Übungen Analysis I Wintersemester 2007/2008

Blatt 12

Abgabe: 01.02.08 10 Uhr

Aufgabe 1: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion. In $a \in I$ existiere $(f^{(n)})'(a) =: f^{(n+1)}(a)$. Es sei $T_k(f; a)$ das k -te Taylorpolynom von f zur Stelle a .

(a) Sei $r(x)$ für $x \neq a$ definiert durch

$$f(x) - T_{n+1}(f; a)(x) = r(x)(x - a)^{n+1}.$$

Zeigen Sie: $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = 0$. [Hinweis: Benutzen Sie die Regel von l'Hôpital.]

(b) Sei $f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$, aber $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Zeigen Sie: Ist $n + 1$ gerade, so hat f bei a ein strenges lokales Extremum, und ist $n + 1$ ungerade, so hat f bei a einen strengen Wendepunkt.

Aufgabe 2: Finden Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \frac{2x^3 - 2x + 1}{\sqrt{x}} & \text{(b)} \quad x^2 \cos(x^3) & \text{(c)} \quad \frac{x}{\cos^2(x)} \\ \text{(d)} \quad \frac{x + 2}{x^3 - x^2} & \text{(e)} \quad \frac{1}{\cos(x)} & \end{array}$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Integral $\int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$.

Aufgabe 4: (a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx.$$

(b) Sei $x > 0$. Zeigen Sie:

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

(c) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$