Vorlesung Analysis I — WS 07/08

Erich Ossa

Vorläufige Version

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **1**

1.1 Elementare Logik 1

1.1.A Aussagenlogik 1

1.1.B Prädikatenlogik 3

1.2 Elementare Mengenlehre 5

1.2.A Mengen 5

1.2.B Abbildungen 8

1.2.C Relationen 12

1.3 Die natürlichen Zahlen 13

1.3.A Induktion 13

1.3.B Zahlen zum Zählen 17

1.3.C Abzählbare Mengen 20

1.4 Die reellen Zahlen 22

1.4.A Algebraische Eigenschaften 22

1.4.B Ordnungs-Eigenschaften 23

1.4.C Vollständigkeit 25

1.4.D Darstellung reeller Zahlen 27

1.4.E Die Mächtigkeit von $\mathbf{R}$ 29

1.5 Komplexe Zahlen 30

1.5.A Rechnen mit komplexen Zahlen 30

1.5.B Fundamentalsatz der Algebra 32

1.6 Arithmetisches und geometrisches Mittel 34

1.7 * Rekursive Definition 36

2 Folgen und Reihen **38**
2.1 Folgen komplexer Zahlen 38
2.1.A Konvergenz 38
2.1.B Monotone Folgen reeller Zahlen 40
2.1.C Häufungswerte 41
2.2 Unendliche Reihen 43
2.2.A Grundbegriffe 43
2.2.B Konvergenzkriterien 44
2.2.C Absolut konvergente Reihen 45
2.3 Potenzreihen 47

Dieses Skript ist noch nicht in seiner endgültigen Gestalt.
Für Fehlermeldungen, Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge wäre ich dankbar.

E. Ossa

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen komplexer Zahlen

2.1.A Konvergenz

Definition 2.1.1:

1. *Sei M eine Menge. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ von Elementen von M ist eine Abbildung $\mathbf{N}\to M$, geschrieben $n \mapsto a_n$. Wir betrachten vor allem Zahlenfolgen, d.h. Folgen komplexer Zahlen ($M = \mathbf{C}$) oder reeller Zahlen ($M = \mathbf{R}$).*
2. *Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ heißt beschränkt, wenn es eine reelle Zahl A gibt mit $|a_n| \leq A$ für alle $n \in \mathbf{N}$.*

Allgemeiner betrachtet man auch Abbildungen $\{n \in \mathbf{Z} \mid n \geq n_0\}\to M$ als Folgen $(a_n)_{n\geq n_0}$ von Elementen von M.

Definition 2.1.2: *Seien $a_n \in \mathbf{C}$ und $a \in \mathbf{C}$.*

1. *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert gegen a, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ ein $N \in \mathbf{N}$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbf{N}$ mit $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. Man schreibt dann $a_n \to a$ und nennt die Folge konvergent.*
2. *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.*

Übung: Ausformulierung der Divergenz.

Formulierung: „Für fast alle natürliche Zahlen n gilt $\mathcal{A}(n)$“ bedeutet: „Für alle bis auf endlich viele natürliche Zahlen n gilt $\mathcal{A}(n)$“. In Formeln:

$$\bigvee_{N\in\mathbf{N}} \bigwedge_{n\in\mathbf{N}} (n \geq N \Rightarrow \mathcal{A}(n)) \ .$$

Lemma 2.1.3 (Vermeidungs-Lemma): *Sei $a_n \to a$.*

1. *Ist $a' \neq a$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $\varepsilon < |a - a'|$, so ist $|a_n - a'| \geq \varepsilon$ für fast alle n.*
2. *Die Folge $(a_n)_n$ ist beschränkt.*

Definition 2.1.4:

1. *Ist die Folge $(a_n)_n$ konvergent gegen a, so ist a eindeutig bestimmt. Wir schreiben $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und nennen a den Grenzwert der Folge (a_n).*
2. *(a_n) heißt Nullfolge, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist.*

Hilfssatz 2.1.5: *Ist* (b_n) *Nullfolge und* $|a_n| \leq |b_n|$ *für fast alle* n*, so ist* (a_n) *Nullfolge.*

Lemma 2.1.6 (Rechenregeln für Grenzwerte): *Seien* $(a_n)_n$ *und* $(b_n)_n$ *konvergente Folgen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$*.*

1. *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$*.*
2. *Ist* $b \neq 0$*, so ist* $b_n \neq 0$ *für fast alle* n *und* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$*.*
3. *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{a}$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$*.*

Insbesondere ist genau dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge ist.

Korollar 2.1.7: *Eine Folge* $(a_n)_n$ *komplexer Zahlen ist genau dann konvergent gegen* $a \in \mathbf{C}$*, wenn gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a) \ \textit{und} \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(a) \ .$$

Der Einfachheit halber betrachten wir von nun an nur Folgen reeller Zahlen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Satz 2.1.8: *Sei* $s \in \mathbf{Q}_+$*,* $a \in \mathbf{R}_+$*,* $q \in \mathbf{R}$*,* $|q| < 1$*. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-s} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ , \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \ .$$

Lemma 2.1.9: *Seien* (a_n)*,* (c_n) *konvergente Folgen reeller Zahlen.*

1. *Ist* $a_n \leq c_n$ *für fast alle* n*, so ist* $\lim a_n \leq \lim c_n$*.*
2. *Ist* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *für fast alle* n *und* $\lim a_n = \lim c_n$*, so ist* $\lim b_n = \lim c_n$*.*

Lemma 2.1.10:

1. *Ist* $|a_{n+1}| \leq \dfrac{n}{n+1}|a_n|$ *für fast alle* n*, so ist* (a_n) *Nullfolge.*
2. *Wenn es ein* $\theta \in \mathbf{R}_+$ *gibt mit* $\theta < 1$ *und* $|a_{n+1}| \leq \theta |a_n|$ *für fast alle* n*, so ist* (a_n) *Nullfolge.*

Proposition 2.1.11:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$*.*
2. *Sei* $x \in \mathbf{R}$ *mit* $|x| > 1$ *und* $k \in \mathbf{Q}_+$*. Dann ist* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{x^n} = 0$*.*

Beweis: 1. Für $n > 1$ ist $\sqrt[n]{n} > 1$. Schreiben wir n als Produkt von $n-2$ Faktoren 1 und zwei Faktoren $\sqrt{n}$, so erhalten wir aus der AGM-Ungleichung

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{1^{n-2}\sqrt{n}\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n}(n-2+2\sqrt{n}) = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} \ ,$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt. [6]

2. Setze $a_n = \dfrac{n^k}{x^n}$ und $\theta = \dfrac{1}{2}(|x|^{-1}+1)$. Dann ist $|x|^{-1} < \theta < 1$ und für genügend große n wird

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = (1+\frac{1}{n})^k\,|x|^{-1} < \theta \ .$$

□

Definition 2.1.12: *Sei $(a_n)_n$ eine Folge.*

1. *Ist $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ eine streng monotone Abbildung, so heißt die Folge $(b_n)_n$ mit $b_n = a_{\varphi(n)}$ eine Teilfolge der Folge $(a_n)_n$.*

2. *Ist $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ eine bijektive Abbildung, so heißt die Folge $(b_n)_n$ mit $b_n = a_{\varphi(n)}$ eine Umordnung der Folge $(a_n)_n$.*

Lemma 2.1.13: *Konvergenz von Teilfolgen und Umordnungen einer konvergenten Folge.*

Definition 2.1.14: *Bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$.*

2.1.B Monotone Folgen reeller Zahlen

Definition 2.1.15 (Monotone Konvergenz):

1. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ heißt monoton wachsend, wenn stets $a_n \leq a_{n+1}$ ist; sie heißt streng monoton wachsend, wenn stets $a_n < a_{n+1}$ ist. Analog sind (streng) monoton fallende Folgen definiert.*

2. *Wir schreiben $a_n \nearrow x$, wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monoton wachsend ist und gegen x konvergiert; wir schreiben $a_n \searrow x$, wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monoton fallend ist und gegen x konvergiert. In beiden Fällen sprechen von monotoner Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ gegen x.*

[6] Man kann die Behauptung auch mit Hilfe der Bernoulli'schen Ungleichung beweisen: Für $n > 0$ ist

$$\sqrt{n} = (\sqrt[2n]{n})^n = (1 + \sqrt[2n]{n} - 1)^n \geq 1 + n(\sqrt[2n]{n} - 1) \ ,$$

also $\sqrt[2n]{n} \leq 1 + \frac{1}{n}(\sqrt{n}-1)$.

Hilfssatz 2.1.16: *Sei $x \in \mathbf{R}$. Dann gibt es monotone Folgen rationaler Zahlen (a_n) und (b_n) mit $a_n \nearrow x$ und $b_n \searrow x$.*

Beispiel: Intervallschachtelungen, insbesondere Dezimalbruch-Entwicklungen $\rho_{g,n}(z) \nearrow \rho_g(z)$ und $1 - \rho_{g,n}(z) \searrow 1 - \rho_g(z)$.

Satz 2.1.17: *Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.*

Definition 2.1.18: *Seien $a,\ x \in \mathbf{R}$ und sei $a > 1$. Es sei*

$$a^x := \sup\{a^r \mid r \in \mathbf{Q} \text{ und } r < x\}\ .$$

Es sei noch $1^x = 1$; für $0 < b < 1$ sei $a = \frac{1}{b}$ und $b^x = a^{-x}$.

Hilfssatz 2.1.19: *Seien $a,\ x,\ y \in \mathbf{R}$ und sei $a > 1$.*

1. *Seien (r_n) und (s_n) Folgen rationaler Zahlen mit $r_n \nearrow x$ und $s_n \searrow x$. Dann gilt*
$$\lim a^{r_n} \nearrow a^x \swarrow \lim a^{s_n}\ .$$
2. $a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}$.

Proposition 2.1.20: *Seien $a,\ a_0 > 0$. Mit $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \dfrac{a}{a_n})$ ist $a_{n+1} \searrow \sqrt{a}$.*

Proposition 2.1.21: $(1 + \dfrac{1}{n})^n \nearrow e \swarrow (1 + \dfrac{1}{n})^{n+1}$.

Beweis: $\xi_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ ist ab $n \geq -x$ monoton wachsend (Beweis mit AGM). Setze $a_n = \xi_n(1)$ und $b_n = \xi_{n+1}(-1)^{-1}$. $\square$

Korollar 2.1.22: $\dfrac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \dfrac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$ *für $n > 1$.*

2.1.C Häufungswerte

Definition 2.1.23: *$a \in \mathbf{C}$ heißt Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, wenn es zu $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ unendlich viele $n \in \mathbf{N}$ gibt mit $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Satz 2.1.24: *a ist genau dann Häufungswert der Folge (a_n), wenn (a_n) eine gegen a konvergente Teilfolge besitzt.*

Beispiele.

Satz 2.1.25 (Bolzano-Weierstraß): *Eine beschränkte Folge* (a_n) *reeller Zahlen hat einen größten Häufungswert* $a^* =: \limsup a_n$ *und einen kleinsten Häufungswert* $a_* =: \liminf a_n$.

Korollar 2.1.26: *Eine beschränkte Folge komplexer Zahlen hat einen Häufungswert.*

Definition 2.1.27: *Eine Zahlenfolge* (a_n) *heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem* $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ *ein* $N \in \mathbf{N}$ *gibt, so daß für alle* $m, n \in \mathbf{N}$ *mit* $m \geq n \geq N$ *gilt* $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Satz 2.1.28: *Eine Folge komplexer Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

2.2 Unendliche Reihen

2.2.A Grundbegriffe

Definition 2.2.1: *Sei $(a_k)_k$ eine Zahlenfolge. Unter der unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ versteht man die Folge $(s_n)_n$ der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, wenn die Folge $(s_n)_n$ konvergent ist. In diesem Fall heißt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ der Grenzwert der Reihe.*

Beispiele: Dezimalbrüche. Harmonische Reihe. $\log 2$. $\zeta(2)$.

Hilfssatz 2.2.2: *Seien $c_k = a_k + ib_k$ (mit a_k, $b_k \in \mathbf{R}$) komplexe Zahlen. Dann ist $\sum_k c_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ konvergent sind, und in diesem Fall ist $\sum_k c_k = \sum_k a_k + i \sum_k b_k$.*

Lemma 2.2.3: *Sei $(a_k)_k$ eine Zahlenfolge.*

1. *Die Teilfolge (b_j) von (a_k) entstehe aus (a_k) durch Weglassen von Nullen. Dann ist $\sum b_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum a_k$ es ist.*
2. *Sei $b_k = a_k$ für fast alle k. Dann ist $\sum b_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum a_k$ es ist.*
3. *Sei $n_1 > n_0$. Dann ist $\sum_{k\geq n_0} a_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum_{k\geq n_1} a_k$ es ist.*

Proposition 2.2.4: *Divergenz der harmonischen Reihe $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*

Beweis: Verdichtungsprinzip von Cauchy. □

Satz 2.2.5 (Rechnen mit unendlichen Reihen):

1. $\sum(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum a_k + \mu \sum b_k$,
2. $\sum a_k = \sum a_{2k} + \sum a_{2k+1}$,

falls die rechten Seiten existieren.

Lemma 2.2.6: *Sei $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ streng monoton mit $f(0) = 0$. Sei $b_j = \sum_{k=f(j)}^{f(j+1)-1} a_k$. Dann ist $\sum b_j = \sum a_k$, falls die rechte Seite existiert.*

Beispiel: $a_k = (-1)^k$.

Satz 2.2.7: *Konvergenzkriterium von Cauchy für Reihen.*

Korollar 2.2.8: *Ist die unendliche Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent, so ist die Folge der Reihenglieder* (a_k) *sowie der Reihenreste* (r_n) *mit* $r_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ *jeweils eine Nullfolge.*

Satz 2.2.9: *Sei* $q \in \mathbf{C}$.

1. $\sum q^k$ *divergiert für* $|q| \geq 1$.
2. $\sum q^k$ *konvergiert gegen* $\frac{1}{1-q}$ *für* $|q| < 1$.

Satz 2.2.10: *Sei* $s \in \mathbf{R}$.

1. $\sum\limits_{k \geq 1} k^{-s}$ *divergiert für* $s \leq 1$.
2. $\sum\limits_{k \geq 1} k^{-s}$ *konvergiert für* $s > 1$.

Für $s > 1$ definiert man $\zeta(s) = \sum\limits_{k \geq 1} k^{-s}$. Zum Beispiel ist $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

2.2.B Konvergenzkriterien

Satz 2.2.11 (Leibnizkriterium für alternierende Reihen):
Sei (a_k) *eine reelle Folge mit* $a_k \searrow 0$. *Dann ist* $\sum (-1)^k a_k$ *konvergent.*

Beispiele: $\sum (-1)^k \frac{1}{k+1} = \log(2)$ und $\sum (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Satz 2.2.12 (Majorantenkriterium): *Seien* b_k *nicht-negative reelle Zahlen und sei* $\sum b_k$ *konvergent. Ist* $|a_k| \leq b_k$ *für fast alle* k, *so ist auch* $\sum a_k$ *konvergent.*

Satz 2.2.13 (Quotientenkriterium): *Sei* $a_k \neq 0$ *für fast alle* k.

1. *Gibt es ein* $q < 1$, *so daß* $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$ *ist für fast alle* k, *so ist* $\sum a_k$ *absolut konvergent.*
2. *Ist* $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$ *für fast alle* k, *so ist* $\sum a_k$ *divergent.*

Man beachte, daß die erste Bedingung des Quotientenkriteriums schon erfüllt ist, wenn $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ ist.

Satz 2.2.14 (Wurzelkriterium):

1. *Gibt es ein* $q < 1$, *so daß* $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ *ist für fast alle* k, *so ist* $\sum a_k$ *absolut konvergent.*
2. *Ist* $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ *für unendlich viele* k, *so ist* $\sum a_k$ *divergent.*

Beispiele.

2.2.C Absolut konvergente Reihen

Beispiel: Umordnung von $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Bedingte Konvergenz.

Hilfssatz 2.2.15: *Ist* $\sum |a_k|$ *konvergent, so auch* $\sum a_k$, *und es gilt*

$$|\sum a_k| \leq \sum |a_k| \ .$$

Definition 2.2.16: *Die Reihe* $\sum a_k$ *heißt absolut konvergent, wenn* $\sum |a_k|$ *konvergent ist.*

Satz 2.2.17: *Kleiner Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen.*

Korollar 2.2.18: *Sei* M *eine abzählbar unendliche Menge und* $a : M \to \mathbf{C}$ *mit* $m \mapsto a_m$ *eine Abbildung. Seien* $\varphi : \mathbf{N}{\to}M$ *und* $\psi : \mathbf{N}{\to}M$ *Bijektionen. Ist* $\sum a_{\varphi(k)}$ *absolut konvergent, so auch* $\sum a_{\psi(k)}$. *In diesem Fall ist* $\sum a_{\varphi(k)} = \sum a_{\psi(k)}$.

Definition 2.2.19: *Sei* M *eine abzählbar unendliche Menge und* $a : M \to \mathbf{C}$ *mit* $m \mapsto a_m$ *eine Abbildung. Dann heißt* a *summierbar, wenn für eine (und damit für jede) Bijektion* $\varphi : \mathbf{N}{\to}M$ *die Reihe* $\sum a_{\varphi(k)}$ *absolut konvergent ist. In diesem Fall heißt* $\sum_{m\in M} a_m := \sum a_{\varphi(k)}$ *die Summe der Funktion* a.

Ohne Beweis:

Satz 2.2.20 (Großer Umordnungssatz): *Sei* M *eine abzählbar unendliche Menge und* $a : M \to \mathbf{C}$ *mit* $m \mapsto a_m$ *eine Abbildung. Sei* J *eine abzählbare Menge, und* $M = \bigcup_{j\in J} M_j$ *eine Zerlegung von* M *in paarweise disjunkte Teilmengen. Sei* $A \in \mathbf{C}$. *Dann sind äquivalent:*

- *a ist summierbar mit* $\sum_{m\in M} a_m = A$.
- *Für jedes* $j \in J$ *ist die Einschränkung* $a|_{M_j}$ *summierbar. Ist* $A_j := \sum_{m\in M_j} a_m$, *so ist die Abbildung* $J{\to}\mathbf{C}$ *mit* $j \mapsto A_j$ *summierbar mit* $\sum_{j\in J} A_j = A$.

Äquivalent dazu ist der

Satz 2.2.21 (Doppelreihensatz): *Seien* $a_{k,j} \in \mathbf{C}$ *für* $(k,j) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$. *Sei* $A \in \mathbf{C}$. *Dann sind äquivalent:*

- $\sum_{k,j} a_{k,j} = A$ *mit absoluter Konvergenz (für eine beliebige Anordnung von* $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$*).*
- *Für jedes* $k \in \mathbf{N}$ *ist* $\sum_j a_{k,j}$ *absolut konvergent mit Summe* A_k, *und* $\sum_{k\in\mathbf{N}} A_k$ *ist absolut konvergent mit Summe* A.

Kurzschreibweise:

$$\sum_{k,j} a_{k,j} = \sum_k \sum_j a_{k,j} \ .$$

Beispiel: $\sum_{k,j} a_k b_j$.

Satz 2.2.22 (Produktsatz für Reihen): *Sind* $\sum a_k = a$ *und* $\sum b_k = b$ *absolut konvergent, so konvergiert das Cauchyprodukt der Reihen* $\sum a_k$ *und* $\sum b_k$ *gegen* ab.

Beispiele werden wir bei den Potenzreihen kennenlernen.

2.3 Potenzreihen

Definition 2.3.1: *Seien $a_k \in \mathbf{C}$ und $z_0 \in \mathbf{C}$. Unter einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 versteht man eine Reihe der Gestalt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, wobei z eine komplexe Variable oder komplexe Zahl ist.*

Bemerkung: Durch eine Substitution $z = x - x_0 + z_0$ kann man offenbar den Entwicklungspunkt in den Punkt x_0 verlagern. Wir werden daher o.B.d.A. meist als Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ nehmen.

Satz 2.3.2: *Ist $\sum a_k z^k$ für ein $z \neq 0$ konvergent, so ist für jedes $x \in \mathbf{C}$ mit $|x| < |z|$ die Reihe $\sum a_k x^k$ absolut konvergent.*

Definition 2.3.3: *Sei $\sum a_k z^k$ eine Potenzreihe. Der Konvergenzradius R der Reihe ist definiert durch*

$$R := \sup\{|z| \mid z \in \mathbf{C} \text{ und } \sum a_k z^k \text{ ist konvergent } \} \ .$$

Satz 2.3.4: *Die Potenzreihe $\sum a_k z^k$ habe den Konvergenzradius R. Dann gilt:*

1. *Für jedes $x \in \mathbf{C}$ mit $|x| < R$ ist die Reihe $\sum a_k x^k$ absolut konvergent.*
2. *Für jedes $x \in \mathbf{C}$ mit $|x| > R$ ist die Reihe $\sum a_k x^k$ divergent.*

Satz 2.3.5 (Euler bzw. Cauchy-Hadamard): *Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum a_k x^k$.*

1. *Ist $a_k \neq 0$ für fast alle n und existiert der Grenzwert $q := \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ in $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$, so ist $R = \frac{1}{q}$.*
2. *Sei $w := \limsup \sqrt[k]{|a_k|} \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Dann ist $R = \frac{1}{w}$.*

Hierin ist $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$ zu nehmen.

Satz 2.3.6: *Sei $\sum a_k x^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius S und $\sum b_k x^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius T.*

1. *Die Summe $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k := \sum (a_k + b_k) x^k$ hat Konvergenzradius $R \geq \min\{S, T\}$.*
2. *Das Produkt $\sum a_k x^k \cdot \sum b_k x^k := \sum (\sum_{i+j=k} a_i b_j) x^k$ hat Konvergenzradius $R \geq \min\{S, T\}$.*

Bemerkung: Sind $f(x) = \sum a_k x^k$, $g(x) = \sum b_k x^k$ Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius und ist $b_0 \neq 0$, so kann man rekursiv die Koeffizienten der Quotientenreihe $q(x) = \sum c_k x^k := \frac{f(x)}{g(x)}$ aus $a_k = \sum_{j=0}^{k} b_j c_{k-j}$ berechnen. Der Konvergenzradius von $q(x)$ ist dann > 0.

Satz 2.3.7 (und Definition): *Die Exponentialreihe*

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

konvergiert absolut für alle $x \in \mathbf{C}$. *Für* $x,\, y \in \mathbf{C}$ *gilt*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \ .$$

Proposition 2.3.8: *Es ist* $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{x}{n})^n$. *Insbesondere ist* $\exp(1) = e$ *und* $\exp(x) = e^x$ *für* $x \in \mathbf{R}$.

Beweis: Sei $y := |x|$ und sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbf{N}$ mit $\left|\sum_{k>N} \dfrac{y^k}{k!}\right| < \varepsilon$. Sei $n > N$. Es wird $E := (1+\dfrac{x}{n})^n - \exp(x) = A + B - C$ mit

$$A = \sum_{k=0}^{N} \left(\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} - \frac{x^k}{k!}\right) \ , \ B = \sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} \ , \ C = \sum_{k>N} \frac{x^k}{k!} \ .$$

Nun ist $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$ für $0 \le k \le 1$; für $k > 1$ wird aber

$$\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\right) = \frac{1}{k!}\left(1-(1-\frac{1}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{k-1}{n})\right) \ .$$

Insbesondere ist stets $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$.
Es folgt

$$|A| \ \le \ \sum_{k=2}^{N}\left(1-(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})\right)\frac{y^k}{k!} \ ,$$

und es gibt ein n_0, so daß dies $< \varepsilon$ wird für $n > n_0$. Für $|B|$ und $|C|$ erhalten wir die obere Abschätzung

$$\max\{|B|,|C|\} \ \le \ \sum_{k>N}\frac{y^k}{k!} \ < \ \varepsilon \ .$$

Damit wird $|E| < 3\varepsilon$ für $n > \max\{N, n_0\}$.

Es reicht, die Beziehung $\exp(x) = e^x$ für $x \in \mathbf{R}_+$ zu beweisen. Aus der Funktionalgleichung von exp folgt aber leicht, daß sie für $x \in \mathbf{Q}_+$ gilt. Aus der Monotonie von exp folgt nun $\exp(x) = e^x$ für $x \in \mathbf{R}$ wegen $\lim e^{r_n} = e^x = \lim e^{s_n}$ für rationale Folgen $r_n \nearrow x$ und $s_n \searrow x$. $\square$