt{2} < x_0 < \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$.

Definition 3.3.7: π sei die kleinste positive Nullstelle von $\sin(x)$.

Korollar 3.3.8: $\sin(x)$ und $\cos(x)$ haben die Periode 2π . Die Menge der Nullstellen von $\sin(x)$ ist $\mathbf{Z}\pi = \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, die Menge der Nullstellen von $\cos(x)$ ist $\frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi = \{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Korollar 3.3.9: Es ist

$$e^{i\pi} = -1 .$$

Definition 3.3.10: Die Funktionen Tangens und Cotangens sind definiert durch

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{für } x \notin \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi ,$$

und

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \text{für } x \notin \mathbf{Z}\pi .$$

Ohne Beweis vermerken wir:

Satz 3.3.11: Die folgenden Abbildungen sind bijektiv:

$$\begin{aligned} \sin(x) &: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1] , \\ \cos(x) &: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] , \\ \tan(x) &: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbf{R} . \end{aligned}$$

Definition 3.3.12: Die Arcus-Funktionen sind die Umkehrfunktionen der obigen Funktionen:

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &: [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arccos(x) &: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \\ \arctan(x) &: \mathbf{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

Genauer werden diese als die Hauptzweige der Arcus-Funktionen bezeichnet,

3.3.D Hyperbelfunktionen

Definition 3.3.13: Die Hyperbel-Funktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus sind definiert durch

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

und

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) .$$

Satz 3.3.14: Die Hyperbelfunktionen haben die folgenden Eigenschaften:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 ,$$

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y) ,$$

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y) .$$

Definition 3.3.15: Der hyperbolische Tangens und Cotangens sind die Funktionen

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

und

$$\coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Satz 3.3.16: Die folgenden Abbildungen sind bijektiv:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} , \\ \cosh(x) &: [0, \infty[\longrightarrow [1, \infty[, \\ \tanh(x) &: \mathbf{R} \longrightarrow] - 1, 1[. \end{aligned}$$

Ihre Umkehrfunktionen werden als die Area-Funktionen $\operatorname{arsinh}(x)$, $\operatorname{arcosh}(x)$, $\operatorname{artanh}(x)$ bezeichnet.

Definition 3.3.17: Die Area-Funktionen sind die Umkehrfunktionen der obigen Funktionen:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ \operatorname{arcosh}(x) &: [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[\\ \operatorname{artanh}(x) &:] - 1, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \end{aligned}$$