Vorlesung Analysis I — WS 03/04
Integralrechnung einer reellen Veränderlichen

Erich Ossa

Vorläufige Version April 2004

Inhaltsverzeichnis

Dieses Skript ist noch nicht in seiner endgültigen Gestalt. Bitte behandeln Sie es vertraulich und geben Sie es nicht weiter.

Für Fehlermeldungen, Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge wäre ich dankbar.

E. Ossa

%newpage

1 Definition des Integrals

Wir betrachten reelle Funktionen

$$f : [\,a, b\,] \to \mathbf{R} \;,$$

wobei $a, b \in \mathbf{R}$ sein sollen mit $a < b$. Wir werden später in Abschnitt 9 eine Erweiterung diskutieren für Funktionen, die auf unendlichen Intervallen definiert sind, so daß dann $a = -\infty$ oder $b = \infty$ erlaubt ist.

Ziel ist es, das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

in möglichst großer Allgemeinheit zu definieren. Für eine stetige Funktion f mißt es den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse (im Bereich $a \leq x \leq b$); Flächen unterhalb der x-Achse werden dabei negativ gerechnet.

1.1 Definition: *Sei n eine natürliche Zahl ≥ 1.*

1. *Eine n-Zerlegung $\mathrm{Z}_\bullet = (\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n)$ von $[\,a, b\,]$ besteht aus n Intervallen $\mathrm{Z}_\nu = [\,\mathrm{z}_{\nu-1}, \mathrm{z}_\nu\,]$, wobei gelten soll*

   $$a = \mathrm{z}_0 < \mathrm{z}_1 < \mathrm{z}_2 < \ldots < \mathrm{z}_n = b \;.$$

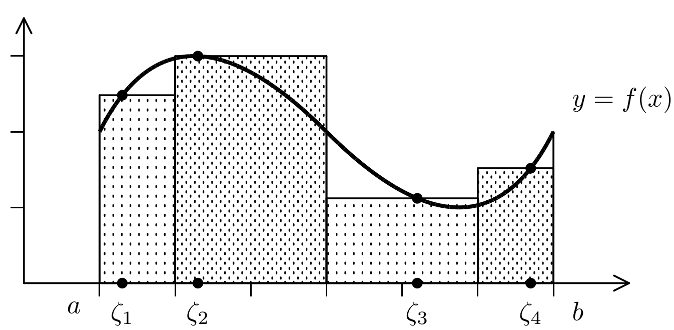
   Wir schreiben $\ell(\mathrm{Z}_\nu) = \mathrm{z}_\nu - \mathrm{z}_{\nu-1}$ für die Länge des ν-ten Intervalls.

2. *Eine markierte n-Zerlegung ist ein Tupel $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n; \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, wobei $\mathrm{Z}_\bullet = (\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n)$ eine n-Zerlegung ist und $\zeta_\nu \in \mathrm{Z}_\nu$ ein „Markierungspunkt“. Wir schreiben dann auch $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet; \zeta_\bullet)$.*

3. *Für eine markierte n-Zerlegung $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet; \zeta_\bullet)$ heißt*

   $$\mathfrak{S}(f; \mathfrak{Z}) := \sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)\,\ell(\mathrm{Z}_\nu)$$

   die zu $\mathfrak{Z}$ gehörende Riemannsche Summe der Funktion $f : [\,a, b\,] \to \mathbf{R}$.



In der obigen Definition ist durchaus erlaubt, daß ζ_ν ein Randpunkt des Intervalls Z_ν ist. Es ist aber stets $\zeta_\nu \leq \zeta_{\nu+1}$; ist $\zeta_\nu = \zeta_{\nu+1}$, so handelt es sich bei diesem Markierungspunkt um den rechten Endpunkt von Z_ν und linken Endpunkt von $\mathrm{Z}_{\nu+1}$.

Unter einer (markierten) Zerlegung von $[\,a, b\,]$ verstehen wir eine (markierte) n-Zerlegung mit unspezifiziertem n.

1.2 Definition: *Sei $\delta : [\,a, b\,] \to \mathbf{R}$ eine Funktion, die nur positive Werte annimmt.*

Eine markierte n-Zerlegung $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet; \zeta_\bullet)$ heißt δ-fein, wenn für $\nu = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\mathrm{Z}_\nu \subset \;]\, \zeta_\nu - \delta(\zeta_\nu), \zeta_\nu + \delta(\zeta_\nu)\, [\; .$$

δ heißt eine Feinheitsschranke auf $[\,a, b\,]$, wenn es eine δ-feine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[\,a, b\,]$ gibt.

Gilt $\delta_1 \geq \delta$, so ist klar, daß jede δ-feine markierte Zerlegung auch δ_1-fein ist.

Wir werden in Lemma (2.2) zeigen, daß jede positive Funktion eine Feinheitsschranke ist.

1.3 Definition: *Sei $f : [\,a, b\,] \to \mathbf{R}$ und $I \in \mathbf{R}$.*

Die Funktion f heißt integrierbar (über $[\,a, b\,]$) mit Integral I,

$$\int_a^b f(x)\, dx = I \;,$$

wenn gilt:

(I) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Feinheitsschranke δ, so daß für jede δ-feine markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[\,a, b\,]$ gilt*

$$|\mathfrak{S}(f; \mathfrak{Z}) - I| < \varepsilon \;.$$

In diesem Fall nennen wir δ eine ε-Feinheitsschranke für f.

Es ist klar, daß die Zahl I in der obigen Definition eindeutig bestimmt ist. $\int_a^b f(x)\, dx$ ist sozusagen der Grenzwert der Riemannschen Summen $\mathfrak{S}(f; \mathfrak{Z})$, welcher aber in einer recht komplizierten Weise gebildet wird.

Bemerkung: Der Buchstabe x in $\int_a^b f(x)\, dx$ ist nur ein Platzhalter: Die Variable x in diesem Ausdruck ist eine gebundene Variable, so daß wir ihr auch jeden beliebigen anderen (freien) Namen geben können. Es ist also z.B.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(y)\, dy = \int_a^b f(t)\, dt$$

usw. Oft wählt man auch eine Kurzschreibweise wie $\int_a^b f$.

Beim klassischen Riemann-Integral werden nur konstante Feinheitsschranken betrachtet:

1.4 Definition: *Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ und $I \in \mathbf{R}$.*
Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar (über $[a,b]$) mit Riemann-Integral I, wenn gilt

(R) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine konstante Feinheitsschranke δ, so daß für jede δ-feine markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}$ gilt*

$$|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) - I| < \varepsilon \ .$$

Statt „Riemann-integrierbar" bzw. „Riemann-Integral" schreiben wir kurz „R-integrierbar" bzw. „R-Integral". Es ist klar, daß eine R-integrierbare Funktion auch integrierbar ist und daß der Wert des R-Integrals gleich $\int_a^b f(x)\,dx$ ist. Wie wir später in Beispiel (4.11) sehen werden, gibt es aber integrierbare Funktionen, die nicht R-integrierbar sind.

Wir notieren zunächst die folgenden elementaren Eigenschaften des Integrals:

1.5 Satz: *Sei $\mathfrak{I}_a^b$ die Menge der integrierbaren Funktion auf $[a,b]$.*

1. *$\mathfrak{I}_a^b$ ist ein Untervektorraum des reellen Vektorraums aller reellen Funktionen auf $[a,b]$, und*
$$f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$
ist eine lineare Abbildung $\mathfrak{I}_a^b \to \mathbf{R}$.
2. *Sind $f, g \in \mathfrak{I}_a^b$ mit $f \le g$, so ist*
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

Beweis: Zu 1.: Sind $f,\ g : [a,b] \to \mathbf{R}$ und $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$, so ist für jede markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a,b]$ offenbar

$$\mathfrak{S}(\alpha f + \beta g;\mathfrak{Z}) = \alpha\,\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) + \beta\,\mathfrak{S}(g;\mathfrak{Z}) \ .$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Zu 2.: Sei δ eine ε-Feinheitsschranke für f und g. Es ist

$$\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) \le \mathfrak{S}(g;\mathfrak{Z})$$

für jede markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a,b]$. Ist $\mathfrak{Z}$ sogar δ-fein, so folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) + \varepsilon \le \mathfrak{S}(g;\mathfrak{Z}) + \varepsilon \le \int_a^b g(x)\,dx + 2\varepsilon \ ,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Der obige Satz gilt auch für R-integrierbare Funktionen; der Beweis ist wörtlich derselbe.

Als Vorbereitung auf den späteren Transformationssatz (3.5) zeigen wir nun

1.6 Satz: *Seien* α, $\beta \in \mathbf{R}$, *so daß* $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ *eine Bijektion* $\varphi : [\,a, b\,] \to [\,c, d\,]$ *definiert. Sei* $g : [\,c, d\,] \to \mathbf{R}$ *integrierbar. Dann ist auch* $g \circ \varphi : [\,a, b\,] \to \mathbf{R}$ *integrierbar, und es gilt*

$$\int_c^d g(y)\,dy = |\alpha| \int_a^b g(\varphi(x))\,dx \ .$$

Beweis: Ist $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet; \zeta_\bullet)$ eine markierte n-Zerlegung von $[\,a, b\,]$, so erhalten wir durch Anwenden von φ eine markierte n-Zerlegung $\mathfrak{Z}' = (\mathrm{Z'}_\bullet; \zeta'_\bullet)$ mit $\mathrm{Z}'_\nu = \varphi(\mathrm{Z}_\mu)$ und $\zeta'_\nu = \varphi(\zeta_\mu)$, wobei

$$\mu = \begin{cases} \nu & , \text{ falls } \alpha > 0 \ , \\ n + 1 - \mu & , \text{ falls } \alpha < 0 \ . \end{cases}$$

Offenbar ist dann

$$\mathfrak{S}(g; \mathfrak{Z}') = |\alpha|\, \mathfrak{S}(g \circ \varphi; \mathfrak{Z}) \ . \qquad \square$$

Bemerkung: Die beste Merkregel für diesen Satz ist

$$\int_c^d g(y)\,dy = \int_a^b g(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,dx \ .$$

In dieser Form wird er später verallgemeinert werden.

Wir wollen nun noch eine Verbindung zu einer anderen üblichen Definition des R-Integrals herstellen:

1.7 Definition: $f : [\,a, b\,] \to \mathbf{R}$ *heißt Treppenfunktion, wenn es eine reelle Folge* $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ *mit* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ *gibt und reelle Zahlen* $c_1, \ldots, c_m$, *so daß gilt:*

$$f(t) = c_k \text{ für } x_{k-1} < t < x_k \ .$$

Die Intervalle $]\,x_{k-1}, x_k\,[$ *heißen die Konstanz-Intervalle von* f. *Weiter heißt*

$$I(f) := \sum_{k=1}^m c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \ .$$

die Fläche unter f.

1.8 Satz: *Sei* $f : [\,a, b\,] \to \mathbf{R}$ *eine Treppenfunktion. Dann gilt:*
f *ist R-integrierbar und*

$$\int_a^b f(x)\,dx = I(f) \ .$$

Beweis: Seien $]\,x_{k-1}, x_k\,[$ (für $1 \leq k \leq m$) die Konstanz-Intervalle von f, und $f(t) = c_k$ für $x_{k-1} < t < x_k$. Da f nur endlich viele Werte hat, gibt es ein M mit $|f(t)| \leq M$ für alle $t \in [\,a, b\,]$.

Sei δ eine (kleine) positive reelle Zahl, und sei $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet; \zeta_\bullet)$ eine δ-feine markierte n-Zerlegung von $[\,a, b\,]$.

Nun ist offenbar $f|_{\mathrm{Z}_\nu}$ wieder eine Treppenfunktion und

$$I(f) = \sum_{\nu=1}^{m} I(f|_{\mathrm{Z}_\nu}) \ ;$$

ebenso gilt

$$\mathfrak{S}(f; \mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{m} \mathfrak{S}(f; \mathrm{Z}_\nu; \zeta_\nu) \ .$$

Sei

$$N := \{\nu \mid \text{ es gibt ein } k \text{ mit } x_k \in \mathrm{Z}_\nu\} \ .$$

Dann ist für $\nu \notin N$ die Funktion f konstant auf Z_ν, also

$$\mathfrak{S}(f; \mathrm{Z}_\nu; \zeta_\nu) - I(f|_{\mathrm{Z}_\nu}) = 0 \ .$$

Für $\nu \in N$ ist aber sicher

$$|\mathfrak{S}(f; \mathrm{Z}_\nu; \zeta_\nu) - I(f|_{\mathrm{Z}_\nu})| \leq 2M\,\ell(\mathrm{Z}_\nu) < 4M\,\delta \ .$$

Ein Punkt x_k kann nun höchstens in zweien der Intervalle Z_ν enthalten sein, so daß die Anzahl der Elemente von N kleiner als $2(m+1)$ ist.

Wir erhalten

$$|\mathfrak{S}(f; \mathfrak{Z}) - I(f)| < 8(m+1)M\,\delta \ ,$$

was für $\delta < \dfrac{\varepsilon}{8(m+1)M}$ kleiner als ε wird. $\square$

2 Zerlegungen und Feinheitsschranken

Wir wollen zunächst zeigen, daß jede positive Funktion auf $[\,a,b\,]$ eine Feinheitsschranke ist. Als ersten Schritt haben wir die folgenden offensichtlichen Konstruktionen von feinen markierten Zerlegungen:

2.1 Lemma: *Sei δ eine positive Funktion auf $[\,a,b\,]$.*

1. *Ist $\zeta \in [\,a,b\,]$ mit $\delta(\zeta) > b-a$, so ist $([\,a,b\,];\zeta)$ eine δ-feine 1-Zerlegung von $[\,a,b\,]$.*
2. *Sei $a<c<b$. Ist $\mathfrak{Z}' = (\mathrm{Z}'_\bullet;\zeta'_\bullet)$ eine δ-feine m-Zerlegung von $[\,a,c\,]$ und $\mathfrak{Z}'' = (\mathrm{Z}''_\bullet;\zeta''_\bullet)$ eine δ-feine n-Zerlegung von $[\,c,b\,]$, so ist*

$$\mathfrak{Z}' \sqcup \mathfrak{Z}'' := (\mathrm{Z}'_1,\ldots,\mathrm{Z}'_m,\mathrm{Z}''_1\ldots,\mathrm{Z}''_n;\zeta'_1\ldots\zeta'_m,\zeta''_1,\ldots,\zeta''_n)$$

eine δ-feine $(m+n)$-Zerlegung von $[\,a,b\,]$.

In der obigen Situation $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}' \sqcup \mathfrak{Z}''$ schreiben wir auch $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}|_{[\,a,c\,]}$ bzw. $\mathfrak{Z}'' = \mathfrak{Z}|_{[\,c,b\,]}$ und sagen, daß diese durch Einschränkung von $\mathfrak{Z}$ auf $[\,a,c\,]$ bzw. auf $[\,c,b\,]$ entstehen.

2.2 Lemma: *Zu jeder positiven Funktion δ auf $[\,a,b\,]$ gibt es eine δ-feine markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[\,a,b\,]$.*

Beweis: Den Beweis führen wir indirekt: Wir nehmen an, daß für die Funktion δ keine δ-feine Zerlegung von $K_0 := [\,a,b\,]$ existiert. Wir konstruieren nun eine Intervallschachtelung $K_0 \supset \ldots \supset K_j \supset K_{j+1} \supset \ldots$, so daß auch K_j keine δ-feine markierte Zerlegung besitzt. Im Induktionsschritt zerlegen wir nun $K_j = [\,a_j,b_j\,]$ in seine zwei Hälften

$$K'_j = [\,a_j,\frac{a_j+b_j}{2}\,] \text{ und } K''_j = [\,\frac{a_j+b_j}{2},b_j\,]$$

und wählen (gemäß Lemma (2.1).(2)) als K_{j+1} eines der Intervalle K'_j, K''_j, welches keine δ-feine Zerlegung besitzt.

Ist nun $\xi \in \bigcap K_j$, so ist $\delta(\xi) > 0$ und für $\ell(K_j) < \delta(\xi)$ ist $(K_j;\xi)$ (wegen Lemma (2.1).(1)) eine δ-feine markierte Zerlegung von K_j. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von K_j. □

Dieses Lemma ist ein einfacher Spezialfall eines Satzes von Pierre Cousin und wird daher auch manchmal als Lemma von Cousin bezeichnet.

Eine markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[\,a,b\,]$ liefert (für $a<c<b$) markierte Zerlegungen auf beiden Teilintervallen $[\,a,c\,]$ und $[\,c,b\,]$, sobald c ein Markierungspunkt ist:

2.3 Definition: *Sei $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet; \zeta_\bullet)$ eine δ-feine markierte n-Zerlegung von $[\,a,b\,]$. Sei $k \in \{1,\dots,n\}$, so daß $\zeta_k = c$ ein innerer Punkt von Z_k ist. Dann können wir eine δ-feine markierte k-Zerlegung $\mathfrak{Z}' = (\mathrm{Z}'_\bullet; \zeta'_\bullet)$ von $[\,a,c\,]$ und eine δ-feine markierte $(n-k+1)$-Zerlegung $\mathfrak{Z}'' = (\mathrm{Z}''_\bullet; \zeta''_\bullet)$ von $[\,c,b\,]$ wie folgt definieren:*

$$\mathrm{Z}'_\nu := \begin{cases} \mathrm{Z}_\nu & , \text{ für } \nu < k \ , \\ \mathrm{Z}_k \cap [\,a,c\,] & , \text{ für } \nu = k \ , \end{cases}$$

$$\mathrm{Z}''_\nu := \begin{cases} \mathrm{Z}_k \cap [\,c,b\,] & , \text{ für } \nu = 1 \ , \\ \mathrm{Z}_{\nu+k-1} & , \text{ für } \nu > 1 \ , \end{cases}$$

$$\zeta'_\nu := \zeta_\nu \quad \text{und} \quad \zeta''_\nu := \zeta_{\nu+k-1} \ .$$

Wir schreiben auch $\mathfrak{Z}' =: \mathfrak{Z}|_{[\,a,c\,]}$ und $\mathfrak{Z}'' =: \mathfrak{Z}|_{[\,c,b\,]}$ und sagen, daß diese durch Zerschneiden von $\mathfrak{Z}$ bei $c = \zeta_k$ entstehen.

Dieser Prozess lässt sich aber auch umkehren:

2.4 Definition: *Sei $a < c < b$ und sei $\mathfrak{Z}' = (\mathrm{Z}'_\bullet; \zeta'_\bullet)$ eine δ-feine markierte n-Zerlegung von $[\,a,c\,]$ sowie $\mathfrak{Z}'' = (\mathrm{Z}''_\bullet; \zeta''_\bullet)$ eine δ-feine markierte m-Zerlegung von $[\,c,d\,]$. Es gelte $\zeta'_n = \zeta''_1 = c$. Dann erhalten wir eine δ-feine markierte $(m+n-1)$-Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[\,a,b\,]$ durch*

$$\mathrm{Z}_\nu := \begin{cases} \mathrm{Z}'_\nu & , \text{ für } \nu < n \ , \\ \mathrm{Z}'_n \cup \mathrm{Z}''_1 & , \text{ für } \nu = n \ , \\ \mathrm{Z}''_{\nu-n+1} & , \text{ für } \nu > n \ , \end{cases}$$

$$\zeta_\nu := \begin{cases} \zeta'_\nu & , \text{ für } \nu < n \ , \\ c & , \text{ für } \nu = n \ , \\ \zeta''_{\nu-n+1} & , \text{ für } \nu > n \ . \end{cases}$$

Wir schreiben dann

$$\mathfrak{Z} =: \mathfrak{Z}' \underset{c}{\cup} \mathfrak{Z}''$$

und sagen, daß $\mathfrak{Z}$ aus $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ durch Verkleben bei c entsteht.

Es ist klar, daß für die Riemannschen Summen jeder Funktion $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\mathfrak{S}(f; \mathfrak{Z}' \underset{c}{\cup} \mathfrak{Z}'') = \mathfrak{S}(f|_{[\,a,c\,]}; \mathfrak{Z}') + \mathfrak{S}(f|_{[\,c,b\,]}; \mathfrak{Z}'') \ .$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{S}(f; \mathfrak{Z}' \sqcup \mathfrak{Z}'') = \mathfrak{S}(f|_{[\,a,c\,]}; \mathfrak{Z}') + \mathfrak{S}(f|_{[\,c,b\,]}; \mathfrak{Z}'') \ .$$

3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir werden in diesem Text mehrere Versionen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erarbeiten, die einmal durch Aufteilung des Gesamtsatzes (unter verschiedenen Aspekten) entstehen und zum anderen von Mal zu Mal allgemeiner werden. Die einfachste Version, die aber schon sehr wichtig ist, lautet:

3.1 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung I):
Sei $F : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ differenzierbar mit Ableitung $F' =: f$. Dann ist f integrierbar und

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

Man schreibt auch kurz

$$F(t)\Big|_a^b = F(t)\Big|_{t=a}^b = F(b) - F(a)\ .$$

Manchmal wird dies auch als $[F(t)]_a^b$ geschrieben.

3.2 Definition: *Ist $F : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $f := F'$, so nennt man F eine Stammfunktion von f. Man nennt dann auch (mit einer Konstanten C)*

$$\int f(t)\,dt = F(x) + C$$

das unbestimmte Integral von f.

Wir werden den Begriff der Stammfunktion später noch verallgemeinern. Hier merken wir nur an, daß das Auffinden von Stammfunktionen die Berechnung von Integralen ermöglicht.

3.3 Definition: *Sei $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ integrierbar auf $[\,a,b\,]$. Wir setzen*

$$\int_b^a f(t)\,dt := -\int_a^b f(t)\,dt$$

und $\int_a^a f(t)\,dt := 0$.

Bemerkung: Man nennt das Integral mit dieser Notation auch das orientierte Integral. Der Hauptsatz ist dann analog für das orientierte Integral richtig.

Der Hauptsatz in der obigen Form ist, wie wir in Beispiel (4.11) sehen werden, für das Riemann-Integral nicht richtig. Die klassische Formulierung des Hauptsatzes für das Riemann-Integral werden wir im Anhang angeben.

Zum Beweis des Hauptsatzes benutzen wir das folgende

3.4 Lemma (Einschließungs-Lemma): *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ differenzierbar in $x \in [a,b]$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für ξ, $\eta \in \,]x-\delta, x+\delta[\, \cap [a,b]$ mit $\xi \le x \le \eta$ gilt:*

$$|F(\eta) - F(\xi) - F'(x)(\eta - \xi)| \le \varepsilon \cdot (\eta - \xi) \ . \tag{1}$$

Beweis: Nach Definition der Differenzierbarkeit gilt die obige Ungleichung in den Fällen $\xi = x \le \eta$ und $\xi \le x = \eta$. Wegen

$$\begin{aligned} F(\eta) - F(\xi) - F'(x)(\eta - \xi) &= F(\eta) - F(x) - F'(x)(\eta - x) \\ &\quad + F(x) - F(\xi) - F'(x)(x - \xi) \end{aligned}$$

ergibt sich die Ungleichung (1) in der allgemeineren Form durch Anwenden der Dreiecksungleichung. □

Man überlege sich (unter Verwendung der Funktion F aus Beispiel (4.11)), daß die Ungleichung (1) des Lemmas nicht schon aus $\xi \le \eta$ und ξ, $\eta \in \,]x-\delta, x+\delta[\, \cap [a,b]$ folgt. Ist F in einer Umgebung von x differenzierbar, so ist die Gültigkeit von (1) für alle ξ, η in einer Umgebung von x äquivalent zur Stetigkeit von F' in x.

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis des obigen Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach dem Einschließungs-Lemma 3.4 eine positive Funktion $\delta : [a,b] \to \mathbf{R}$, so daß für ξ, $\eta \in [a,b]$ mit

$$\xi \le x \le \eta \text{ und } \ \xi, \eta \in \,]x - \delta(x), x + \delta(x)[$$

gilt

$$|F(\eta) - F(\xi) - f(x)(\eta - \xi)| \le \varepsilon \cdot (\eta - \xi) \ .$$

Sei $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet; \zeta_\bullet)$ eine δ-feine Zerlegung von $[a,b]$ und $\mathrm{Z}_\nu = [\mathrm{z}_{\nu-1}, \mathrm{z}_\nu]$. Es ist

$$\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu) \cdot (\mathrm{z}_\nu - \mathrm{z}_{\nu-1}) \ .$$

also

$$\begin{aligned} \Big|F(b) - F(a) - \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z})\Big| &= \left|\sum_{\nu=1}^{n} \Big(F(\mathrm{z}_\nu) - F(\mathrm{z}_{\nu-1}) - f(\zeta_\nu)(\mathrm{z}_\nu - \mathrm{z}_{\nu-1})\Big)\right| \\ &\le \sum_{\nu=1}^{n} |F(\mathrm{z}_\nu) - F(\mathrm{z}_{\nu-1}) - f(\zeta_\nu)(\mathrm{z}_\nu - \mathrm{z}_{\nu-1})| \\ &\le \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon \cdot (\mathrm{z}_\nu - \mathrm{z}_{\nu-1}) \\ &= \varepsilon(b-a) \ . \end{aligned}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden konnte, folgt die Behauptung.

Aus den Regeln der Differentialrechnung erhalten wir nun Regeln der Integralrechnung. Für den folgenden Satz, der manchmal auch als Substitutions-Regel bezeichnet wird, ist dabei die Verwendung des orientierten Integrals wesentlich:

3.5 Satz (Transformations-Satz): *Seien $\varphi : [\,a, b\,] \to [\,c, d\,]$ und $F : [\,c, d\,] \to \mathbf{R}$ differenzierbar. Sei $f := F'$. Dann gilt*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Beweis: Es ist

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(t))\Big|_a^b = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\ . \qquad \square$$

Als Merkregel notieren wir, daß $x = \varphi(t)$ die Gleichung $dx = \varphi'(t)\,dt$ nach sich zieht.

3.6 Lemma (Partielle Integration): *Seien $F, G : [\,a, b\,] \to \mathbf{R}$ differenzierbar und $F' =: f$, $G' =: g$. Dann ist $f \cdot G$ genau dann integrierbar, wenn $F \cdot g$ es ist. In diesem Fall ist*

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)g(x)\,dx\ .$$

Beweis: Wegen

$$f \cdot G = (F \cdot G)' - F \cdot g$$

folgt die Behauptung unmittelbar aus der Linearität des Integrals und dem Hauptsatz. $\square$

4 Beispiele und Anwendungen

4.1 Beispiel:

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin(x)\cos(x)\,dx &= \int_a^b \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx \\ &\underset{y=2x}{=} \int_{2a}^{2b} \frac{1}{2}\sin(y)\cdot\frac{1}{2}\,dy = -\frac{1}{4}\cos(y)\Big|_{2a}^{2b} \\ &= \frac{1}{4}(\cos(2a)-\cos(2b))\ .\end{aligned}$$

4.2 Beispiel:

$$\begin{aligned}\int_a^b t^2\sqrt{1-t^3}\,dt &\underset{t^3=y}{=} \int_{a^3}^{b^3} \frac{1}{3}\sqrt{1-y}\,dy \\ &= -\frac{2}{9}(1-y)^{3/2}\Big|_{a^3}^{b^3} \\ &= \frac{2}{9}\left((1-a^3)^{3/2}-(1-b^3)^{3/2}\right)\ .\end{aligned}$$

4.3 Beispiel:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-t^2}\,dt &= \int 1\cdot\sqrt{1-t^2}\,dt \\ &\underset{P.I.}{=} t\sqrt{1-t^2}-\int\frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= t\sqrt{1-t^2}+\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\int\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\ .\end{aligned}$$

Es folgt

$$2\int\sqrt{1-t^2}\,dt = t\sqrt{1-t^2}+\arcsin(t)+C\ .$$

4.4 Beispiel:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}\,dx &\underset{x=-t}{=} \int_2^1\frac{1}{t}\,dt \\ &= \log(t)\Big|_2^1 = -\log(2)\ .\end{aligned}$$

4.5 Beispiel:

$$\begin{aligned}\int\log(x)\,dx &= \int 1\cdot\log(x)\,dx \\ &\underset{P.I.}{=} x\log(x)-\int x\frac{dx}{x} \\ &= x\log(x)-x+C\ .\end{aligned}$$

4.6 Beispiel:

$$\int (x-\alpha)^\beta \, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta+1}(x-\alpha)^{\beta+1} + C & \text{für } \beta \neq -1 \ , \\ \log(|x-\alpha|) + C & \text{für } \beta = -1 \ . \end{cases}$$

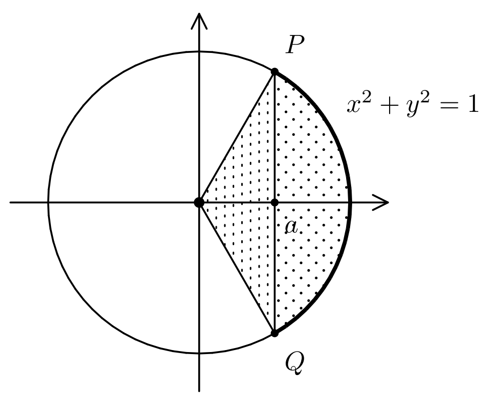
Für den Beweis des folgenden Satzes sowie einiger Erweiterungen verweisen wir auf die Lehrbuchliteratur (z.B. [5, Kap.C,11.5]).

4.7 Satz: *Jede rationale Funktion hat eine elementare Funktion als Stammfunktion.*

Hierbei verstehen wir unter der Menge der elementaren Funktionen die kleinste Menge von reellen Funktionen, die die Funktionen x^α, e^x, $\log(x)$, $\sin(x)$ und $\arcsin(x)$ enthält und die abgeschlossen ist unter arithmetischen Operationen und unter der Komposition von Funktionen.

4.8 Beispiel:

Wir berechnen die Fläche eines Kreissektors.
Es sei $0 \leq a \leq 1$, und P, Q seien die Punkte auf dem Einheitskreis mit x-Koordinate a. Es sei F_a die Fläche des Kreissektors, der vom Kreisbogen zwischen P und Q sowie von den Verbindungsstrecken von P und Q mit dem Nullpunkt begrenzt wird.



Nach Beispiel (4.3) wird

$$\begin{aligned} 2\int_a^1 \sqrt{1-t^2}\, dt &= \left(t\,\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t)\right)\Big|_a^1 \\ &= \arcsin(1) - a\sqrt{1-a^2} - \arcsin(a) \\ &= \arccos(a) - a\sqrt{1-a^2} \ . \end{aligned}$$

Die Fläche des Dreiecks mit Eckpunkten $(0,0)$ und P, Q ist $a\sqrt{1-a^2}$, so daß für die Fläche des Kreissektors folgt:

$$F_a = a\sqrt{1-a^2} + 2\int_a^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \arccos(a) \ .$$

4.9 Definition: *Sei $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar. Dann heißt*[1]

$$L(f) := \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$

die Bogenlänge des Graphen von f.

[1] Wir zeigen im nächsten Abschnitt, daß stetige Funktionen integrierbar sind.

Die Motivation für diese Definition ergibt sich wie folgt: Mit $y = f(x)$ und $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ wird die Länge der Sekante zwischen den Punkten (x, y) und $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ zu

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\ \Delta x\ .$$

Im Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ergibt das

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx\ .$$

4.10 Beispiel:

Die Bogenlänge L des Kreisbogens $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ über dem Intervall $[\,a, 1\,]$ erhalten wir wie folgt: Es wird

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\ ,$$

also

$$1 + f'(x)^2 = \frac{1}{1 - x^2}\ .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} L = \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} &= \arcsin(x)\Big|_a^1 \\ &= \arccos(a)\ . \end{aligned}$$

Es ist also

$$\cos(L) = a\ .$$

4.11 Beispiel:

Es sei $F : [\,0, 1\,] \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$F(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0\ , \\ t^2 \cos(\frac{1}{t^2}) & \text{für } t \neq 0\ . \end{cases}$$

Dann ist $F'(0) = 0$ und

$$F'(t) = \frac{2}{t}\sin(\frac{1}{t^2}) + 2t\cos(\frac{1}{t^2})$$

für $t \neq 0$. Man beachte, daß F' in 0 nicht stetig ist.

Der Graph von F und der Graph von F' für $x \geq 0.1$ sind in Anhang A skizziert.

Die Funktion $f(t) := F'(t)$ ist nicht R-integrierbar, denn es gilt

4.12 Lemma: *Eine R-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ist beschränkt.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ eine konstante ε-Feinheitsschranke für f. Sei n eine positive natürliche Zahl, so daß

$$\lambda := \frac{b-a}{n} < \delta$$

ist. Dann definiert

$$\mathrm{Z}_\nu = [\mathrm{z}_{\nu-1}, \mathrm{z}_\nu] \quad \text{mit} \quad \mathrm{z}_\nu := a + \nu\lambda$$

eine Zerlegung von $[a, b]$ in n Intervalle der Länge λ.

Sind $\zeta_\bullet$ und ${\zeta'}_\bullet$ zwei Markierungen von $\mathrm{Z}_\bullet$, die sich nur an der Stelle ν unterscheiden, so folgt für die zugehörigen markierten Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$, die offenbar δ-fein sind,

$$2\varepsilon > |\mathfrak{S}(f; \mathfrak{Z}) - \mathfrak{S}(f; \mathfrak{Z}')| = |f(\zeta_\nu) - f(\zeta'_\nu)|\, \lambda \ ,$$

also

$$|f(\zeta_\nu)| = |f(\zeta'_\nu) + (f(\zeta_\nu) - f(\zeta'_\nu))| \le |f(\zeta'_\nu)| + \frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

bei beliebigen ζ_ν, $\zeta'_\nu \in J$.

Insbesondere ist für $\mathrm{z}_{\nu-1} \le \zeta \le \mathrm{z}_\nu$

$$|f(\zeta)| \le |f(\mathrm{z}_{\nu-1})| + \frac{2\varepsilon}{\lambda} \ ,$$

und durch Anwendung dieser Abschätzung auf $\zeta = \mathrm{z}_\nu$ folgt induktiv, daß für alle ζ mit $\mathrm{z}_{\nu-1} \le \zeta \le \mathrm{z}_\nu$ gilt

$$|f(\zeta)| \le |f(a)| + \nu\, \frac{2\varepsilon}{\lambda} \ . \qquad \square$$

Als Anwendung der Regel von der partiellen Integration wollen wir nun noch die Integral-Form des Restglieds in der Taylorformel herleiten.

4.13 Satz* (Taylorformel): *Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : I \to \mathbf{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gilt (für x, a in I)*

$$f(x) = T_n(f; a)(x) + R_{n+1}(x; a) \ ,$$

mit

$$\begin{aligned} T_n(f;a)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ , \\ R_{n+1}(x;a) &= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \ . \end{aligned}$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über n. Für $n = 0$ ist sie äquivalent zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (3.1).

Beim Schluß von $n-1$ auf n wenden wir auf die rechte Seite der Induktionsannahme

$$R_n(x;a) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$$

partielle Integration an. Mit $F(t) = f^{(n)}(t)$ und $G(t) = \dfrac{-(x-t)^n}{n}$ ist sicher FG' integrierbar (da F stetig ist), also auch $F'G$. Es folgt

$$\begin{aligned} R_n(x;a) &= \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{-(x-t)^n}{n} f^{(n)}(t)\Big|_a^x + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{n!}\,(x-a)^n\, f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\ . \end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen. □

5 Stetige Funktionen

5.1 Hilfssatz: *Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es integrierbare Funktionen φ_ε, $\psi_\varepsilon : [a,b] \to \mathbf{R}$, so daß gilt:*

$$\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \leq \varepsilon + \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx \ .$$

Dann ist f integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_\varepsilon \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \inf_\varepsilon \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx$$

Beweis: Wegen der Voraussetzung an die Integrale von φ_ε, ψ_ε ist

$$\sup_\varepsilon \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \inf_\varepsilon \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \ ;$$

es sei I der gemeinsame Wert.

Sei nun $\varepsilon_0 > 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$ (mit $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$), so daß für alle $\varepsilon < \varepsilon_1$ gilt

$$I - \varepsilon_0 < \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx \leq \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \leq I + \varepsilon_0 \ .$$

Sei $\varepsilon < \varepsilon_1$ und δ eine ε_0-Feinheitsschranke für φ_ε. Für eine δ-feine markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a,b]$ ist dann

$$\begin{aligned} \left|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) - I\right| &\leq \varepsilon_0 + \left|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) - \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx\right| \\ &\leq 2\varepsilon_0 + \left|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) - \mathfrak{S}(\varphi_\varepsilon;\mathfrak{Z})\right| \\ &\leq 2\varepsilon_0 + \varepsilon_0(b-a) \ . \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

5.2 Definition: *Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbf{R}$ eine Funktion. Dann heißt f gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für $x, y \in I$ gilt:*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

5.3 Satz: *Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so daß zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ (mit $n \in \mathbf{N}$) Punkte $x_n, y_n \in I$ existieren mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \ \text{und} \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \ .$$

Da $[a, b]$ abgeschlossen und beschränkt ist, hat die Folge $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Sei $\xi = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Wegen $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ ist dann auch $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \xi$. Es folgt

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$$

in Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. □

5.4 Korollar: *Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktion φ_ε, $\psi_\varepsilon : [a, b] \to \mathbf{R}$ so daß gilt:*

$$\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \leq \varphi_\varepsilon + \varepsilon \ .$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\delta > 0$ so gewählt, daß für x, $y \in [a, b]$ gilt

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

Nun sei n eine natürliche Zahl, so daß $n\delta > b - a$ ist. Wir zerlegen $[a, b]$ in n Intervalle der Länge $\ell := \dfrac{b-a}{n}$ durch

$$Z_\nu = [a + (\nu - 1)\ell, a + \nu\ell] \ .$$

Schließlich definieren wir Treppenfunktionen φ_ε, ψ_ε, indem wir für t im Inneren von Z_ν setzen

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(t) &:= \inf(f(Z_\nu)) \ , \\ \psi_\varepsilon(t) &:= \sup(f(Z_\nu)) \ . \end{aligned}$$

Offenbar gilt dann $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ und, wegen $\ell < \delta$, auch $0 \leq \psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leq \varepsilon$. □

5.5 Korollar: *Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.*

Die Überlegungen dieses Abschnitts übertragen sich wortwörtlich auf das Riemann-Integral. Eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist also immer auch R-integrierbar.

6 Integration über Teilintervalle

Beweistechnisch wichtig ist die folgende Variante des Cauchy-Kriteriums:

6.1 Lemma (Cauchy-Kriterium): $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ *ist genau dann integrierbar, wenn gilt:*

(C) *zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Feinheitsschranke δ, so daß für je zwei δ-feine markierte Zerlegungen $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ von $[\,a,b\,]$ gilt:*

$$|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}') - \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}'')| < \varepsilon \ . \tag{2}$$

Beweis: Daß aus der Integrierbarkeit von f die Bedingung**(C)** folgt, ist klar. Wir beweisen nun die umgekehrte Implikation.

Zu $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ sei δ_n eine Feinheitsschranke, welche die obige Bedingung erfüllt, wobei o.B.d.A. $\delta_n \geq \delta_{n+1}$ ist.

Sei $\mathfrak{Z}^{(n)}$ eine δ_n-feine Zerlegung von $[\,a,b\,]$.

Dann gilt $|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}^{(n)}) - \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}^{(n+k)})| < \frac{1}{n}$ für jedes $k \in \mathbf{N}$, und nach dem klassischen Cauchy-Kriterium existiert $I := \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}^{(n)})$.

Ist $|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}^{(n)}) - I| < \varepsilon$, so ist für jede δ_n-feine Zerlegung $\mathfrak{Z}''$ von $[\,a,b\,]$

$$|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}'') - I| \leq |\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}^{(n)}) - I| + |\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}^{(n)}) - \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}'')| < \varepsilon + \frac{1}{n} \ . \qquad \square$$

Als Folgerung erhalten wir:

6.2 Satz: *Sei $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ integrierbar und sei $a \leq c < d \leq b$. Dann ist auch $f|_{[\,c,d\,]}$ integrierbar.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und δ eine Feinheitsschranke auf $[\,a,b\,]$, so daß die Ungleichung (2) für alle δ-feinen markierte Zerlegungen $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ von $[\,a,b\,]$ gilt.

Seien nun $\widetilde{\mathfrak{Z}}'$ und $\widetilde{\mathfrak{Z}}''$ δ-feine markierte Zerlegungen von $[\,c,d\,]$. Weiter sei $\mathfrak{Z}^{(1)}$ eine δ-feine markierte Zerlegung von $[\,a,c\,]$ und $\mathfrak{Z}^{(2)}$ eine δ-feine markierte Zerlegung von $[\,d,b\,]$. Dann sind $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}^{(1)} \sqcup \widetilde{\mathfrak{Z}}' \sqcup \mathfrak{Z}^{(2)}$ und $\mathfrak{Z}'' = \mathfrak{Z}^{(1)} \sqcup \widetilde{\mathfrak{Z}}'' \sqcup \mathfrak{Z}^{(2)}$ δ-feine markierte Zerlegungen von $[\,a,b\,]$.

Nun gilt aber nach Voraussetzung die Ungleichung (2), und es folgt

$$|\mathfrak{S}(f|_{[\,c,d\,]};\widetilde{\mathfrak{Z}}'') - \mathfrak{S}(f|_{[\,c,d\,]};\widetilde{\mathfrak{Z}}')| = |\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}') - \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}'')| < \varepsilon \ .$$

Hieraus folgt, wieder nach dem Cauchy-Kriterium, die Integrierbarkeit von $f|_{[\,c,d\,]}$. $\square$

Wir werden nun als Umkehrung des vorigen Satzes beweisen, daß aus der Integrierbarkeit von f auf den Teilintervallen einer Zerlegung auch die Integrierbarkeit auf $[\,a,b\,]$ folgt. Dazu benötigen wir einige einfache Tatsachen über markierte Zerlegungen.

Es wird sich herausstellen, daß ein wesentlicher Vorteil von nicht-konstanten Feinheitsschranken darin besteht, daß beliebig gewählte Punkte als Markierungspunkte vorgeschrieben werden können:

6.3 Hilfssatz: *Sei $\delta : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ eine Feinheitsschranke und sei $c \in [\,a,b\,]$, so daß für $t \in [\,a,b\,]$ gilt*

$$t \neq c \Rightarrow \delta(t) \leq |t-c| \;.$$

Ist $\mathfrak{Z}$ eine δ-feine markierte Zerlegung von $[\,a,b\,]$, so ist c ein Markierungspunkt von $\mathfrak{Z}$.

Beweis: Ist $c \in \mathrm{Z}_\nu$, so ist $|c-\zeta_\nu| < \delta(\zeta_\nu)$, da $\mathfrak{Z}$ eine δ-feine Zerlegung ist. Aus der Vorraussetzung an δ folgt nun $\zeta_\nu = c$. □

6.4 Korollar: *Sei $a < c < b$ und $\delta : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ eine Feinheitsschranke. Dann gibt es eine Feinheitsschranke $\delta^* < \delta$, so daß jede δ^*-feine markierte Zerlegung von $[\,a,b\,]$ von der Form*

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}' \sqcup \mathfrak{Z}'' \text{ oder } \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}' \underset{c}{\cup} \mathfrak{Z}''$$

ist, wobei $\mathfrak{Z}'$ eine δ-feine Zerlegung von $[\,a,c\,]$ und $\mathfrak{Z}''$ eine δ-feine Zerlegung von $[\,c,b\,]$ ist. Insbesondere gilt dann

$$\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) = \mathfrak{S}(f|_{[\,a,c\,]};\mathfrak{Z}') + \mathfrak{S}(f|_{[\,c,b\,]};\mathfrak{Z}'')$$

für jede Funktion $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$.

Beweis: Sei δ^* definiert durch

$$\delta^*(t) = \begin{cases} \delta(c) & \text{für } t = c\;, \\ \min\{\delta(t), |t-c|\} & \text{für } t \neq c\;. \end{cases}$$

Es sei $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_1,\ldots,\mathrm{Z}_n;\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ eine δ^*-feine markierte Zerlegung und $m \in \{1,\ldots,n\}$ minimal mit $c \in \mathrm{Z}_m$. Nach dem vorangehenden Hilfssatz (6.3) folgt $\zeta_m = c$. Sei nun

$$\mathfrak{Z}' := (\mathrm{Z}_1^*,\ldots \mathrm{Z}_{m-1}, \mathrm{Z}_m \cap [\,a,c\,]; \zeta_1,\ldots,\zeta_{m-1}, c)$$

und

$$\mathfrak{Z}'' := \begin{cases} (\mathrm{Z}_m \cap [\,c,b\,], \mathrm{Z}_{m+1},\ldots,\mathrm{Z}_n; c, \zeta_{m+1},\ldots,\zeta_n) & \text{, falls } \mathrm{z}_m > c \text{ ist,} \\ (\mathrm{Z}_{m+1},\ldots,\mathrm{Z}_n; \zeta_{m+1},\ldots,\zeta_n) & \text{, falls } \mathrm{z}_m = c \text{ ist.} \end{cases}$$

Dann sind $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}''$ als δ^*-feine Zerlegungen auch δ-fein. □

6.5 Satz: *Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ und sei $a < c < b$. Seien $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ integrierbar. Dann ist auch f auch integrierbar auf $[a,b]$, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ .$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Korollar (6.4).

Als Anwendung erhalten wir eine teilweise Umkehrung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

6.6 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II):
Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ integrierbar und sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \ .$$

Dann gilt:

1. *F ist stetig.*
2. *Ist f stetig im Punkte $x \in [a,b]$, so ist F differenzierbar in x und es ist*

$$F'(x) = f(x) \ .$$

Beweis: zu 1.: Wir zeigen, daß der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{y \searrow x} F(y) = F(x) \tag{3}$$

ist. Die analoge Behauptung für den linksseitigen Grenzwert kann man genauso beweisen; sie folgt aber auch unmittelbar aus (3) und dem Transformationssatz (1.6), angewendet auf $\varphi(x) = -x$.

Es genügt, den Fall $x = a$ zu betrachten und zu zeigen, daß

$$\lim_{c \searrow a} F(c) = F(a) = 0$$

ist.

Sei $\varepsilon > 0$ und δ eine ε-Feinheitsschranke für f. Wir wählen ein a' mit

$$a < a' < a + \delta(a)$$

und

$$a' - a < \frac{\varepsilon}{1 + |f(a)|} \ .$$

Sei $a < c < a'$ und sei die Funktion δ_c eine ε-Feinheitsschranke für $f|_{[c,b]}$; wir können annehmen, daß $\delta_c \leq \delta$ ist.

Sei schließlich $\mathfrak{Z}''$ eine δ_c-feine markierte Zerlegung von $[c,b]$. Wir definieren eine markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}'$ von $[a,c]$ durch $\mathfrak{Z}' = ([a,c]; a)$. Wegen $\delta_c < \delta$

und $c < a' < a + \delta(a)$ ist dann $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}' \sqcup \mathfrak{Z}''$ eine δ-feine Zerlegung von $[\,a, b\,]$. Nun wird $|F(c)|$ gleich

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^c f(t)\,dt\right| &= \left|\int_a^b f(t)\,dt - \int_c^b f(t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_a^b f(t)\,dt - \int_c^b f(t)\,dt - \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) + \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}'') + \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}')\right| \\
&\leq \left|\int_a^b f(t)\,dt - \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z})\right| + \left|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}'') - \int_c^b f(t)\,dt\right| + \left|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}')\right| \\
&< \varepsilon + \varepsilon + |f(a)|\,(c-a) \\
&< 3\varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Zu 2.: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $t \in [\,x - \delta, x + \delta\,]$ gilt

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon\ .$$

Es folgt (für $0 < h < \delta$)

$$(f(x) - \varepsilon)\,h < \int_x^{x+h} f(t)\,dt < (f(x) + \varepsilon)\,h\ ,$$

also

$$f(x) - \varepsilon < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x) + \varepsilon\ .$$

Die Behauptung folgt. □

6.7 Korollar: *Sei $f : [\,a, b\,] \to \mathbf{R}$ stetig. Dann hat f eine Stammfunktion.*

7 Nullmengen

7.1 Definition: *Eine Teilmenge $N \subset \mathbf{R}$ heißt eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge J_k von offenen Intervallen gibt mit*

$$N \subset \bigcup_k J_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \ell(J_k) < \varepsilon \ .$$

Es ist klar, daß eine Teilmenge einer Nullmenge wieder eine Nullmenge ist.

7.2 Lemma:

1. *Ist N_j eine Nullmenge für $j \in \mathbf{N}$, so ist auch die Vereinigungsmenge $\bigcup_j N_j$ eine Nullmenge.*
2. *Jede abzählbare Menge ist eine Nullmenge.*

Beweis: Zu 1.: Sei $\varepsilon > 0$ und $j \in \mathbf{N}$. Dann gibt es offene Intervalle $J_{j,k}$ mit

$$N_j \subset \bigcup_{k \in \mathbf{N}} J_{j,k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \ell(J_{j,k}) < 2^{-j-2}\varepsilon \ .$$

Nun ist offenbar

$$\bigcup_j N_j \subset \bigcup_{j,k} J_{j,k}$$

und, bezüglich irgendeiner Anordnung der $J_{j,k}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \ell(J_{j,k}) &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \ell(J_{j,k}) \\ &< \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j-2}\varepsilon \\ &= 2^{-1}\varepsilon < \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Zu 2.: Dies folgt unmittelbar aus 1., da eine einpunktige Menge trivialerweise eine Nullmenge ist. □

7.3 Definition:

1. *Sei $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform und*

   $$N := \{x \in \mathbf{R} \mid \mathcal{A}(x) \text{ ist falsch } \} \ .$$

   Wir sagen, daß $\mathcal{A}(x)$ fast-überall (bzw. a-fast-überall bzw. e-fast-überall) gilt, wenn N eine Nullmenge (bzw. abzählbare Menge bzw. endliche Menge) ist.

2. *Seien $f,\, g : I \to \mathbf{R}$ Funktionen und*

$$N := \{x \in I \bigm| f(x) \neq g(x)\} \ .$$

Wir sagen, daß $f(x)$ fast-überall (a-fast-überall bzw. e-fast-überall) gleich $g(x)$ ist, wenn N eine Nullmenge (bzw. abzählbare Menge bzw. endliche Menge) ist. Wir schreiben dann $f \underset{\text{f.ü.}}{\equiv} g$ (bzw. $f \underset{\text{a.f.ü.}}{\equiv} g$ bzw. $f \underset{\text{e.f.ü.}}{\equiv} g$)

7.4 Satz: *Sei $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ und $f \underset{\text{f.ü.}}{\equiv} 0$. Dann ist f integrierbar und $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.*

Eine Funktion, die fast überall Null ist, nennt man auch eine Nullfunktion.

Beweis: Sei $E := \{x \bigm| f(x) \neq 0\}$. Nach Voraussetzung ist E eine Nullmenge. Nun sei für $n \in \mathbf{N}$

$$E_n := \{x \in E \bigm| n < |f(x)| \leq n+1\} \ .$$

Offenbar ist

$$E = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n \ .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da E_n eine Nullmenge ist, gibt es offene Intervalle $J_{n,k}$ mit

$$E_n \subset \bigcup_k J_{n,k} \quad \text{und} \quad \sum_k \ell(J_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}(n+1)} \ .$$

Wir definieren nun eine Feinheitsschranke δ wie folgt:

Für $x \notin E$ sei $\delta(x) := 1$.

Ist $x \in E$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes $n = n(x)$ mit $x \in E_n$; es ist dann folglich auch

$$x \in \bigcup_k J_{n,k} \ .$$

Sei $k = k(x) \in \mathbf{N}$ minimal mit $x \in J_{n,k}$. Wir setzen

$$\delta(x) := \frac{1}{2}\sup\{t \bigm| [\,x-t, x+t\,] \subset J_{n(x),k(x)}\} \ .$$

Offenbar ist dann das abgeschlossene Intervall $[x - \delta(x), x + \delta(x)]$ ganz in $J_{n,k}$ enthalten.

Sei nun $\mathfrak{Z}$ eine δ-feine markierte Zerlegung von $[a,b]$. Wir wollen

$$|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z})| \leq \sum_\nu |f(\zeta_\nu)|\,\ell(\mathrm{Z}_\nu)$$

weiter nach oben abschätzen.

Ist $\zeta_\nu \notin E$, so ist $f(\zeta_\nu) = 0$. Ist aber $\zeta_\nu \in E$ und $n = n(\zeta_\nu)$, $k = k(\zeta_\nu)$, so ist

$$\mathrm{Z}_\nu \subset [\,\zeta_\nu - \delta(\zeta_\nu), \zeta_\nu + \delta(\zeta_\nu)\,] \subset J_{n,k} \ ,$$

also $\ell(\mathrm{Z}_\nu) \le \ell(J_{n,k})$. Andererseits ist aber $|f(\zeta_\nu)| \le n+1$ wegen $\zeta_\nu \in E_n$. Es folgt

$$\sum_{\substack{\nu \\ \zeta_\nu \in E_n}} |f(\zeta_\nu)|\,\ell(\mathrm{Z}_\nu) \le \sum_k (n+1)\ell(J_{n,k}) < 2^{-n-1}\varepsilon \ ,$$

so daß wir insgesamt erhalten:

$$\sum_\nu |f(\zeta_\nu)|\,\ell(\mathrm{Z}_\nu) < \sum_n 2^{-n-1}\varepsilon = \varepsilon \ . \qquad \square$$

7.5 Korollar: *Seien $f,\, g : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ mit $f \underset{\text{f.ü.}}{\equiv} g$. Ist g integrierbar, so ist auch f integrierbar und $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.*

Damit erhalten wir weitere einfache Beispiele von Funktionen, die integrierbar, aber nicht R-integrierbar sind:

7.6 Beispiel:

Seien $f,\, g : [\,0,1\,] \to \mathbf{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbf{Q}\ , \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbf{Q}\ , \end{cases} \quad \text{und } g(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbf{N}_+, \\ 0 & \text{sonst }\ . \end{cases}$$

Dann sind f und g als Nullfunktionen integrierbar. Es ist leicht zu sehen, daß f nicht R-integrierbar[2] ist. Die Funktion g ist dagegen auch R-integrierbar.

Daß Produkte integrierbarer Funktionen im allgemeinen nicht wieder integrierbar sind, werden wir später in Beispiel (7.13) sehen. Hier notieren wir zunächst die folgende leichte Anwendung von Satz (7.4):

7.7 Korollar: *Sei $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ integrierbar und $g : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ eine Treppenfunktion mit Konstanzintervallen $I_k = \,]\,x_{k-1}, x_k\,[$ für $1 \le k \le n$; sei $g(t) = c_k$ für $t \in I_k$. Dann ist $f \cdot g$ integrierbar und*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \sum_{k=1}^n c_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt \ .$$

Beweis: Es ist

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)g(t)\,dt$$

und auf $[\,x_{k-1}, x_k\,]$ stimmt fg außerhalb der Randpunkte mit $c_k f$ überein. $\square$

[2] f wird manchmal auch die Dedekind-Funktion genannt.

7.8 Definition: *$f : [a,b] \to \mathbf{R}$ heißt Regelfunktion, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi_\varepsilon : [a,b] \to \mathbf{R}$ gibt mit $|f(t) - \varphi_\varepsilon(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$.*

Bemerkung: Wir haben früher gezeigt, daß jede stetige Funktion eine Regelfunktion ist. Man kann zeigen, daß auch jede monotone Funktion eine Regelfunktion ist.

Der Beweis der Integrierbarkeit stetiger Funktionen mit Hilfe von Hilfssatz (5.1) überträgt sich unmittelbar auf die Integrierbarkeit von Regelfunktionen:

7.9 Satz: *Eine Regelfunktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ist R-integrierbar.*

7.10 Satz: *Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ integrierbar und nach unten beschränkt, und sei $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine Regelfunktion. Dann ist $f \cdot g$ integrierbar.*

Beweis: Indem wir notfalls f durch $f + c$ ersetzen, können wir annehmen, daß $0 \le f$ ist und $K := \int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ und φ_ε eine Treppenfunktion mit $|g(t) - \varphi_\varepsilon(t)| < \varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{2K}$ für alle $t \in [a,b]$. Dann ist

$$(\varphi_\varepsilon - \varepsilon')f \le fg \le (\varphi_\varepsilon + \varepsilon')f \ .$$

Die links und rechts stehenden Funktionen sind nach Korollar (7.7) integrierbar und der Unterschied der Integrale ist

$$\le 2\varepsilon' \int_a^b f(t)\,dt = 2\varepsilon' K = \varepsilon \ .$$

Nach Hilfssatz (5.1) folgt die Behauptung. □

7.11 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung): *Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ integrierbar und ≥ 0. Sei $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in \,]a,b[$ mit*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(\xi) \int_a^b f(t)\,dt \ .$$

Beweis: Sei $m := \min\limits_{t \in [a,b]} g(t)$ und $M := \max\limits_{t \in [a,b]} g(t)$. Dann ist

$$m \int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le M \int_a^b f(t)\,dt \ .$$

Die Funktion

$$\xi \mapsto g(\xi) \int_a^b f(t)\,dt$$

hat das Minimum $m \int_a^b f(t)\,dt$ und das Maximum $M \int_a^b f(t)\,dt$. Als stetige Funktion nimmt sie jeden Zwischenwert an. □

Wir erhalten nun eine weitgehende Verallgemeinerung des ersten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, in welcher die Bedingung an die Stammfunktion gelockert ist:

7.12 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung I*):
Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig und außerhalb der abzählbaren Menge $E \subset [a,b]$ differenzierbar mit Ableitung F'. Sei f definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} F'(t) & \text{für } t \notin E\ , \\ 0 & \text{für } t \in E\ . \end{cases}$$

Dann ist f integrierbar und

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

Bemerkung: Offenbar kommt es nicht darauf an, wie man $f(t)$ für $t \in E$ definiert.

Beweis: Wir schreiben

$$E = \{e_k \mid k \in N \subset \mathbf{N}\}\ .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wollen eine passende Feinheitschranke δ definieren.

Sei zunächst $x \notin E$. Dann wählen wir $\delta(x)$ wie im Einschließungslemma (3.4), so daß für $\xi, \eta \in\ ]x-\delta, x+\delta[\ \cap [a,b]$ gilt:

$$\xi \leq x \leq \eta \Rightarrow |F(\eta) - F(\xi) - F'(x)(\eta - \xi)| \leq \varepsilon \cdot (\eta - \xi)\ . \tag{4}$$

Sei nun $x \in E$, also $x = e_k$ für ein $k \in N$. Da F stetig in x ist, gibt es ein $\delta(x) > 0$, so daß gilt

$$|F(t) - F(x)| < 2^{-k-2}\varepsilon \text{ für } |t - x| < \delta(x)\ .$$

Sei nun $\mathfrak{Z}$ eine δ-feine Zerlegung. Wir schätzen

$$\left|F(b) - F(a) - \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z})\right| = \left|\sum_\nu \left(F(\mathrm{z}_\nu) - F(\mathrm{z}_{\nu-1}) - f(\zeta_\nu)\ell(\mathrm{Z}_\nu)\right)\right|$$

wie folgt ab:

Ist $\zeta_\nu \notin E$, so ist nach Gleichung (4)

$$\left|F(\mathrm{z}_\nu) - F(\mathrm{z}_{\nu-1}) - f(\zeta_\nu)\ell(\mathrm{Z}_\nu)\right| \leq \varepsilon\,(\mathrm{z}_\nu - \mathrm{z}_{\nu-1})\ .$$

Ist aber $\zeta_\nu = e_k \in E$, so ist $f(\zeta_\nu) = 0$ und

$$|F(\mathrm{z}_\nu) - F(\mathrm{z}_{\nu-1})| \leq |F(\mathrm{z}_\nu) - F(\zeta_\nu)| + |F(\zeta_\nu) - F(\mathrm{z}_{\nu-1})| < 2^{-k-1}\varepsilon\ .$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\left|F(b)-F(a)-\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z})\right| &< \sum_\nu \varepsilon(\mathrm{z}_\nu - \mathrm{z}_{\nu-1}) + \sum_k 2^{-k-1}\varepsilon \\ &\le \varepsilon(b-a)+\varepsilon = (b-a+1)\,\varepsilon \ .\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

7.13 Beispiel:

Sei $f : [\,0,1\,] \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \ , \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } x > 0 \ . \end{cases}$$

Dann ist f integrierbar und

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2 \ .$$

Sei nun $g(x) := f(x)^2$. Eine Stammfunktion von $g : [\,0,1\,] \to \mathbf{R}$ ist $\log(x)$. Wenn g integrierbar wäre, so hätte man für ein kleines $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\int_0^1 g(x)\,dx > \int_\varepsilon^1 g(x)\,dx = -\log(\varepsilon) \ ,$$

was wegen $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} (-\log(\varepsilon)) = \infty$ nicht sein kann.

Zum Schluß dieses Abschnitts formulieren wir noch die beste Verallgemeinerung von Teil II des Hauptsatzes, die wir hier aber nicht beweisen wollen:

7.14 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II*):
Sei $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ integrierbar und sei $F : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \ .$$

Dann gibt es eine Nullmenge E, so daß F außerhalb E differenzierbar ist und für $x \notin E$ gilt:

$$F'(x) = f(x) \ .$$

Bemerkung: Es kann durchaus vorkommen, daß F in x differenzierbar ist, aber $F'(x) \neq f(x)$ ist. Ein Beispiel hierfür liefert jede von Null verschiedene Funktion f, die außerhalb einer Nullmenge verschwindet, denn in diesem Fall ist $F = 0$.

8 Funktionenfolgen

8.1 Definition: *Sei $D \subset \mathbf{R}$ und seien $f : D \to \mathbf{R}$ sowie $f_n : D \to \mathbf{R}$ (für $n \in \mathbf{N}$) Funktionen.*

a) *Die Funktionsfolge (f_n) konvergiert auf D punktweise gegen f, wenn für jedes $x \in D$ gilt*
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x)$$

b) *Die Funktionsfolge (f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen f, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbf{N}$ existiert, so daß für alle $x \in D$ gilt*
$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Wir schreiben dann
$$f_n \underset{\text{glm}}{\longrightarrow} f \quad \textit{oder auch} \quad \textit{glm}\text{-}\lim f_n = f \ .$$

8.2 Satz: *Seien $f : D \to \mathbf{R}$ und $f_n : D \to \mathbf{R}$ (für $n \in \mathbf{N}$) mit $f = glm\text{-}\lim f_n$. Sind die f_n stetig, so auch f.*

Beweis: Wir weisen die Stetigkeit von f in $x_* \in D$ nach. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in D$.
Da f_{n_0} stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit
$$|x - x_*| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_*)| < \varepsilon \ .$$
Für $|x - x_*| < \delta$ ist dann
$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_*)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_*)| + |f_{n_0}(x_*) - f(x_*)| \\ &< 3\varepsilon \ . \end{aligned}$$
□

8.3 Satz (von der gleichmäßigen Konvergenz): *Seien $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ und $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ (für $n \in \mathbf{N}$) Funktionen mit $f = glm\text{-}\lim f_n$. Sind die f_n integrierbar, so ist auch f integrierbar, und es ist*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \ .$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und sei $n_0 \in \mathbf{N}$, so daß für alle $x \in [a,b]$ und alle $n \geq n_0$ gilt
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} =: \varepsilon' \ .$$

Sei $\varphi_\varepsilon(x) = f_{n_0}(x) - \varepsilon'$ und $\psi_\varepsilon(x) = f_{n_0}(x) + \varepsilon'$. Dann sind φ_ε und ψ_ε integrierbar, und es gilt

$$\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \quad \text{sowie} \quad \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \leq \varepsilon + \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx\ .$$

Aus Hilfssatz (5.1) folgt nun unmittelbar die Behauptung. □

8.4 Beispiel:

Sei $f_n : [\,0,1\,] \to \mathbf{R}$ definiert durch $f_n(x) = x^n$. Der punktweise Grenzwert der f_n ist die Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 1, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\ . \end{cases}$$

Da f nicht stetig ist, kann die Folge (f_n) nicht gleichmäßig gegen f konvergieren.

8.5 Korollar: *Seien $f_n : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ (für $n \in \mathbf{N}$) integrierbar. Sei $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$, und sei $E \subset [\,a,b\,]$ eine Nullmenge, so daß die Folge (f_n) auf $[\,a,b\,] - E$ gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f integrierbar und*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\ .$$

Beweis: Sei $\chi : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \notin E\ , \\ 0 & , \quad x \in E\ . \end{cases}$$

Sei $g_n(x) = \chi(x) f_n(x)$ und $g(x) = \chi(x) f(x)$. Dann ist $g = \text{glm-lim} g_n$ und $g \underset{\text{f.ü.}}{\equiv} f$.

Nach dem vorigen Satz ist g integrierbar. Es folgt, daß f integrierbar ist und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\ .$$

□

8.6 Satz: *Seien $F_n : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ (für $n \in \mathbf{N}$) stetig. Sei jedes F_n außerhalb einer abzählbaren Menge A stetig differenzierbar mit Ableitung F_n'. Sei $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$, so daß die Folge (F_n') außerhalb A gleichmäßig konvergent gegen f ist. Ferner existiere ein $x_* \in [\,a,b\,]$, so daß die Folge $(F_n(x_*))$ konvergiert.*

Dann konvergiert die Folge (F_n) gleichmäßig gegen ein $F : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$. Diese Funktion ist außerhalb A differenzierbar mit Ableitung $F' = f$.

Beweis: Sei $G_n(x) := F_n(x) - F_n(x_*)$. Dann ist nach dem Hauptsatz I* (7.12) der Differential- und Integralrechnung

$$G_n(x) = \int_{x_*}^{x} F_n'(t)\,dt\ .$$

Nach dem obigen Korollar (8.5) existiert

$$G(x) := \int_{x_*}^{x} f(t)\,dt\ ,$$

und es ist $G(x) = \lim_{n\to\infty} G_n(x)$. Die Konvergenz ist hierbei sogar gleichmäßig, denn ist $|F_n'(t) - f(t)| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und alle $t \in [\,a, b\,] - A$, so folgt $|G_n(x) - G(x)| < \varepsilon(b-a)$ (für alle $x \in [\,a, b\,]$).

Es sei $F(x) = G(x) + \lim_{n\to\infty} F_n(x_*)$. Da f außerhalb A stetig ist, ist F außerhalb A differenzierbar mit Ableitung $F' = f$. $\square$

9 Integration über unbeschränkte Intervalle

Die klassische Theorie des Riemann-Integrals ist zugeschnitten auf beschränkte Funktionen, die auf beschränkten Intervallen definiert sind. Für manche unbeschränkte Funktionen läßt sich die Theorie jedoch leicht erweitern. Man setzt zum Beispiel:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\,[2x^{\frac{1}{2}}]_\varepsilon^1 = 2 \tag{5}$$

oder

$$\int_1^\infty x^{-2}\,dx = \lim_{b\nearrow\infty}\int_1^b x^{-2}\,dx = \lim_{b\nearrow\infty}\,[-x^{-1}]_1^b = 1\ . \tag{6}$$

Diese werden (in der Theorie des Riemann-Integrals) als uneigentliche Integrale bezeichnet.

In der von uns vorgestellten Theorie des Henstock-Integrals ist der Integrand $x^{-\frac{1}{2}}$ aus Beispiel (5) tatsächlich über $[\,0,1\,]$ integrierbar. Wir werden sehen, daß auch jede Funktion, für die ein „uneigentliches" Integral wie in Bespiel (6) existiert, schon selbst integrierbar ist. Unser erstes Ziel muß es dabei sein, die Definition des Integrals auf Funktionen zu erweitern, die auf unbeschränkten Teilintervallen von $\mathbf{R}$ definiert sind. Es wird sich zeigen, daß dazu nur geringfügige Modifikationen an der ursprünglichen Definition nötig sind.

Die folgenden Bezeichnungen und Konventionen werden uns nützlich sein:

Es sei

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}\ .$$

Wir betrachten $\overline{\mathbf{R}}$ als geordnete Menge, wobei für $x,\, y \in \mathbf{R}$ mit $x < y$ gelten soll

$$-\infty < x < y < \infty\ .$$

Sind $a,\, b \in \overline{\mathbf{R}}$ mit $a < b$, so ist

$$]\,a,b\,[\ = \{x \in \overline{\mathbf{R}} \mid a < x < b\} = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}\ .$$

Analog sei dann $[\,a,b\,] \subset \overline{\mathbf{R}}$ definiert durch

$$[\,a,b\,] := \{x \in \overline{\mathbf{R}} \mid a \le x \le b\}\ .$$

Wir betrachten nun, für $a,\, b \in \overline{\mathbf{R}}$ mit $a < b$, Funktionen

$$f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}\ .$$

Damit können wir die Definition einer markierten Zerlegung $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet;\zeta_\bullet)$ von $[\,a,b\,]$ aus Abschnitt 1 wortwörtlich wiederholen. Ebenso werden wir die Definition der Riemannschen Summe $\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z})$ ganz analog formulieren, indem wir einfach nur die beschränkten Intervalle unter den Z_ν für die Riemannsche Summe berücksichtigen.

9.1 Definition: *Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Sei $[\,a,b\,] \subset \overline{\mathbf{R}}$.*

1. *Eine n-Zerlegung $\mathrm{Z}_\bullet = (\mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_n)$ von $[\,a,b\,]$ besteht aus n Intervallen $\mathrm{Z}_\nu = [\,\mathrm{z}_{\nu-1}, \mathrm{z}_\nu\,] \subset \overline{\mathbf{R}}$, wobei gelten soll*
$$a = \mathrm{z}_0 < \mathrm{z}_1 < \mathrm{z}_2 < \ldots < \mathrm{z}_n = b\ .$$
2. *Eine markierte n-Zerlegung ist ein Tupel $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_n; \zeta_1, \dots, \zeta_n)$, wobei $\mathrm{Z}_\bullet = (\mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_n)$ eine n-Zerlegung ist und $\zeta_\nu \in \mathrm{Z}_\nu$ ein „Markierungspunkt". Wir schreiben dann auch $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet; \zeta_\bullet)$.*
3. *Für eine markierte n-Zerlegung $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet; \zeta_\bullet)$ heißt*
$$\mathfrak{S}(f; \mathfrak{Z}) := \sum_{\substack{\nu=1 \\ \mathrm{Z}_\nu \subset \mathbf{R}}}^{n} f(\zeta_\nu)\, \ell(\mathrm{Z}_\nu)$$
die zu $\mathfrak{Z}$ gehörende Riemannsche Summe der Funktion $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$.

Für die Feinheit einer markierten Zerlegung bezüglich einer Feinheitsschranke müssen aber auch die unbeschränkten Intervalle unter den Z_ν berücksichtigt werden. Wir verlangen, daß ihre Größe durch positive reelle Zahlen $\delta(-\infty)$ bzw. $\delta(\infty)$ kontrolliert wird:

9.2 Definition: *Sei $[\,a,b\,] \subset \overline{\mathbf{R}}$. Sei $\delta : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ eine Funktion mit positiven Werten. Die markierte Zerlegung $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet; \zeta_\bullet)$ von $[\,a,b\,]$ heißt δ-fein, wenn gilt:*

1. *Ist $\mathrm{Z}_\nu = [\,-\infty, \mathrm{z}_\nu\,]$, so ist $\zeta_\nu = -\infty$ und $-\infty < \mathrm{z}_\nu < -\delta(-\infty)^{-1}$.*
2. *Ist $\mathrm{Z}_\nu = [\,\mathrm{z}_{\nu-1}, \infty\,]$, so ist $\zeta_\nu = \infty$ und $\delta(\infty)^{-1} < \mathrm{z}_{\nu-1} < \infty$.*
3. *Ist $\mathrm{Z}_\nu = [\,\mathrm{z}_{\nu-1}, \mathrm{z}_\nu\,] \subset \mathbf{R}$, so ist $\zeta_\nu - \delta(\zeta_\nu) < \mathrm{z}_{\nu-1} < \mathrm{z}_\nu < \zeta_\nu + \delta(\zeta_\nu)$.*

Eine markierte Zerlegung ist also genau dann δ-fein, wenn die endlichen Teile $(\mathrm{Z}_\nu, \zeta_\nu)$ im früheren Sinne δ-fein sind und wenn die unendlichen Teilintervalle ganz in
$$[\,-\infty, -\delta(-\infty)^{-1}\,] \text{ bzw. } [\,\delta(\infty)^{-1}, \infty\,]$$
enthalten sind. Wegen des Lemmas von Cousin (2.2) ist damit offensichtlich, daß zu jeder positiven Funktion δ eine δ-feine markierte Zerlegung von $[\,a,b\,]$ existiert. Ferner ist klar, daß für $\delta_1 > \delta$ jede δ-feine markierte Zerlegung auch δ_1-fein ist, denn es ist dann $-\delta(-\infty)^{-1} < -\delta_1(-\infty)^{-1} < 0$ und $0 < \delta_1(\infty)^{-1} < \delta(\infty)^{-1}$.

Die Definition des Integrals ist nun wortwörtlich dieselbe wie früher:

9.3 Definition: *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$. *Sei* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *und* $I \in \mathbf{R}$.
Die Funktion f heißt integrierbar (über $[a,b]$) mit Integral I,

$$\int_a^b f(x)\,dx = I \ ,$$

wenn gilt:

(I) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Feinheitsschranke δ, so daß für jede δ-feine markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a,b]$ gilt*

$$|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) - I| < \varepsilon \ .$$

In diesem Fall nennen wir δ eine ε-Feinheitsschranke für f.

Wieder ist klar, daß der Wert $I = \int_a^b f(x)\,dx$ des Integrals für eine integrierbare Funktion eindeutig bestimmt ist.

Wir geben nun noch diejenigen einfachen Sätze und Lemmata über das Integral an, deren Beweis sich wortwörtlich auf den Fall unbeschränkter Intervalle übertragen läßt. Die Nummer des betreffenden Satzes für die Integration über beschränkte Intervalle ist jeweils in Klammern angegeben. Wir empfehlen, die Beweise an den entsprechenden Stellen noch einmal nachzulesen.

9.4 Satz (1.5): *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$. *Sei* $\mathfrak{I}_a^b$ *die Menge der integrierbaren Funktion auf* $[a,b]$.

1. *$\mathfrak{I}_a^b$ ist ein Untervektorraum des reellen Vektorraums aller reellen Funktionen auf $[a,b]$, und*

$$f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

ist eine lineare Abbildung $\mathfrak{I}_a^b \to \mathbf{R}$.

2. *Sind $f, g \in \mathfrak{I}_a^b$ mit $f \leq g$, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

9.5 Hilfssatz (5.1): *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$ *und* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es integrierbare Funktionen φ_ε, $\psi_\varepsilon : [a,b] \to \mathbf{R}$, so daß gilt:*

$$\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \leq \varepsilon + \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx \ .$$

Dann ist f integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_\varepsilon \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \inf_\varepsilon \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \ .$$

9.6 Lemma (Cauchy-Kriterium, 6.1): *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$. *Eine Funktion* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *ist genau dann integrierbar, wenn gilt:*

(C) *zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert eine Feinheitsschranke* δ, *so daß für je zwei* δ*-feine markierte Zerlegungen* $\mathfrak{Z}'$ *und* $\mathfrak{Z}''$ *von* $[a,b]$ *gilt:*

$$|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}') - \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}'')| < \varepsilon \ .$$

9.7 Satz (6.2): *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$. *Sei* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *integrierbar und sei* $a \le c < d \le b$. *Dann ist auch* $f|_{[c,d]}$ *integrierbar.*

9.8 Satz (6.5): *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$. *Sei* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *und sei* $a < c < b$. *Seien* $f|_{[a,c]}$ *und* $f|_{[c,b]}$ *integrierbar. Dann ist* f *integrierbar auf* $[a,b]$, *und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ .$$

9.9 Satz (7.4): *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$. *Sei* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *und* $f \underset{\text{f.ü.}}{\equiv} 0$. *Dann ist* f *integrierbar und* $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.

9.10 Korollar (7.5): *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$. *Seien* $f,\ g : [a,b] \to \mathbf{R}$ *mit* $f \underset{\text{f.ü.}}{\equiv} g$. *Ist* g *integrierbar, so ist auch* f *integrierbar und* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.

Für den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung vereinbaren wir, daß in der Situation $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$ unter der Stetigkeit einer Funktion $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ die Stetigkeit auf $]a,b[$ zu verstehen ist, verbunden mit der Existenz der Grenzwerte

$$F(a) = \lim_{x \searrow a} F(x) \quad \text{und} \quad F(b) = \lim_{x \nearrow b} F(x) \ .$$

Dann gilt:

9.11 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung I*, 7.12): *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$. *Sei* $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ *stetig und und auf* $[a,b] \cap \mathbf{R}$ *außerhalb der abzählbaren Menge* E *differenzierbar mit Ableitung* F'. *Sei* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *definiert durch*

$$f(t) := \begin{cases} F'(t) & \text{für } t \in [a,b] \cap \mathbf{R} - E \ , \\ 0 & \text{für } t \in E \cup ([a,b] - \mathbf{R}) \ . \end{cases}$$

Dann ist f *integrierbar über* $[a,b]$ *und*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ .$$

Der Beweis des ersten Teils des folgenden Satzes erfordert für Funktionen auf unbeschränkten Intervallen eine leichte Modifikation, die wir im Anschluß an den Satz angeben.

9.12 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II, 6.6): *Sei* $[\,a,b\,] \subset \overline{\mathbf{R}}$*. Sei* $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ *integrierbar und sei* $F : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ *definiert durch*[3]

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \ .$$

Dann gilt:

1. F *ist stetig auf* $[\,a,b\,]$.
2. *Ist* f *stetig im Punkte* $x \in [\,a,b\,] \cap \mathbf{R}$*, so ist* F *differenzierbar in* x *und es ist*

$$F'(x) = f(x) \ .$$

Beweis: In Ergänzung zu unserem früheren Beweis ist nur noch die Stetigkeit von F in den uneigentlichen Punkten $a = -\infty$ bzw. $b = \infty$ zu zeigen.

Sei etwa $a = -\infty$. Im Beweis von Satz (6.6) auf Seite 20 verlangen wir für die reelle Zahl a' nun lediglich, daß

$$-\infty < a' < -\delta(-\infty)^{-1}$$

ist; der Rest des Beweises verläuft dann genauso. □

Der folgende Satz ist in gewisser Weise eine Umkehrung des ersten Teils des vorangehenden Satzes. Er ist auch im Falle beschränkter Intervalle ein wichtiges Resultat, das nicht unmittelbar aus unseren früheren Sätzen folgt.

9.13 Satz: *Sei* $[\,a,b\,] \subset \overline{\mathbf{R}}$ *und* $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$*. Für jedes* c *mit* $a < c < b$ *sei* $f|_{[\,c,b\,]}$ *auf* $[\,c,b\,]$ *integrierbar. Ferner existiere der Grenzwert*

$$I := \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x)\,dx \ .$$

Dann ist $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ *integrierbar, und es ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = I \ .$$

Wir notieren noch das folgende unmittelbare

[3] Im Einklang mit unseren früheren Definitionen sei $F(a) = 0$.

9.14 Korollar: *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$ *und* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. *Für alle* c, d *mit* $a < c < d < b$ *sei* $f|_{[c,d]}$ *auf* $[c,d]$ *integrierbar. Dann ist* f *genau dann auf* $[a,b]$ *integrierbar, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{c \searrow a} \lim_{d \nearrow b} \int_c^d f(x)\,dx$$

existiert. In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \searrow a} \lim_{d \nearrow b} \int_c^d f(x)\,dx \ .$$

Der Beweis von Satz (9.13) erfordert zusätzliche Überlegungen über Feinheitsschranken, die wir zunächst anstellen werden.

9.15 Lemma: *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$. *Sei* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *integrierbar und sei* δ *eine* ε*-Feinheitsschranke für* f. *Sei* $\varepsilon_1 > \varepsilon$, *und sei* $a \le c < d \le b$. *Dann ist* δ *eine* ε_1*-Feinheitsschranke für* $f|_{[c,d]}$.

Beweis: Sei $I_1 = [a,c]$ und $I_2 = [d,b]$. Sei $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon)$. Seien δ_1, δ_2 jeweils eine ε'- Feinheitsschranke für $f|_{I_1}$ und $f|_{I_2}$ mit $\delta_1 < \delta$ und $\delta_2 < \delta$. Sei $\mathfrak{Z}$ eine δ-feine markierte Zerlegung von $[c,d]$. Wir wählen für $\nu = 1,2$ eine δ_ν-feine markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ von I_ν. Insgesamt erhalten wir eine δ-feine markierte Zerlegung $\widetilde{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}^{(1)} \sqcup \mathfrak{Z} \sqcup \mathfrak{Z}^{(2)}$ von $[a,b]$, so daß also

$$\left| \mathfrak{S}(f;\widetilde{\mathfrak{Z}}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

ist. Wegen

$$\mathfrak{S}(f;\widetilde{\mathfrak{Z}}) = \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}^{(1)}) + \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}^{(2)}) + \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z})$$

und der analogen Gleichung für die Integrale folgt nun aus

$$\left| \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}^{(\nu)}) - \int_{I_\nu} f(x)\,dx \right| < \varepsilon' \ ,$$

daß

$$\left| \mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) - \int_c^d f(x)\,dx \right| < \varepsilon + 2\varepsilon' < \varepsilon_1 \ .$$

ist. □

9.16 Lemma: *Sei* $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$ *und* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. *Für jedes* c *mit* $a < c < b$ *sei* $f|_{[c,b]}$ *auf* $[c,b]$ *integrierbar. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und* $\alpha > 0$ *eine positive Funktion*

$$\delta : [a,b] \to \mathbf{R}$$

mit $\delta(a) = \alpha$, *so daß gilt:*

1. *für jedes c mit $a < c < b$ ist die Einschränkung $\delta|_{[c,b]}$ eine ε-Feinheitsschranke für $f|_{[c,b]}$,*
2. *für jede δ-feine markierte Zerlegung von $[a,b]$ ist der Punkt a ein Markierungspunkt.*

Beweis: Sei (c_n) eine streng monoton fallende Folge mit $c_0 = b$ und $\lim c_n = a$. Sei $\varepsilon_n := 2^{-n-1}\varepsilon$. Für jedes n wählen wir eine ε_n-Feinheitsschranke δ_n für $f|_{[c_{n+1},c_n]}$. Sei $\delta(c_0) = \min\{\delta_0(c_0), |c_1 - c_0|\}$ und für $n > 0$

$$\delta(c_n) = \min\{\delta_{n-1}(c_n), \delta_n(c_n), |c_n - c_{n-1}|, |c_n - c_{n+1}|\} \ .$$

Schließlich sei für $c_{n+1} < x < c_n$

$$\delta(x) = \min\{\delta_n(x), |x - c_{n+1}|, |x - c_n|\} \ ;$$

$\delta(a) = \alpha$ ist vorgeschrieben.

Nach Lemma 6.3 folgt nun, daß für jede δ-feine markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}$ eines abgeschlossenen Teilintervalls $J \subset [a,b]$ die Menge $J \cap (\{c_n\} \cup \{a\})$ ganz aus Markierungspunkten von $\mathfrak{Z}$ besteht. Insbesondere ist für jede solche Zerlegung dann $\mathfrak{Z}_n := \mathfrak{Z}|_{[c_{n+1},c_n]\cap J}$ definiert, falls $[c_{n+1},c_n] \cap J \neq \emptyset$ ist.

Ist nun $\mathfrak{Z}$ eine δ-feine markierte Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[c_n, c_0]$, so ist (für $0 \leq j < n$) $\mathfrak{Z}_j := \mathfrak{Z}|_{[c_{j+1},c_j]}$ eine δ_j-feine markierte Zerlegung von $[c_{j+1}, c_j]$. Wegen

$$\mathfrak{S}(f|_{[c_n,c_0]}; \mathfrak{Z}) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{S}(f|_{[c_{j+1},c_j]}; \mathfrak{Z}_j)$$

folgt

$$\begin{aligned} \left|\mathfrak{S}(f|_{[c_n,c_0]}; \mathfrak{Z}) - \int_{c_n}^{c_0} f(t)\,dt\right| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left|\mathfrak{S}(f|_{[c_{j+1},c_j]}; \mathfrak{Z}_j) - \int_{c_{j+1}}^{c_j} f(t)\,dt\right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j = \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j-1}\varepsilon < \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Nach Lemma 9.15 ist folglich für $c \in [c_n, c_0]$ die Einschränkung $\delta|_{[c,b]}$ eine ε-Feinheitsschranke für $f|_{[c,b]}$. □

Wir kommen nun zum Beweis von Satz (9.13).

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein $a' > a$, so daß für $a < z < a'$ gilt

$$\left| \int_z^b f(x)\,dx - \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon \ . \tag{7}$$

Weiter wählen wir eine Funktion

$$\delta : [a,b] \to \mathbf{R} \ ,$$

mit den in Lemma (9.16) angegebenen Eigenschaften. Dabei soll $\delta(a)$, das ja frei wählbar war, so gewählt sein, daß gilt:

1. im Fall $a = -\infty$: $\quad -\delta(-\infty)^{-1} < a'$,
2. im Fall $a > -\infty$: $\quad a + \delta(a) < a'$ und $|f(a)|\,\delta(a) < \varepsilon$.

Sei nun $\mathfrak{Z} = (\mathrm{Z}_\bullet; \zeta_\bullet)$ eine δ-feine markierte Zerlegung von $[\,a, b\,]$. Sei z_1 der rechte Endpunkt des Intervalls Z_1. Der Beitrag dieses Intervalls zur Riemannschen Summe ist Null, falls $a = -\infty$ ist, und vom Betrag

$$|f(a)|\,\ell(\mathrm{Z}_1) \leq |f(a)|\,\delta(a) < \varepsilon \tag{8}$$

andernfalls. In jedem Falle folgt wegen (7) und (8)

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{S}(f;\mathfrak{Z}) - \lim_{c\searrow a}\int_c^b f(x)\,dx\right| &\leq 2\varepsilon + \left|\sum_{\nu>1}\mathfrak{S}(f;\mathrm{Z}_\nu,\zeta_\nu) - \int_{\mathrm{z}_1}^b f(x)\,dx\right| \\ &< 3\varepsilon\ .\end{aligned}$$

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir noch auf diejenigen der früheren Sätze aus den Abschnitten 1 bis 8 aufmerksam machen, die für unbeschränkte Intervalle nicht ohne Modifikationen gültig sind:

1. **(1.8, 5.3, 5.5, 7.9, 7.10, 7.11)** Regelfunktionen[4] und stetige Funktionen brauchen auf unbeschränkten Intervallen nicht integrierbar zu sein, wie das einfache Beispiel der Funktion x^{-1} auf $[\,1, \infty\,]$ zeigt.
2. **(8.3, 8.6)** Satz (8.3) ist im allgemeinen für unbeschränkte Intervalle nicht mehr richtig.

   Zum Beispiel sei $f_k : [\,0, \infty\,] \to \mathbf{R}$ (für $k \in \mathbf{N}_+$) definiert durch $f_k(x) := 0$ für $x > k$ und $f_k(x) := \dfrac{2x}{k^2}$ für $x \leq k$. Dann konvergiert die Folge (f_k) gleichmäßig gegen die Nullfunktion, aber es ist $\int_0^\infty f_k(x)\,dx = 1$ für jedes k, also auch $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^\infty f_k(x)\,dx = 1$.

   In Satz (8.6) ist die wesentliche Aussage davon unabhängig, ob das Intervall $[\,a, b\,]$ beschränkt oder unbeschränkt ist, doch geht im unbeschränkten Fall im allgemeinen die Gleichmäßigkeit der Konvergenz verloren.
3. **(3.1, 3.6, 7.12)** Wie früher in diesem Abschnitt besprochen, muß, falls F nur auf $[\,a, b\,] \cap \mathbf{R}$ als (a.f.ü.) differenzierbare Funktion gegeben ist, für die Formel
   $$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)$$
   im unbeschränkten Fall die Beziehung
   $$F(a) = \lim_{c\searrow a} F(c) \text{ bzw. } F(b) = \lim_{d\nearrow b} F(d)$$
   zusätzlich postuliert werden.

[4] Eine Regelfunktion auf $\overline{\mathbf{R}}$ ist definitionsgemäß wieder ein gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen; dabei wird von einer Treppenfunktion verlangt, daß sie außerhalb eines beschränkten Intervalls verschwindet.

10 Vergleich der Integral-Begriffe

Die in diesem Skript vorgestellte Integrationstheorie ist die Theorie des Henstock-Integrals[5]. Der Deutlichkeit halber wollen wir in diesem Abschnitt eine in diesem Sinne integrierbare Funktion auch H-integrierbar nennen.

Wir wollen in diesem Abschnitt die Unterschiede zur Riemann-Integrierbarkeit und zur Lebesgue-Integrierbarkeit aufzeigen; für diese schreiben wir kurz R-integrierbar bzw. L-integrierbar. Der Einfachheit halber betrachten wir nur Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; ist die Funktion f nur auf dem Intervall $[\,a, b\,]$ definiert, so setzen wir sie auf $\mathbf{R}$ fort durch $f(x) := 0$ für $x \notin [\,a, b\,]$.

10.1 Satz: *$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist genau dann L-integrierbar, wenn die Funktionen f und $|f|$ beide H-integrierbar sind. Ist dies der Fall, so stimmen die Integrale überein.*

10.2 Satz (Lebesgue): *$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist genau dann R-integrierbar, wenn gilt*

1. *f ist beschränkt und außerhalb eines endlichen Intervalls gleich Null.*
2. *f ist außerhalb einer Nullmenge stetig.*

Insbesondere ist jede R-integrierbare Funktion auch L-integrierbar, und die Integrale stimmen überein.

10.3 Satz: *Seien $f,\ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ R-integrierbar. Dann sind auch die folgenden Funktionen R-integrierbar*

$$|f|,\ \max\{f, g\},\ \min\{f, g\},\ f \cdot g\ .$$

10.4 Satz: *Seien $f,\ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ L-integrierbar. Dann sind auch die folgenden Funktionen L-integrierbar*

$$|f|,\ \max\{f, g\},\ \min\{f, g\}\ .$$

Das Produkt zweier L-integierbarer Funktionen braucht nicht wieder L-integierbar zu sein.

Der vorangehende Satz ist für die H-integrierbarkeit nicht richtig. Es gilt:

10.5 Satz: *Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ H-integrierbar.*

1. *Wenn es eine H-integrierbare Funktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gibt mit $|f| \leq g$, so ist f L-integrierbar.*
2. *Ist $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monoton und beschränkt, so ist $f \cdot g$ H-integrierbar.*

Auf die Grenzwertsätze für das H-Integral soll hier nicht eingegangen werden.

[5] auch Henstock-Kurzweil-Integral genannt; da Henstock ganz wesentliche Beiträge zur Ausformulierung der Theorie geleistet hat, wählen wir obige kürzere Bezeichnung.

Literatur

[1] Johann Cigler. *Einführung in die Differential- und Integralrechnung. Teil 1.* Manzsche Verlags- und Universitätsbuchhandlung, Wien, 1978. Vorlesungen über Mathematik. [Lectures on Mathematics].

[2] Johann Cigler. *Einführung in die Differential- und Integralrechnung. Teil 2.* Manzsche Verlags- und Universitätsbuchhandlung, Vienna, 1978. Vorlesungen über Mathematik.

[3] Konrad Königsberger. *Analysis. 1.* Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[4] Konrad Königsberger. *Analysis. 2.* Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] Wolfgang Walter. *Analysis 1.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[6] Wolfgang Walter. *Analysis 2.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

Stichwortverzeichnis

Symbolverzeichnis

A Anhang: Funktionsgraphen

$$F(t) = t^2 \cos(\frac{1}{t^2}) \text{ für } t \neq 0$$

$$f(t) = \frac{2}{t} \sin(\frac{1}{t^2}) + 2t \cos(\frac{1}{t^2}) \text{ für } t \geq 0.1$$