Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/Ana1/

Übungen Analysis I Wintersemester 2007/2008

Blatt 11 Abgabe: 25.01.08 10 Uhr

Aufgabe 1: Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimmen Sie durch Induktion über n die n-ten Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$ $(k \in \mathbb{Z})$

(b) $g\colon \mathbb{R} - \left\{\frac{p}{q}\right\} \to \mathbb{R}$. $g(x) = \dfrac{1}{p - qx}$, $p, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$

(c) $h\colon \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$

Aufgabe 2: (a) Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)\,.$$

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ferner sei $f_1 := f$ und $f_n := f \circ f_{n-1}$ für $n > 1$. Bestimmen Sie die Ableitungen aller Funktionen f_k. Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt mit $f(a) = a$. Wie lautet der Wert der Ableitung $f_k'(a)$?

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Taylorreihen $T(f; a)$ der folgenden Funktionen. Geben Sie zu jeder Reihe den Konvergenzradius an.

(a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$, $a = 1$;

(b) $f(x) = \cos^2(x)$, $a = 0$;

(c) $f(x) = xe^x$, $a = 0$.

Aufgabe 4: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Extrema und Wendepunkte.

(a) $f\colon [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;

(b) $f\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^a e^{-x}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$;

(c) $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(nx) + \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$.