Vorlesung Analysis I — WS 07/08

Erich Ossa

Vorläufige Version

Inhaltsverzeichnis

Dieses Skript ist noch nicht in seiner endgültigen Gestalt.
Für Fehlermeldungen, Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge wäre ich dankbar.

E. Ossa

1 Grundlagen

1.1 Elementare Logik

Nicht nur in der Mathematik muß jede Argumentation die Gesetze der Logik berücksichtigen. Allerdings ist es gar nicht so selten, daß diese verletzt werden, so daß es sinnvoll erscheint, die wichtigsten Grundregeln der Logik kurz zu referieren.

1.1.A Aussagenlogik

Unter Aussagen wollen wir im folgenden immer **mathematische Aussagen** verstehen; eine solche Aussage kann entweder **wahr** oder **falsch** sein. Als typische Bezeichnung für Aussagen verwenden wir Buchstaben

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E} \ldots \ .$$

Für den **Wahrheitswert** einer Aussage benutzen wir die Abkürzungen

$$W = \text{wahr} \quad \text{und} \quad F = \text{falsch} \ .$$

Zum Beispiel sind

$\mathcal{A}$: 3 ist eine Primzahl

$\mathcal{B}$: 9 ist eine Primzahl

$\mathcal{C}$: 1234567891 ist eine Primzahl

$\mathcal{D}$: Zu jeder natürliche Zahl $n > 1$ gibt es Primzahlen p und q mit $2n = p + q$

mathematische Aussagen. Aussage $\mathcal{A}$ ist wahr, Aussage $\mathcal{B}$ ist falsch. Ob Aussage $\mathcal{C}$ wahr oder falsch ist, ist nicht so ohne weiteres klar, doch läßt es sich sicher herausfinden. Dagegen ist zur Zeit niemandem bekannt, ob Aussage $\mathcal{D}$ wahr oder falsch ist. Daß der Wahrheitswert einer Aussage nicht bekannt ist, hindert uns jedoch nicht daran, nach den Regeln der Logik mit ihr umzugehen.

Wir beschreiben nun, wie man ausgehend von gegebenen Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ durch geeignete Verknüpfungen neue Aussagen bilden kann. Dabei führen wir einige Abkürzungen ein, die manchmal bequem sind[1].

Die **Negation** der Aussage $\mathcal{A}$ ist die Aussage „nicht $\mathcal{A}$“ oder kurz $\neg\mathcal{A}$. Sie wird am einfachsten beschrieben durch eine **Wahrheitstafel**:

$\mathcal{A}$	W	F
$\neg\mathcal{A}$	F	W

Hier stehen in der oberen Zeile die möglichen Wahrheitswerte der Aussage $\mathcal{A}$, jeweils darunter der zugehörige Wahrheitswert der Aussage $\neg\mathcal{A}$.

[1] aber auch manchmal das gedankliche Erfassen erschweren!

Die **Disjunktion** der Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist die Aussage „$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$“, abgekürzt zu $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Sie wird in offensichtlicher Weise beschrieben durch die Wahrheitstafel

		$\mathcal{B}$:	
	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	W	F
$\mathcal{A}$:	W	W	W
	F	W	F

Wir entnehmen dieser Tafel, daß mit dieser „oder“-Verknüpfung immer das nicht ausschließende „oder“ gemeint ist. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ wahr ist.

Die **Konjunktion** der Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist die Aussage „$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$“, abgekürzt zu $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$. Sie wird in offensichtlicher Weise beschrieben durch die Wahrheitstafel

		$\mathcal{B}$:	
	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	W	F
$\mathcal{A}$:	W	W	F
	F	F	F

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ wahr sind.

Eine besonders wichtige Verknüpfung ist die **Implikation**. Die Aussage „$\mathcal{A}$ impliziert $\mathcal{B}$“ wird auch gelesen als „Aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$“ oder „Wenn $\mathcal{A}$ gilt, dann auch $\mathcal{B}$“. Die Kurzschreibweise ist $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, und die zugehörige Wahrheitstafel

		$\mathcal{B}$:	
	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	W	F
$\mathcal{A}$:	W	W	F
	F	W	W

Die Aussage $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann falsch, wenn $\mathcal{A}$ wahr und $\mathcal{B}$ falsch ist. Daß die Aussage $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ immer wahr sein soll, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist, scheint zunächst etwas überraschend. Klarer wird es vielleicht, wenn man überlegt, daß für eine natürliche Zahl n die Implikation

$$n > 3 \;\Rightarrow\; n^2 > 3$$

doch sicher wahr ist — unabhängig vom (möglicherweise unbekannten) Wert von n. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist aber die Prämisse $n > 3$ falsch, während die Konklusion $n^2 > 3$ im ersten Fall falsch, im zweiten dagegen wahr ist.

Schließlich definieren wir noch die **Äquivalenz** zweier Aussagen $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ als

$$(\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A}) \;.$$

Sie ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beide wahr oder beide falsch sind.

Wenn man mehrere dieser *logischen Operatoren* in einer Formel verwendet, ist auf die richtige Klammerung zu achten. Wir vereinbaren, daß das Negationssymbol $\neg$ am stärksten bindet, so daß zum Beispiel $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ zu lesen ist als $(\neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{B}$. Damit gelten die folgenden Regeln:

Hilfssatz 1.1.1: *Die folgenden Aussagen sind wahr:*

$\neg(\neg\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$	*(Satz von der doppelten Verneinung)*
$\mathcal{A}\vee\neg\mathcal{A}$	*(Satz vom ausgeschlossenen Dritten)*
$\neg(\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{A})$	*(Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch)*

Man verifiziert diese Behauptungen leicht mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

Wichtig ist es, die Negation zusammengesetzter Aussagen richtig bilden zu können:

Hilfssatz 1.1.2: *Es gilt:*

$$\begin{array}{lcl} \neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) & \Leftrightarrow & \neg\mathcal{A}\vee\neg\mathcal{B} \\ \neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) & \Leftrightarrow & \neg\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B} \\ \neg(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}) & \Leftrightarrow & \mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B} \\ (\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}) & \Leftrightarrow & (\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A}) \end{array}$$

Die letzte dieser Äquivalenzen nennt man auch das Kontrapositionsgesetz. Es führt zum Prinzip des indirekten Beweises, das man auch wie folgt formulieren kann:

$$(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \ .$$

1.1.B Prädikatenlogik

Häufig werden wir „Aussagen“ benötigen, in denen Variablen x, $y \ldots$, vorkommmen. Man spricht dann genauer von **Aussageformen**; diese werden zu Aussagen, wenn den Variablen Werte zugewiesen werden. Zum Beispiel ist

$$\mathcal{A}(x) : \quad x \text{ ist eine Primzahl}$$

eine Aussageform; die Aussage $\mathcal{A}(3)$ ist wahr, die Aussage $\mathcal{A}(9)$ dagegen falsch.

Zu einer gegebenen Aussageform $\mathcal{A}(x)$ kann man auch wie folgt Aussagen bilden:

$$\bigwedge_x \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \text{Für alle } x \text{ gilt } \mathcal{A}(x) \ .$$

Das Symbol $\bigwedge_x$ bezeichnet man als den **All-Quantor**.

Mit dem Symbol $\bigvee_x$ bezeichnet man den **Existenz-Quantor**:

$$\bigvee_x \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \text{Es gibt ein } x \text{ , so daß } \mathcal{A}(x) \text{ gilt .}$$

Offenbar ist die Verneinung dieser Quantoren $\bigwedge_x$ und $\bigvee_x$ wie folgt zu bilden:

Hilfssatz 1.1.3: *Sei $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform. Dann gilt:*

$$\neg\bigwedge_x \mathcal{A}(x) \quad\Leftrightarrow\quad \bigvee_x \neg\mathcal{A}(x)\ ,$$
$$\neg\bigvee_x \mathcal{A}(x) \quad\Leftrightarrow\quad \bigwedge_x \neg\mathcal{A}(x)\ .$$

Eine Aussage $\bigwedge_x\bigwedge_y \mathcal{A}(x,y)$ kürzt man meist ab zu $\bigwedge_{x,y}\mathcal{A}(x,y)$; analog für den Existenzquantor und für mehr als zwei Variablen. Wichtig ist noch die Variante

$$\bigwedge_{x \text{ mit } \mathcal{B}(x)} \mathcal{A}(x) \text{ bzw. } \bigvee_{x \text{ mit } \mathcal{B}(x)} \mathcal{A}(x)\ ,$$

mit der gemeint ist

$$\bigwedge_x (\mathcal{B}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(x)) \text{ bzw. } \bigvee_x (\mathcal{B}(x) \wedge \mathcal{A}(x))\ .$$

Ist hierin klar, daß über x quantisiert werden soll, so schreibt man diese Aussagen auch einfach als

$$\bigwedge_{\mathcal{B}(x)} \mathcal{A}(x) \text{ bzw. } \bigvee_{\mathcal{B}(x)} \mathcal{A}(x)\ ,$$

insbesondere wenn $\mathcal{B}(x)$ eine Aussageform ist wie zum Beispiel $x \in B$. Man überlege sich, daß damit gilt:

$$\neg\bigwedge_{x\in B} \mathcal{A}(x) \quad\Leftrightarrow\quad \bigvee_{x\in B} \neg\mathcal{A}(x)\ ,$$
$$\neg\bigvee_{x\in B} \mathcal{A}(x) \quad\Leftrightarrow\quad \bigwedge_{x\in B} \neg\mathcal{A}(x)\ .$$

1.2 Elementare Mengenlehre

1.2.A Mengen

Wir gehen in dieser Vorlesung von einem naiven Mengen-Begriff aus, den wir nach M. Cantor wie folgt charakterisieren:

> Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Ist m Element der Menge M, so schreiben wir $m \in M$; die Negation hiervon wird mit $m \notin M$ bezeichnet. Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

Eine gewisse Vertrautheit mit dem Mengen-Begriff müssen wir dabei voraussetzen; wir benötigen allerdings nicht viel und wollen das Wichtigste hier kurz umreißen. Im folgenden seien A, B, ... Mengen.

Mengen kann man einerseits beschreiben durch eine Aufzählung ihrer Elemente:

$$A = \{2, 3, 5\}, \quad B = \{x_1, x_2\}, \quad C = \{u, v, w\}$$

oder zum Beispiel

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{und} \quad \mathbf{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\} \ ;$$

hier sind mit $\mathbf{N}$ bzw. $\mathbf{N}_+$ offensichtlich die Menge aller natürlichen Zahlen bzw. aller positiven natürlichen Zahlen gemeint.

Eine andere Beschreibung erhält man, indem man eine Bedingung an die Elemente der Menge stellt:

$$A = \{x \in U \mid \mathcal{A}(x)\} \ ,$$

wobei U eine gegebene Menge und $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform ist. Zum Beispiel definiert

$$\text{Prim} := \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ ist Primzahl}\}$$

die Menge $\text{Prim} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ aller Primzahlen.

Ist I eine Menge und für jedes $i \in I$ eine Menge A_i gegeben, so verlangen wir, daß es eine **Vereinigungsmenge**

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \text{Es gibt ein } j \in I \text{ mit } x \in A_j\}$$

gibt. Allgemeiner setzen wir (für eine Aussageform $\mathcal{A}(x)$)

$$\{x \mid \mathcal{A}(x)\} := \bigcup_{U} \{x \in U \mid \mathcal{A}(x)\} \ .$$

Wir setzen Vertrautheit mit den folgenden wichtigen Mengen der Analysis voraus:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & : & \text{Menge der reellen Zahlen,} \\ \mathbf{Q} & : & \text{Menge der rationalen Zahlen,} \\ \mathbf{Z} & : & \text{Menge der ganzen Zahlen.} \end{array}$$

Weiter ist

$$\mathbf{N} = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \geq 0\}$$

die Menge der natürlichen Zahlen. Später werden die wichtigsten Eigenschaften dieser Zahlbereiche referiert werden.

Wir vereinbaren noch die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}_{\geq 0} & = & \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\} \ , \\ \mathbf{R}_{+} & = & \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\} \ , \\ \mathbf{N}_{+} & = & \{x \in \mathbf{N} \mid x > 0\} \ , \end{array}$$

und analog für ganze oder rationale Zahlen.

Man nennt A eine **Teilmenge** der Menge B und schreibt $A \subset B$ oder $B \supset A$, wenn gilt $\bigwedge_x (x \in A \ \Rightarrow \ x \in B)$. Zum Beispiel ist

$$\mathbf{N}_{+} \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \ .$$

Für $A \subset B$ und $A \neq B$ schreiben wir $A \underset{\neq}{\subset} B$ und nennen A eine **echte Teilmenge** der Menge B.

Wir definieren für zwei Mengen A, B die **Vereinigung**, den **Durchschnitt** und die **Differenz**:

$$\begin{array}{rcl} A \cup B & := & \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \ , \\ A \cap B & := & \{x \in A \mid x \in B\} \ , \\ A - B & := & \{x \in A \mid x \notin B\} \ . \end{array}$$

Diese Konstruktionen erfüllen offensichtliche Rechenregeln, von denen wir nur die folgenden erwähnen wollen:

Hilfssatz 1.2.1: *Für Mengen A, B, C gilt:*

$$\begin{array}{rcl} (A \cup B) \cap C & = & (A \cap C) \cup (B \cap C) \ , \\ (A - B) - C & = & A - (B \cup C) \ , \\ A - (B - C) & = & (A - B) \cup (A \cap C) \ . \end{array}$$

Vereinigung oder Durchschnitt von mehr als zwei Mengen werden in offensichtlicher Weise gebildet. Wir erwähnen noch die Notation

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid x \in A_j \text{ für alle } j \in I\} \ .$$

Wichtige Bildungen sind noch die **leere Menge**

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

und die **Potenzmenge** einer Menge M

$$\mathfrak{P}(M) := \{A \mid A \subset M\} \ .$$

So wird zum Beispiel

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\} \ , \\ \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset)) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \ , \\ \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ , \end{aligned}$$

usw.

1.2.B Abbildungen

Unter einer Abbildung $f : D \to W$ versteht man eine „Vorschrift", durch die jedem Element $x \in D$ ein eindeutig bestimmtes Element $f(x) \in W$ zugeordnet wird. Zur Angabe der Abbildung gehört außer der Angabe der Zuordnungsvorschrift auch die Angabe des Definitionsbereichs D und des Wertebereichs W. Für die Zuordnung schreiben wir auch

$$f : x \mapsto f(x)$$

oder einfach $x \mapsto f(x)$, wenn D und W schon bekannt sind oder sich aus dem Zusammenhang ergeben.

So können wir zum Beispiel drei verschiedene Abbildungen

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_2 : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}_{\geq 0}, \quad f_3 : \mathbf{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbf{R}_{\geq 0}$$

durch die gleiche Zuordnungsvorschrift

$$x \mapsto x^2$$

definieren.

Eine besonders einfache, aber auch wichtige Abbildung ist die **identische** Abbildung

$$\mathrm{id_D} : D \to D \;\text{ mit }\; x \mapsto x$$

Ist für eine Abbildung $f : D \to W$ der Wertebereich $W = \mathbf{R}$ (oder eine Teilmenge $W \subset \mathbf{R}$), so nennt man f auch eine reelle Funktion auf $\mathbf{R}$. Wir wollen in dieser Vorlesung vor allem reelle Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ studieren. Bekanntlich kann man solche Funktionen durch ihre Graphen veranschaulichen. Dies kann man verallgemeinern:

Sind M und N Mengen, so ordnet man einem $x \in M$ und $y \in N$ ein **geordnetes Paar** (x, y) zu; ist $p = (x, y)$ solch ein geordnetes Paar, so heißt x seine erste Komponente und y seine zweite Komponente. Zwei geordnete Paare sind genau dann gleich, wenn ihre jeweiligen Komponenten übereinstimmen:

$$(x, y) = (x', y') \;\Leftrightarrow\; x = x' \text{ und } \; y = y' \;.$$

Die Menge

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M, \; y \in N\}$$

heißt das **Produkt** der Mengen M und N. Die Abbildungen

$$\mathrm{pr}_1 : M \times N \to M \text{ mit } (x, y) \mapsto x$$

und

$$\mathrm{pr}_2 : M \times N \to N \text{ mit } (x, y) \mapsto y$$

heißen die kanonischen Projektionen.

Ist $f : D \to W$ eine Abbildung, so ist der Graph von f die folgende Teilmenge von $D \times W$:

$$\text{Graph}(f) := \{(x, y) \in D \times W \mid y = f(x)\} \ .$$

Offenbar ist f durch seinen Graphen vollständig festgelegt.

Hilfssatz 1.2.2: *Eine Teilmenge $\Gamma \subset D \times W$ ist genau dann der Graph einer Abbildung $f : D \to W$ wenn gilt:*

$$\textit{Zu jedem } x \in D \textit{ gibt es genau ein } y \in W \textit{ mit } (x, y) \in \Gamma.$$

Diese Eigenschaft wird auch oft als formale Definition einer Abbildung zu Grunde gelegt.

Sei $f : D \to W$ eine Abbildung.

Für eine Teilmenge $D' \subset D$ schreibt man

$$f(D') := \{f(x) \mid x \in D'\} \subset W \ .$$

Insbesondere ist das **Bild** von f

$$\text{Bild}(f) := f(D) \subset W \ .$$

Die Abbildung $f : D \to W$ heißt **surjektiv**, wenn $\text{Bild}(f) = W$ ist.

Hilfssatz 1.2.3: *Sei $f : D \to W$ eine Abbildung und seien $D_1, D_2 \subset D$. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} f(D_1 \cup D_2) & = & f(D_1) \cup f(D_2) \\ f(D_1 \cap D_2) & \subset & f(D_1) \cap f(D_2) \ . \end{array}$$

Für eine Teilmenge $W' \subset W$ heißt

$$f^{-1}(W') := \{x \in D \mid f(x) \in W'\}$$

die Urbildmenge von W'. Offenbar ist $f^{-1}(W) = D$.

Hilfssatz 1.2.4: *Sei $f : D \to W$ eine Abbildung und seien $W_1, W_2 \subset W$. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(W_1 \cup W_2) & = & f^{-1}(W_1) \cup f^{-1}(W_2) \\ f^{-1}(W_1 \cap W_2) & = & f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2) \end{array}$$

Für $y \in W$ schreibt man auch

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) \ .$$

Die Abbildung $f : D \to W$ heißt **injektiv**, wenn für jedes $y \in W$ die Urbildmenge $f^{-1}(y)$ aus höchstens einem Element besteht. Eine Umformulierung ist:

Hilfssatz 1.2.5: *$f: D \to W$ ist genau dann injektiv, wenn für $x, x' \in D$ gilt:*

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

(oder äquivalent: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$) .

Die Abbildung $f: D \to W$ heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Beispiele: $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sei wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 \ , \\ f_2(x) &= x^3 - x \ , \\ f_3(x) &= e^x \ , \\ f_4(x) &= x^3 \ , \\ f_5(x) &= \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = 0 \ , \\ \frac{1}{x} & \text{falls} \quad x \neq 0 \ . \end{cases} \end{aligned}$$

f_1 ist weder injektiv noch surjektiv, f_2 ist surjektiv, aber nicht injektiv, f_3 ist injektiv, aber nicht surjektiv, und f_4 sowie f_5 sind bijektiv.

Sind $f: A \to B$ und $g: B \to C$ Abbildungen, so ist ihre **Komposition** die Abbildung

$$g \circ f : A \to C \text{ mit } \ g \circ f(x) = g(f(x)) \ .$$

Wichtig ist

Hilfssatz 1.2.6: *Für $f: A \to B$, $g: B \to C$ und $h: C \to D$ ist*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \ .$$

Man darf also $h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f$ schreiben.

Hilfssatz 1.2.7: *Sei $f: D \to W$ eine Abbildung.*

1. *f ist genau dann injektiv, wenn es eine* **links-inverse** *Abbildung $g: W \to D$ gibt mit*

$$g \circ f = \mathrm{id_D} \ .$$

2. *f ist genau dann surjektiv, wenn es eine* **rechts-inverse** *Abbildung $g: W \to D$ gibt mit*

$$f \circ g = \mathrm{id_W} \ .$$

3. *$f: D \to W$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine* **inverse** *Abbildung $g: W \to D$ gibt mit*

$$g \circ f = \mathrm{id_D} \ \textit{und} \ f \circ g = \mathrm{id_W} \ .$$

Diese ist dann eindeutig bestimmt und wird als **Umkehrabbildung** *$f^{-1}: W \to D$ bezeichnet:*

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \ .$$

Man folgert leicht, daß für Abbildungen $f : D \to W$ und $g : W \to D$ mit $g \circ f = \mathrm{id_D}$ und $f \circ g = \mathrm{id_W}$ Bijektivität vorliegt und die Gleichheit $g = f^{-1}$ und $f = g^{-1}$ gilt. So wird für die obigen Beispiele $f_4^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ und $f_5^{-1}(x) = f_5(x)$.

Man schreibt auch $M \cong N$, wenn es eine Bijektion zwischen den Mengen M und N gibt.

In Verallgemeinerung der geordneten Paare (x_1, x_2) definiert man

Tripel	(x_1, x_2, x_3),
Quadrupel	(x_1, x_2, x_3, x_4),
Quintupel	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$,

und allgemeiner für jede natürliche Zahl $n \in \mathbf{N}_+$

n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Für Mengen M_1, $M_2, \dots, M_n$ heißt

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \prod_{i=1}^{n} M_i := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in M_i\}$$

das Produkt der Mengen M_1, $M_2, \dots, M_n$.

Ist $D = \prod_{i=1}^{n} M_i$ und $f : D \to W$ eine Abbildung, so bezeichnet man f auch als eine Funktion von n Variablen. Für $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ schreibt man auch $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1.2.C Relationen

Sei M eine Menge. Unter einer **Relation** auf M verstehen wir eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Wir schreiben

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in R$$

und sagen dann, daß x in der Relation R zu y steht.

Die folgenden Beispiele werden dies verdeutlichen:

- $R_1 := \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \,|\, \text{ es gibt } z \in \mathbf{N} \text{ mit } y = z + x\}$.
  Man schreibt $x \leq y$ für $(x, y) \in R_1$.
- $R_2 := \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \,|\, x \leq y \text{ und } x \neq y\}$.
  Man schreibt $x < y$ für $(x, y) \in R_2$.
- $\mathrm{id}_\mathrm{M} = \{(x, y) \in M \times M \,|\, x = y\}$
  ist die identische Relation auf M.
- $R_3 := \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \,|\, x - y \text{ ist eine gerade Zahl}\}$.
  Man schreibt $x \equiv y \pmod 2$ für $(x, y) \in R_3$ und liest dies als „x ist kongruent y modulo 2“.
  Analog definiert man für eine natürliche Zahl k die Relation $x \equiv y \pmod k$ als Teilbarkeit von $x - y$ durch k (in $\mathbf{Z}$).

1.3 Die natürlichen Zahlen

Die elementaren arithmetischen Eigenschaften der natürlichen Zahlen setzen wir als bekannt voraus. Die Anordnung läßt sich dadurch charakterisieren, daß für $m, n \in N$ gilt:

$$m \leq n \Leftrightarrow n = m + k \text{ für ein } \ k \in \mathbf{N} \ .$$

Wie üblich schreibt man

$$m < n \Leftrightarrow m \leq n \text{ und } \ m \neq n \ .$$

Wir benutzen natürliche Zahlen vor allem zum Numerieren der Elemente einer Menge M, wobei wir meistens eine Index-Schreibweise wie $a_1, \dots, a_n$ verwenden. Formal sollte man a hier als eine Abbildung $a : \{1, \dots, n\} \to M$ betrachten mit $i \mapsto a_i$. Sind m, n natürliche Zahlen mit $m \leq n$ und (z.B.) die a_i reelle Zahlen, so verwenden wir das **Summations-** und **Produkt-**Zeichen als Abkürzung

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \ , \ \prod_{i=m}^{n} a_i := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n \ .$$

Wenn $n < m$ ist, ist es üblich, $\sum_{i=m}^{n} a_i = 0$ und $\prod_{i=m}^{n} a_i = 1$ zu setzen[2].

1.3.A Induktion

Die wichtigste Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist das Induktionsprinzip.

Satz 1.3.1 (Induktionsprinzip):

1. **(Wohlordnungs-Eigenschaft von N)** *Ist $T \subset \mathbf{N}$ eine nicht-leere Teilmenge, so hat T ein kleinstes Element.*
2. **(Induktionsprinzip für Teilmengen von N)** *Sei $M \subset \mathbf{N}$ eine Teilmenge mit den folgenden Eigenschaften:*
   (a) $0 \in M$
   (b) $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$ *(für $n \in \mathbf{N}$).*

   Dann ist $M = \mathbf{N}$.
3. **(Induktionsprinzip für Aussagen über natürliche Zahlen)** *Sei $\mathcal{A}(n)$ eine Aussageform für natürliche Zahlen, so daß die folgenden Aussagen wahr sind*
   (a) $\mathcal{A}(0)$
   (b) $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ *(für $n \in N$)*

   Dann gilt $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

[2] Ist a_i für $i \in I$ definiert und $J \subset I$ eine Teilmenge, so sollte für $J = \emptyset$ vernünftigerweise $\sum_{i \in J} a_i = 0$ und $\prod_{i \in J} a_i = 1$ sein. Mit der Interpretation $\sum_{i=m}^{n} = \sum_{m \leq i \leq n}$ und $\prod_{i=m}^{n} = \prod_{m \leq i \leq n}$ ergibt sich die obige Vereinbarung.

Dieses Induktionsprinzip setzen wir als bekannt voraus. Wir geben nur einige kurze Erläuterungen:

Die Aussage 1. dieses Satzes ist anschaulich klar und soll als gegeben hingenommen werden: Zu jeder natürlichen Zahl n_0 (in T) gibt es überhaupt nur endlich viele natürliche Zahlen n mit $n \leq n_0$, also unter denjenigen davon, die in T liegen, sicherlich ein kleinstes.

Die Aussage 2. folgt sofort aus 1. mit einem indirekten Beweis, indem wir setzen

$$T := \{n \in \mathbf{N} \mid n \notin M\} \ .$$

Wäre $M \neq \mathbf{N}$, so $T \neq \emptyset$. Nach Aussage 1. hätte T ein kleinstes Element n_0. Wegen Eigenschaft 2a. ist aber $0 \notin T$, also $n_0 \neq 0$. Es muß dann $n_0 = n+1$ sein für ein $n \in \mathbf{N}$ mit $n \notin T$. Aber dann ist $n \in M$, also nach 2b. auch $n+1 = n_0 \in M$ und damit $n_0 \notin T$, im Widerspruch zur Wahl von n_0.

Schließlich ergibt sich Aussage 3. aus 2. mit

$$M := \{n \in \mathbf{N} \mid \text{ es gilt } \mathcal{A}(n)\} \ .$$

Die Eigenschaften 3a., 3b. implizieren die entsprechenden Eigenschaften 2a., 2b. für M, so daß $M = \mathbf{N}$ folgt.

Wir betrachten ein einfaches Anwendungsbeispiel. Für eine natürliche Zahl n sei $\mathcal{A}(n)$ die Aussage

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \ . \tag{1}$$

Wir beweisen die Gültigkeit dieser Aussage für alle $n \in N$ durch **vollständige Induktion:**

Induktionsanfang: Es gilt $\mathcal{A}(0)$.

Denn für $n = 0$ sind beide Seiten der Gleichung (1) gleich Null.

Induktionsschluß (Schluß von n auf $n+1$):

Induktionsannahme: $\mathcal{A}(n)$ gilt. Die Induktionsbehauptung ist $\mathcal{A}(n+1)$:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i \quad = \quad \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ . \tag{2}$$

Aber es wird

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1) \underset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \ = \ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ ,$$

womit die Induktionsbehauptung (2) nachgewiesen ist.

Damit ist die Gleichung (1) für alle $n \in \mathbf{N}$ bewiesen.

Manchmal verwendet man die folgende modifizierte Form des Induktionsprinzips. Sei n_0 eine natürliche Zahl und $\mathcal{B}(n)$ eine Aussageform für natürliche Zahlen n. Es gelte $\mathcal{B}(n_0)$ und

$$\bigwedge_{n\in\mathbf{N}, n\geq n_0} \mathcal{B}(n) \Rightarrow \mathcal{B}(n+1) \ .$$

Dann gilt $\mathcal{B}(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Um das einzusehen, betrachte man die Aussage

$$\mathcal{A}(m) :\Leftrightarrow \mathcal{B}(m+n_0) \ ;$$

offenbar gilt genau dann $\mathcal{B}(n)$ für alle $n \geq n_0$, wenn $\mathcal{A}(m)$ für alle $m \in \mathbf{N}$ gilt.

Als einfaches Beispiel betrachten wir

$$\mathcal{B}(n) :\Leftrightarrow n^2 > n+1 \ .$$

Offenbar sind $\mathcal{B}(0)$ und $\mathcal{B}(1)$ falsch, während $\mathcal{B}(2)$ wahr ist. Für $n \geq 2$ folgt aber $\mathcal{B}(n+1)$ aus $\mathcal{B}(n)$, denn

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2+2n+1 \underset{\text{Ind.Vor.}}{>} (n+1)+2n+1 \\ &= 3n+2 > n+2 = (n+1)+1 \ . \end{aligned}$$

Das Induktionsprinzip erlaubt auch die sogenannte **rekursive Defininition**:

Satz 1.3.2 (Rekursive Definition): *Sei A eine Menge und $w_0 \in A$. Ferner sei für jedes $n \in \mathbf{N}$ eine Abbildung Φ_n gegeben, die jedem $(n+1)$-Tupel von Elementen von A ein Element von A zuordnet:*

$$\Phi_n : (a_0, a_1, \ldots, a_n) \mapsto \Phi_n(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in A$$

Dann gibt es genau eine Abbildung

$$f : \mathbf{N} \to A$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} f(0) &= w_0 && (3) \\ \textit{für jedes } \ n \in \mathbf{N} \textit{ ist } \ f(n+1) &= \Phi_n(f(0), \ldots, f(n)) \ . && (4) \end{aligned}$$

Der formale Beweis hiervon (durch vollständige Induktion) ist etwas verwickelt und soll deshalb nur im Anhang 1.7 zu diesem Kapitel angedeutet werden.

Eine einfachere Version der rekursiven Definition ist

Korollar 1.3.3: *Sei A eine Menge, $w_0 \in A$ und $\varphi : \mathbf{N} \times A \to A$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abildung*

$$f : \mathbf{N} \to A$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} f(0) &= w_0 \\ f(n+1) &= \varphi(n, f(n)) \textit{ für alle } \ n \in \mathbf{N} \ . \end{aligned}$$

Wir geben einige Anwendungsbeispiele:

1. **(Multiplikation)** Sei $m \in \mathbf{N}$. Dann ist $m \cdot n$ für $n \in \mathbf{N}$ rekursiv definiert durch

$$m \cdot 0 = 0 \text{ und } \ m \cdot (n+1) = m \cdot n + m \ .$$

2. **(Potenz)** Sei $m \in \mathbf{N}$. Dann ist m^n für $n \in \mathbf{N}$ rekursiv definiert durch

$$m^0 = 1 \text{ und } \ m^{n+1} = m^n \cdot m \ .$$

3. **(Fakultät)** $n!$ ist für $n \in \mathbf{N}$ rekursiv definiert durch

$$0! = 1 \text{ und } \ (n+1)! = n! \cdot (n+1) \ .$$

Man beachte, daß auch $0^0 = 1$ ist!

1.3.B Zahlen zum Zählen

Definition 1.3.4:

1. *Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen gleichmächtig oder von gleicher Mächtigkeit, wenn es ein Bijektion $M_1 \xrightarrow{\cong} M_2$ gibt.*
2. *Eine Menge M heißt* **endlich***, wenn es eine natürliche Zahl n und eine Bijektion $f : \{1, \ldots, n\} \to M$ gibt. Eine solche Bijektion heißt eine* **Anordnung** *von M. Wir nennen dann $\#M := n$ die* **Anzahl der Elemente** *oder auch die* **Mächtigkeit** *von M.*
3. *Eine Menge M heißt* **unendlich***, wenn sie nicht endlich ist. Sie heißt* **abzählbar unendlich***, wenn es eine Bijektion $f : \mathbf{N} \to M$ gibt. Eine Menge M heißt* **abzählbar***, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.*

Offenbar ist $\emptyset$ die einzige Menge M mit $\#M = 0$. Für die Mächtigkeit der Menge $\mathbf{N}$ der natürlichen Zahlen verwendet man üblicherweise das Symbol[3] $\aleph_0$.
Für endliche Mengen M_1 und M_2 gilt offenbar

$$\#(M_1 \cup M_2) + \#(M_1 \cap M_2) = \#M_1 + \#M_2$$

und insbesondere

$$\#(M_1 \sqcup M_2) = \#M_1 + \#M_2 \ ,$$

wobei mit $M_1 \sqcup M_2$ eine disjunkte Vereinigung bezeichnet wird. Weiter ist offenbar

$$\#(M_1 \times M_2) = \#M_1 \times \#M_2 \ .$$

Satz 1.3.5: *Sei M eine endliche Menge und $\#M = n$.*

1. *Die Anzahl der Anordnungen von M ist $n!$*
2. *Es ist $\#\mathfrak{P}(M) = 2^n$.*

Definition 1.3.6: *Für $k \in \mathbf{N}$ und $x \in \mathbf{R}$ heißt*

$$\binom{x}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{x-i+1}{i} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$$

der **Binomialkoeffizient** *x über k.*

Bemerkung: Für $k \in \mathbf{Z}$ mit $k < 0$ setzt man noch $\binom{x}{k} = 0$. Damit gilt die folgende Eigenschaft der Binomialkoeffizienten sogar für alle $k \in \mathbf{Z}$:

[3] $\aleph$, gelesen „aleph“, ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets.

Lemma 1.3.7: *Für $x \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}$ ist*

$$\binom{x+1}{k+1} = \binom{x}{k+1} + \binom{x}{k} \ .$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \binom{x+1}{k+1} - \binom{x}{k+1} &= \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{(k+1)!}[(x+1)-(x-k)] \\ &= \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!} = \binom{x}{k} \ . \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man leicht eine Liste von Binomialkoeffizienten in einem **Pascal'schen Dreieck** anfertigen:

n						$\binom{n}{k}$						$(k = 0, \ldots, n)$
0						1						
1					1		1					
2				1		2		1				
3			1		3		3		1			
4		1		4		6		4		1		
5	1		5		10		10		5		1	

Satz 1.3.8: *Sei M eine endliche Menge und $\#M = n$. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M ist $\binom{n}{k}$.*

Korollar 1.3.9: *Sei $\#M = n$ und $\#K = k$. Es gibt $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ injektive Abbildungen $K \to M$.*

Satz 1.3.10: *Sei $k = k_1 + \ldots + k_n$. Die Anzahl der Möglichkeiten, k Personen auf n Räume zu verteilen, so daß sich im i-ten Raum k_i Personen befinden, ist der* **Multinomialkoeffizient**

$$\frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} =: \binom{k}{k_1, \ldots, k_n}$$

Die Namensgebung entstammt dem

Satz 1.3.11 (Multinomialsatz): *Es gilt*

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \\ k_1 + \ldots + k_n = k}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

Für $n = 2$ ist dies gerade die **binomische Formel** $(a+b)^k = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$, welche wir als bekannt voraussetzen wollen[4]. Der allgemeine Multinomialsatz folgt hieraus per Induktion, indem wir $x_n = a + b$ setzen und im Multinomialsatz für n Summanden

$$x_n^{k_n} = \sum_{i+j=k_n} \binom{k_n}{i} a^i b^j = \sum_{i+j=k_n} \frac{k_n!}{i!\,j!} a^i b^j$$

einsetzen.

Korollar 1.3.12: *Die Anzahl der Möglichkeiten, k Personen auf n Räume zu verteilen, ist n^k.*

Man kann dies aus dem vorangehenden Satz herleiten, indem man $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ setzt. Einfacher ist es jedoch, eine solche Verteilung als eine Abbildung $f : \{1, \ldots k\} \to \{1, \ldots, n\}$ anzusehen, die jeder Person i die Nummer $f(i)$ des zugeteilten Raums zuordnet. Da jedes $f(i)$ genau n mögliche Werte hat, ergibt sich die Behauptung.

Satz 1.3.13: *Die Anzahl der Möglichkeiten, k Kugeln gleicher Farbe auf n Behälter zu verteilen, ist $\binom{n+k-1}{n-1}$.*

Beweis: Sei $a(k, n)$ die Anzahl dieser Möglichkeiten. Offenbar ist $a(k, 1) = 1$ und $a(1, n) = n$. Bei $n + 1$ Behältern können zwei Fälle eintreten:

1. Der $(n+1)$te Behälter ist leer. Dann handelt es sich um eine Verteilung der k Kugeln auf die ersten n Behälter, wofür es $a(k, n)$ Möglichkeiten gibt.
2. Der $(n + 1)$te Behälter enthält mindestens eine Kugel. Dann wird die Verteilung beschrieben durch die Verteilung der restlichen $k - 1$ Kugeln auf alle $n + 1$ Behälter, wofür es $a(k - 1, n + 1)$ Möglichkeiten gibt.

Es folgt

$$a(k, n + 1) = a(k, n) + a(k - 1, n + 1)$$

und per Induktion mit Lemma 1.3.7 die Behauptung. □

Klar ist:

Satz 1.3.14: *Die Anzahl der Möglichkeiten, k Kugeln gleicher Farbe auf n Behälter zu verteilen, so daß in jedem Behälter höchstens eine Kugel liegt, ist $\binom{n}{k}$.*

---

[4] Beweis als Übungsaufgabe.

1.3.C Abzählbare Mengen

Hilfssatz 1.3.15: *Sei $M \subset \mathbf{N}$ eine Teilmenge. Dann ist M abzählbar.*

Beweis: Es reicht, den Fall zu betrachten, daß M nicht endlich ist.
Wir definieren nun für $n \in \mathbf{N}$ rekursiv Abbildungen

$$f_n : \{0, 1, 2, \dots , n\} \to M$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $f_0(0)$ ist das kleinste Element von M,
2. $f_{n+1}(i) = f_n(i)$ für $0 \leq i \leq n$,
3. $f_{n+1}(n + 1)$ ist das kleinste Element von $M - \mathrm{Bild}(f_n)$.

Es folgt leicht, daß durch $f(n) = f_n(n)$ eine Bijektion $f : \mathbf{N} \to M$ definiert wird. □

Korollar 1.3.16: *Sei $f : M \to W$ injektiv. Ist W abzählbar, so auch M.*

Korollar 1.3.17: *Sei $f : \mathbf{N} \to M$ eine surjektive Abbildung. Dann ist M abzählbar.*

Beweis: Es gibt eine injektive Abbildung $g : M \to \mathbf{N}$. □

Hilfssatz 1.3.18: *Seien M_1, M_2 abzählbar. Dann ist auch $M_1 \times M_2$ abzählbar.*

Beweis: Seien $f_1 : \mathbf{N} \to M_1$, $f_2 : \mathbf{N} \to M_2$ surjektiv. Dann ist auch $f_1 \times f_2 : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to M_1 \times M_2$ surjektiv. Es reicht daher, eine Bijektion $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ zu konstruieren.
Wir definieren φ rekursiv. Sei $\varphi(0) = (0, 0)$. Ist $\varphi(n) = (x, y)$, so sei

$$\varphi(n+1) := \begin{cases} (x-1, y+1) & , \text{ falls } x > 0, \\ (y+1, 0) & , \text{ falls } x = 0 \ . \end{cases}$$

Anhand einer Skizze[5] macht man sich leicht klar, daß φ tatsächlich eine Bijektion ist. □

Hilfssatz 1.3.19: *Für $i \in \mathbf{N}$ sei M_i eine abzählbare Menge. Dann ist $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} M_i$ abzählbar.*

[5] Es ist auch einfach, die rekursive Definition der Umkehrabbildung hinzuschreiben.

Beweis: Sei $I := \{i \in \mathbf{N} \mid M_i \neq \emptyset\}$. Für $i \in I$ sei $f_i : \mathbf{N} \to M_i$ surjektiv. Dann ist

$$g : I \times \mathbf{N} \to \bigcup_{i \in \mathbf{N}} M_i$$

mit

$$(i, j) \mapsto \quad f_i(j)$$

surjektiv. Aus 1.3.18 und 1.3.17 folgt die Behauptung. □

Als Anwendungsbeispiel erhalten wir, daß $\mathbf{Q}$ abzählbar ist, denn die Abbildung $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}_+ \to \mathbf{Q}$ mit $(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$ ist surjektiv.

Ist M eine unendliche Menge und $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform, so verwenden wir noch die folgenden Sprechweisen:

1. $\mathcal{A}(x)$ gilt für unendlich viele $x \in M$, wenn $\{x \in M \mid \mathcal{A}(x)\}$ eine unendliche Teilmenge von M ist,
2. $\mathcal{A}(x)$ gilt für fast alle $x \in M$, wenn $M - \{x \in M \mid \mathcal{A}(x)\}$ eine endliche Teilmenge von M ist.

1.4 Die reellen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen wird mit **R** bezeichnet. Sie enthält die Menge **Q** der rationalen Zahlen. Wir setzen Vertrautheit mit den wichtigsten Eigenschaften der reellen Zahlen voraus. Im folgenden sind sie noch einmal zusammengestellt.

1.4.A Algebraische Eigenschaften

Es gibt Abbildungen (Addition und Multiplikation)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\times\mathbf{R} \xrightarrow{+} \mathbf{R} & \text{und} & \mathbf{R}\times\mathbf{R} \xrightarrow{\bullet} \mathbf{R} \\ (x,y)\mapsto x+y & & (x,y)\mapsto x\cdot y \end{array}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

	Für $a,b,c\in\mathbf{R}$ gilt:		
$(\mathbf{K}_0)$	$0+a=a$,	$1\cdot a=a$,	(neutrales Element)
$(\mathbf{K}_1)$	$a+b=b+a$,	$a\cdot b=b\cdot a$,	(Kommutativität)
$(\mathbf{K}_2)$	$(a+b)+c=a+(b+c)$,	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$,	(Assoziativität)
$(\mathbf{K}_3)$	Die Gleichung		
	$a+x=b$ ist lösbar ,	$a\cdot y=b$ ist lösbar, falls $a\neq 0$,	
$(\mathbf{K}_4)$	$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$,		(Distributivität)
$(\mathbf{K}_5)$	$0\neq 1$.		

Einen Rechenbereich, in dem diese Eigenschaften erfüllt sind, nennt man auch einen **Körper**.

Man verifiziert leicht, daß die gewohnten Rechenregeln gelten, und insbesondere, daß die Lösungen x, y in $(\mathbf{K}_3)$ eindeutig sind:

Ist a' Lösung von $a+a'=0$, so folgt aus $a+x=b$, daß $x=x+0=x+a+a'=b+a'$ ist. Aus der Distributivität ergibt sich $0\cdot a+0\cdot a=0\cdot a$, also wegen der eben bewiesenen Eindeutigkeit $0\cdot a=0$. Damit schließt man leicht, daß das obige $a'=(-1)\cdot a$ ist. Wie üblich schreibt man nun $x=b-a$.

Analog geht man bei der Gleichung $a\cdot y=b$ vor. Wie üblich schreibt man $y=b\cdot a^{-1}$.

Eine Teilmenge K von **R**, die unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist und die Elemente 0, 1 enthält, nennt man einen **Teilkörper**, wenn Bedingung $(\mathbf{K}_3)$ auch in K erfüllt ist. Man macht sich leicht klar, daß die anderen Bedingungen automatisch auch in K gelten. Zum Beispiel ist der Körper $K=\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen ein Teilkörper von **R**.

1.4.B Ordnungs-Eigenschaften

$>$ ist eine Relation auf $\mathbf{R}$. Es gilt:

($\mathbf{A}_0$) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

($\mathbf{A}_1$) Für $a \in \mathbf{R}$ gilt genau eine der drei Aussagen: $a > 0$, $a = 0$, $0 > a$.

($\mathbf{A}_2$) Aus $a > 0$, $b > 0$ folgt $a + b > 0$ und $ab > 0$.

($\mathbf{A}_3$) Zu $a \in \mathbf{R}$ gibt es ein $n \in \mathbf{N}$ mit $n > a$ (Archimedisches Axiom).

Alle gewohnten Eigenschaften der Relation $>$ folgen aus diesen Grundregeln. Wie üblich schreibt man für $b > a$ auch $a < b$. Das Archimedische Axiom formuliert man auch oft wie folgt:

($\mathbf{A}_3'$) Zu $x \in \mathbf{R}_+$ gibt es ein $n \in \mathbf{N}_+$ mit $0 < \dfrac{1}{n} < x$.

Zusammen mit den algebraischen Eigenschaften hat man nun auf $\mathbf{R}$ die Struktur eines **archimedisch geordneten Körpers**.

Häufig verwendet wird die folgende Ungleichung, die man leicht durch Induktion beweist:

Proposition 1.4.1 (Bernoullische Ungleichung): *Für $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ mit $x > -1$, $n > 1$ und $x \neq 0$ gilt*

$$(1 + x)^n > 1 + n\,x \ .$$

Für $a \in \mathbf{R}$ sei

$$|a| = \begin{cases} a & , \quad a \geq 0, \\ -a & , \quad a < 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{sign}(a) = \begin{cases} 1 & , \quad a > 0, \\ 0 & , \quad a = 0, \\ -1 & , \quad a < 0. \end{cases}$$

$|a|$ heißt der **Betrag** von a und $\mathrm{sign}(a)$ das **Vorzeichen** (oder auch das **Signum**) von a.

Durch Fallunterscheidungen beweist man leicht

Hilfssatz 1.4.2 (Dreicksungleichung): *Für a, $b \in \mathbf{R}$ ist*

1. $|a + b| \leq |a| + |b|$,
2. $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$.

Wir benötigen noch die folgende Notation für **Intervalle** in $\mathbf{R}$:

Definition 1.4.3: *Für a, $b \in \mathbf{R}$ mit $a \leq b$ sei*

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & := & \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ ]a,b] & := & \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}, \\ [a,b[& := & \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}, \\ ]a,b[& := & \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}. \end{array}$$

Als Übungsaufgabe verifiziere man, daß die Abbildung

$$\mathbf{R} \to]-1,1[$$

mit

$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

eine Bijektion ist.

1.4.C Vollständigkeit

Definition 1.4.4: *Sei $M \subset \mathbf{R}$ eine Teilmenge.*

1. *$s \in \mathbf{R}$ heißt* **obere Schranke** *von M, wenn gilt:*
   $x \in M \Rightarrow x \leq s$ (wenn solch ein s existiert, heißt M **nach oben beschränkt***).*
2. *Eine obere Schranke s heißt* **Supremum** *von M, wenn gilt:*
   Ist s' obere Schranke von M, so ist $s' \geq s$ (man schreibt dann $s = \sup(M)$).
3. *Eine obere Schranke von M heißt* **Maximum** *von M, wenn gilt:*
   $s = \sup(M)$ und $s \in M$ (man schreibt dann $s = \max(M)$).

Für eine nach oben beschränkte Menge M ist also das Supremum die **kleinste obere Schranke**.

Analog definiert man die Begriffe **untere Schranke**, das **Infimum** $\inf(M)$ als größte untere Schranke, und das **Minimum** $\min(M)$ als ein in M enhaltenes Infimum.

Für $\mathbf{R}$ gilt das **Vollständigkeits-Axiom**:
(**V**) Ist $M \subset \mathbf{R}$ nach oben beschränkt und nicht leer, so hat M ein Supremum.

Man kann zeigen, daß $\mathbf{R}$ der einzige vollständige archimedisch geordnete Körper ist.

Wir benutzen die Vollständigkeit um zu zeigen, daß jede positive reelle Zahl eine n-te Wurzel hat:

Lemma 1.4.5 (und Definition): *Sei $a \in \mathbf{R}_+$ und $n > 1$ eine natürliche Zahl. Dann ist $M := \{x \in \mathbf{R} \mid x^n \leq a\}$ nach oben beschränkt. Ist $s := \sup(M)$, so gilt*

$$s^n = a \ .$$

Diese Zahl s heißt die n-te **Wurzel** *aus a und wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet.*

Beweis: Da $\frac{1}{N} \in M$ ist für genügend großes $N \in \mathbf{N}$, genügt es zu zeigen, daß $M \cap \mathbf{R}_+$ nach oben beschränkt ist. Sei also $x > 0$ und $x^n \leq a$. Mit $y := x - 1$ wird

$$a \geq x^n = (1+y)^n \geq 1 + ny \ ,$$

also $x = 1 + y \leq 1 + \frac{a-1}{n}$.

Sei $B := \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ und $S := \max\{s^i \mid 0 \leq i \leq n\}$. Für $0 < \varepsilon < 1$ erhalten wir dann aus der binomischen Formel und der Dreiecksungleichung die Abschätzungen

$$(s+\varepsilon)^n \leq s^n + BS\varepsilon \text{ und } (s-\varepsilon)^n \geq s^n - BS\varepsilon \ .$$

Wäre $s^n < a$, so ließe sich ein kleines $\varepsilon > 0$ finden mit $\varepsilon < \dfrac{a - s^n}{BS}$, also $(s+\varepsilon)^n < a$; wäre dagegen $s^n > a$, so ließe sich ein kleines $\varepsilon > 0$ finden mit $\varepsilon < \dfrac{s^n - a}{BS}$, also $(s-\varepsilon)^n > a$. Beides liefert einen Widerspruch zu $s = \sup(M)$. □

Ist $n = 2m$ eine gerade Zahl, so hat die Gleichung $x^n = a$ zwei Lösungen $\pm \sqrt[n]{a}$ in $\mathbf{R}$. Der Deutlichkeit halber bezeichnet man diese oft mit $_+\sqrt[n]{a}$ bzw. $_-\sqrt[n]{a}$ als positive bzw. negative n-te Wurzel aus a. Für ungerades $n = 2m + 1$ definiert man noch $\sqrt[n]{-a} := -\sqrt[n]{a}$.

Definition 1.4.6: *Für $a \in \mathbf{R}_+$, p, $q \in \mathbf{N}$ mit $q > 0$ sei $x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ und*

$$a^x := (\sqrt[q]{a})^p \quad \textit{sowie} \quad a^{-x} := (\frac{1}{a})^x \ .$$

Man verifiziert leicht, daß damit die üblichen Rechenregeln für diese **Potenz-Funktion** gelten:

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x \ , \\ a^{x+y} &= a^x \cdot a^y \ , \\ a^{x \cdot y} &= (a^x)^y \ . \end{aligned}$$

1.4.D Darstellung reeller Zahlen

Definition 1.4.7: *Eine Intervallschachtelung ist eine Folge* (I_n) *von Intervallen*

$$I_n = [a_n, b_n]$$

(mit $n \in \mathbf{N}$*,* $a_n \leq b_n$*), so daß gilt:*

1. $I_{n+1} \subset I_n$ *für alle* $n \in \mathbf{N}$*,*
2. *Zu jedem* $\epsilon > 0$ *gibt es ein* $n \in \mathbf{N}$ *mit* $\ell(I_n) = |b_n - a_n| < \epsilon$*.*

Satz 1.4.8: *Ist* (I_n) *eine Intervallschachtelung, so gibt es genau eine reelle Zahl* x *mit* $x \in I_n$ *für alle* $n \in \mathbf{N}$*.*

Beweis: Eindeutigkeit:
Ist $x \neq y$, so gibt es ein n mit $\ell(I_n) < |x - y|$. Also können x, y nicht beide in I_n liegen.

Existenz:
Sei wie oben $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \leq b_n$. Wegen $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ ist $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ nach oben beschränkt: Jedes b_m ist obere Schranke.

Sei $x = \sup\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Für jedes $m \in \mathbf{N}$ gilt dann $x \leq b_m$. Aber es gilt auch $x \geq a_m$, denn sonst wäre x keine obere Schranke für $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Also ist $x \in [a_m, b_n]$ für jedes m.

$\square$

Im folgenden wollen wir die Ziffern-Darstellung reeller Zahlen erläutern. Dabei wollen wir der Einfachheit halber nur die Nachkommastellen behandeln. Wir beschränken uns daher auf reelle Zahlen x mit $0 \leq x < 1$. Die Ziffernschreibweise für ganze Zahlen (also mit Vorkommastellen) sei als bekannt vorausgesetzt.

Definition 1.4.9: *Sei* $g \in \mathbf{N}$*,* $g \geq 2$*.*

1. $\mathfrak{Z}_g := \{0, 1, \dots, g-1\}$ *heißt die Menge der* g*-adischen Ziffern.*
2. *Eine* g*-adische Ziffernfolge ist eine Abbildung*

   $$z : \mathbf{N}_+ \to \mathfrak{Z}_g$$

   mit

   $$i \mapsto z_i \ .$$

   Solch ein z *heißt zulässig, wenn*

   $$z_i \neq g - 1$$

   ist für unendlich viele $i \in \mathbf{N}_+$*.*

3. Für eine g-adische Ziffernfolge z sei

$$\rho_{g,n}(z) := \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot g^{-i} \ .$$

Beispiel: Sei $g = 10$ und $z = (3, 2, 9, 4, 5, 7, \dots)$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} \rho_{10,1}(z) & = & 0,3 \\ \rho_{10,2}(z) & = & 0,32 \\ \rho_{10,3}(z) & = & 0,329 \\ \rho_{10,4}(z) & = & 0,3294 \end{array}$$

Hilfssatz 1.4.10: *Sei z eine g-adische Ziffernfolge und*

$$a_n := \rho_{g,n}(z) \text{ sowie } b_n := \rho_{g,n}(z) + g^{-n} \ .$$

Dann ist $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung.

Beweis: Das ist klar: Es ist

$$\rho_{g,n}(z) \le \rho_{g,n+1}(z) \le \rho_{g,n+1}(z) + g^{-(n+1)} = \rho_{g,n}(z) + (z_{n+1} + 1)g^{-(n+1)} \le \rho_{g,n}(z) + g^{-n} \ .$$

$\square$

Definition 1.4.11: $\rho_g(z) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} z^i \cdot g^{-i}$ *sei die eindeutig bestimmte reelle Zahl, die in allen Intervallen I_n des Hilfssatzes liegt.*

Satz 1.4.12: *Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine eindeutig bestimmte zulässige g-adische Ziffernfolge z und eine eindeutig bestimmte Zahl $k \in \mathbf{N}$, so daß gilt:*

$$x = \pm(k + \rho_g(z)) \ .$$

1.4.E Die Mächtigkeit von R

Satz 1.4.13: $\mathbf{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis: Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen an, $\mathbf{R}$ sei abzählbar, also $\mathbf{R} = \{x_i \mid i \in \mathbf{N}\}$. Wähle ein Intervall I_0 der Länge $\ell(I_0) = 1$ mit $x_0 \notin I_0$. Induktiv finden wir nun Intervalle I_n der Länge $\ell(I_n) = \frac{1}{3^n}$ mit $x_n \notin I_n$, so daß die I_n eine Intervallschachtelung bilden:

Um I_{n+1} zu konstruieren, teilen wir I_n in drei Intervalle I_n', I_n'', I_n''' der Länge $\frac{1}{3^{n+1}}$. Mindestens eines von diesen enthält den Punkt x_{n+1} nicht, und dieses nehmen wir als Intervall I_{n+1}. Es ist dann offenbar

$$I_n \supset I_{n+1} \text{ mit } \; x_0, \ldots, x_{n+1} \notin I_{n+1} \text{ und } \; \ell(I_{n+1}) = \frac{1}{3^{n+1}}$$

Sei $y \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} I_n$. Wegen $y \in I_n$ ist dann $y \neq x_n$ für jedes $n \in \mathbf{N}$. □

Man kann die Behauptung des vorigen Satzes noch präzisieren:

Satz 1.4.14: *Es gibt eine Bijektion zwischen* $\mathbf{R}$ *und der Menge* P *der unendlichen echten Teilmengen von* $\mathbf{N}_+$.

Beweis: Es sei $I =]0,1[$. Wegen $\mathbf{R} \cong I$ genügt es, eine Bijektion zwischen I und P anzugeben. Für ein $x \in I$ sei $z = z(x)$ die zugehörige 2-adische zulässige Ziffernfolge und

$$A(x) := \{i \in \mathbf{N}_+ \mid z(x)_i = 0\} \ .$$

Dann ist klar, daß $A : I \to P$ bijektiv ist. □

Bemerkung: Es ist in Kardinalzahl-Notation

$$\#\mathbf{R} = 2^{\aleph_0} \geq \aleph_1 > \aleph_0 \ .$$

1.5 Komplexe Zahlen

1.5.A Rechnen mit komplexen Zahlen

Satz 1.5.1: *Es gibt einen Körper* $\mathbf{C} = (\mathbf{C}, +, \cdot, 0, 1)$*, so daß gilt*

1. $\mathbf{C}$ *enthält* $\mathbf{R}$ *als Unterkörper,*
2. *Es gibt ein* $i \in \mathbf{C}$ *mit* $i^2 = -1$ *(imaginäre Einheit),*
3. *Jedes* $z \in \mathbf{C}$ *läßt sich eindeutig darstellen als* $z = a + b \cdot i$ *mit* $a, b \in \mathbf{R}$.

Beweis: Es sei $\mathbf{C}$ die Menge aller formalen Ausdrücke $a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbf{R}$.
Für 1. muß gelten:

$$(a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) := (a + c) + (b + d) \cdot i \tag{5}$$
$$(a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) := (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i \tag{6}$$

Behauptung: Mit den Gleichungen (5) und (6) als Definition der Addition und Multiplikation wird $\mathbf{C}$ zu einem Körper, wobei $0 := 0 + 0 \cdot i$ und $1 := 1 + 0 \cdot i$ die neutralen Elemente sind.

Hierzu rechne man die Körperaxiome nach! Die wichtigste Eigenschaft ist: Ist $z = a+b\cdot i \neq 0$, so existiert ein Inverses z^{-1}. Denn für $a + b \cdot i \neq 0$ ist:

$$(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2 \in \mathbf{R}$$

von Null verschieden, also

$$(a + b \cdot i) \cdot (\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i) = 1 \ .$$

□

Definition 1.5.2: *Sei* $z = a + b \cdot i \in \mathbf{C}$ *(mit* $a, b \in \mathbf{R}$*)*

1. $\mathrm{Re}(z) := a$ *heißt* **Realteil** *von* z ,
   $\mathrm{Im}(z) := b$ *heißt* **Imaginärteil** *von* z ,
2. $\overline{z} = a - b \cdot i$ *heißt* **konjugiert komplexe Zahl** *zu* z ,
3. $|z| = {}_{+}\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbf{R}$ *heißt* **Betrag** *von* z .

Hilfssatz 1.5.3: *Es gelten die folgenden Rechenregeln (für* $z, w \in \mathbf{C}$*)*

$$\begin{array}{lcl}
\overline{(z + w)} = \overline{z} + \overline{w} & , & \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \\
z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) & , & z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}(z) \\
z \cdot \overline{z} = |z|^2 & , & z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z} \\
|z| > 0 \textit{ für } z \neq 0 & , & |\overline{z}| = |z| \\
|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| & , & |\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \\
|z \cdot w| = |z| \cdot |w| & , & |z + w| \leq |z| + |w| \textit{ (Dreiecksungleichung)}
\end{array}$$

Wir können $z \in \mathbf{C}$ darstellen als

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \ .$$

Dabei ist φ nur bis auf Vielfache von $360° = 2\pi$ bestimmt (und völlig unbestimmt für $z = 0$). $r = |z|$ und φ sind die **Polarkoordinaten** von z.

Ist noch $w = |w| \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))$, so wird

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) \ .$$

Die Multiplikation mit w resultiert also in einer Streckung mit dem Faktor $|w|$ und einer Drehung um den Winkel ψ.

1.5.B Fundamentalsatz der Algebra

Sei K ein Körper (etwa $K = \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$) und t eine **Unbestimmte**.

Definition 1.5.4: *Ein* **Polynom** *in t mit Koeffizienten in K ist ein Ausdruck der Gestalt*

$$f = f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

mit $n \in \mathbf{N}$ und $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in K$. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der **Grad** *von f und a_n der führende (höchste) Koeffizient von f.*

Der Fall $a_n = 0$ ist aber auch erlaubt, und es soll natürlich

$$0 \cdot t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

sein. Meistens notieren wir Polynome in der Kurzschreibweise

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \ ,$$

wobei $a_i = 0$ gesetzt ist für $i > \mathrm{Grad}(f)$. Für $g = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j t^j$ sei dann

$$\begin{aligned} f + g &= \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) t^k \ , \\ f \cdot g &= \sum_{k=0}^{m+n} \Big(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \Big) t^k \ . \end{aligned}$$

Es sei $K[t]$ die Menge aller Polynome in t mit Koeffizienten in K. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Grad}(f+g) &\leq \max(\mathrm{Grad}(f), \mathrm{Grad}(g)) \ , \\ \mathrm{Grad}(f \cdot g) &= \mathrm{Grad}(f) + \mathrm{Grad}(g) \ . \end{aligned}$$

Das Null-Polynom $0 \cdot t^0 = 0$ hat (vereinbarungsgemäß) den Grad $-\infty$.

Satz 1.5.5 (Division mit Rest): *Seien $f,\ g \in K[t]$ mit $\mathrm{Grad}(g) > 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $q,\ r \in K[t]$ mit*

$$f = q \cdot g + r \ \textit{und} \ \mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(g) \ .$$

Beweis: Sei $\mathrm{Grad}(f) = n$ und $\mathrm{Grad}(g) = m$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über n.

Der Induktionsanfang $n < m$ ist klar: Es muß $q = 0$, $r = f$ sein.

Schritt von $n-1$ auf $n \geq m$: Sei $f = a_n t^n + \ldots + a_0$ und $g = b_m t^m + \ldots + b_0$. Setze

$$\widetilde{f} = f - \frac{a_n}{b_m}\, t^{n-m}\, g \ .$$

Dann ist $\mathrm{Grad}(\widetilde{f}) < n$. Also hat nach Induktions-Vorraussetzung $\widetilde{f}$ eine eindeutige Darstellung $\widetilde{f} = \widetilde{q} \cdot g + \widetilde{r}$ mit $\mathrm{Grad}(\widetilde{r}) < m$. Es folgt:

$$f = (\widetilde{f} + \frac{a_n}{b_m}\, t^{n-m})\, g + \widetilde{r} \ .$$

$\square$

Korollar 1.5.6: *$\alpha \in K$ ist genau dann eine Nullstelle von $f \in K[t]$ (d.h. $f(\alpha) = 0$), wenn f in $K[t]$ durch $t - \alpha$ teilbar ist.*

Beweis: Es ist $f(t) = q(t) \cdot (t - \alpha) + r$ mit $r \in K$. Setze α ein; es folgt $f(\alpha) = r$. $\square$

Den folgenden Satz werden wir später in der Vorlesung beweisen:

Satz 1.5.7 (Fundamentalsatz der Algebra): *Sei $f \in \mathbf{C}[t]$ mit $\mathrm{Grad}(f) = n > 0$; sei a_n der führende Koeffizient von f. Dann gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ mit*

$$f = a_n (t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \ldots (t - \alpha_n) \ .$$

1.6 Arithmetisches und geometrisches Mittel

Definition 1.6.1 *Sei $n \in \mathbf{N}_+$ und seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen.*

1. $\mathrm{AM}(a_1, \ldots, a_n) := \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ *heißt das arithmetische Mittel der $a_1, \ldots, a_n$.*
2. *Seien alle $a_i > 0$. Dann heißt $\mathrm{GM}(a_1, \ldots, a_n) := (\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}}$ das geometrische Mittel der $a_1, \ldots, a_n$.*

Wir zeigen nun, daß für positive a_i stets

$$\mathrm{GM}(a_1, \ldots, a_n) \leq \mathrm{AM}(a_1, \ldots, a_n)$$

ist.

Satz 1.6.2 (AGM-Ungleichung): *Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann ist*

$$\prod a_i \leq (\frac{1}{n} \sum a_i)^n \tag{AGM$_n$}$$

und hierin gilt Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = \ldots = a_n$ ist.

Beweis: Wir beweisen den Satz durch Induktion über n. Da der Fall $n = 1$ trivial ist, nehmen wir als Induktions-Anfang den Fall $n = 2$: Es wird

$$(\frac{1}{2}(a_1 + a_2))^2 - a_1 a_2 = \frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = a_2$ ist.

Für den Induktions-Schluß von $n - 1$ auf $n \geq 3$ können wir den trivialen Fall $a_1 = \ldots = a_n$ außer Betracht lassen. Sei o.B.d.A.

$$a_1 = \min\{a_1, \ldots, a_n\} \text{ und } a_n = \max\{a_1, \ldots, a_n\} \ .$$

Mit $s := \mathrm{AM}(a_1, \ldots, a_n)$ ist dann

$$a_1 < s < a_n \ .$$

Mit $c := a_1 + a_n - s$ wird

$$\begin{aligned} cs - a_1 a_n &= a_1 s + a_n s - s^2 - a_1 a_n \\ &= a_1(s - a_n) + s(a_n - s) \\ &= (a_n - s)(s - a_1) > 0 \ . \end{aligned}$$

Es folgt $a_1 a_n < cs$. Nun setzen wir

$$b_1 := c \text{ und } b_i := a_i \text{ für } i = 2, \ldots, n \ .$$

Dann wird

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot \ldots \cdot a_n &= a_1 a_n \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \\
&< cs \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \\
&= s \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \\
&\underset{Ind.Vor.}{\leq} s \cdot (\frac{1}{n-1}(b_1 + \ldots + b_{n-1}))^{n-1} \\
&= s \cdot (\frac{1}{n-1}(a_1 + \ldots + a_n - s))^{n-1} \\
&= s \cdot (\frac{1}{n-1}(ns - s))^{n-1} \\
&= s \cdot s^{n-1} = s^n \ .
\end{aligned}
$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

1.7 * Rekursive Definition

Wir wiederholen zunächst den Satz 1.3.2 von der rekursiven Definition:

Sei A eine Menge und $w_0 \in A$. Ferner sei für jedes $n \in \mathbf{N}$ eine Abbildung Φ_n gegeben, die jedem $(n+1)$-Tupel von Elementen von A ein Element von A zuordnet:

$$\Phi_n : (a_0, a_1, \dots , a_n) \mapsto \Phi_n(a_0, a_1, \dots , a_n) \in A$$

Dann gibt es genau eine Abbildung

$$f : \mathbf{N} \to A$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} f(0) &= w_0 && (7)\\ \text{für jedes } \; n \in \mathbf{N} \text{ ist } \; f(n+1) &= \Phi_n(f(0), \dots , f(n)) \; . && (8) \end{aligned}$$

Der Beweis hiervon (durch vollständige Induktion) verläuft wie folgt:

Für $m \in \mathbf{N}$ sei

$$\mathfrak{F}_m := \{f : \{0, 1, \dots , m\} \to A \mid f \text{ erfüllt } \; (7) \text{ und } \; (8) \; \text{ für } \; n < m\} \; .$$

Es sei $\mathcal{A}(m)$ die Aussage

$$\mathcal{A}(m) \; :\Leftrightarrow \; \mathfrak{F}(m) \neq \emptyset \; .$$

Wir beweisen $\mathcal{A}(m)$ durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Sei $f : \{0\} \to A$ durch $f(0) = w_0$ definiert. Dann ist $f \in \mathfrak{F}_0$, also $\mathfrak{F}_0 \neq \emptyset$.

Induktionsschluß (von m auf $m+1$): Die Induktionsvoraussetzung ist, daß es ein

$$g : \{0, \dots , m\} \to A$$

gibt, so daß $g \in \mathfrak{F}_m$ ist. Definiere

$$f : \{0, \dots , m+1\} \to A$$

durch $f(i) := g(i)$ für $i \leq m$ und

$$f(m+1) := \Phi_m(g(0), \dots , g(m))$$

Dann ist $f \in \mathfrak{F}_{m+1}$, also $\mathfrak{F}_{m+1} \neq \emptyset$.

Nun sei $\mathcal{B}(m)$ die Aussage

$$\mathcal{B}(m) \; :\Leftrightarrow \; \mathfrak{F}(m) \text{ hat genau ein Element.}$$

Wieder beweisen wir $\mathcal{B}(m)$ durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Ist $f \in \mathfrak{F}_0$, so folgt $f(0) = w_0$, womit $f : \{0\} \to A$ eindeutig bestimmt ist.

Induktionsschluß: Seien $f, g \in \mathfrak{F}_{m+1}$. Seien $f' := f|\{0, \dots , m\}$ und $g' := g|\{0, \dots , m\}$ die Einschränkungen von f und g auf den Definitionsbereich $\{0, \dots m\}$. Offenbar sind dann $f', g' \in \mathfrak{F}_m$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $f' = g'$, d. h. f und g stimmen auf $\{0, \dots, m\}$ überein. Dann wird aber

$$\begin{aligned} f(m+1) &\underset{(ii)}{=} \Phi_m(f(0), \dots, f(m)) \\ &= \Phi_m(g(0), \dots, g(m)) \\ &\underset{(ii)}{=} g(m+1)\ , \end{aligned}$$

womit $f = g$ bewiesen ist.

Schließlich definieren wir

$$f : \mathbf{N} \to A$$

durch

$$f(n) := g(n) \text{ für ein } \ g \in \mathfrak{F}_n\ .$$

Da $\mathcal{B}(n)$ gilt, ist die rechte Seite wohldefiniert. Es ist klar, daß f die verlangten Eigenschaften hat.

Literaturliste zur Analysis I

Vorbereitende Literatur:

H. D. Ebbinghaus u.a.: Zahlen, Springer Grundwissen Mathematik 1, Springer

H. B. Griffiths, P. J. Hilton: Klassische Mathematik in zeitgemäßer Darstellung, 1, 2, Vandenhoeck & Ruprecht

G. Richter (Herausgeber): Mathematisches Vorsemester, Springer

H. Scheid: Abiturwissen Analysis, Klett

Empfohlene Analysis-Bücher:

O. Forster: Analysis I, Vieweg

R. Walter: Einführung in die Analysis I, de Gruyter

G. Köhler: Analysis, Heldermann

T. Bröcker: Analysis I, BI Wissenschaftsverlag, 2. Aufl. im Verlag Spektrum

K. Königsberger: Analysis I, Springer

W. Walter: Analysis I, Springer Grundwissen

J. Cigler: Einführung in die Differential- und Integralrechnung, Vorlesungen über Mathematik, Manz

Weitere Analysis-Bücher:

Fischer, Gamst, Horneffer: Skript zur Analysis, Band 1, FB Math, Bremen

M. Barner, F. Flohr: Analysis I, de Gruyter

U. Storch, H. Wiebe: Lehrbuch der Mathematik I, BI Wissenschaftsverlag

H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Teubner

S. Lang: Analysis I, Addison Wesley (Englisch)

M. Spivak: Calculus, Benjamin (Englisch)

Ergänzungen:

P. Furlan: Das gelbe Rechenbuch 1, Furlan

W. Strampp: Höhere Mathematik mit Mathematica, Vieweg

R. Braun, R. Meise: Analysis mit Maple, Vieweg

H. Fischer, H. Kaul: Mathematik für Physiker 1, Teubner