Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/Ana1/

# Übungen Analysis I   Wintersemester 2007/2008

Blatt 10 Abgabe: 18.01.08 10 Uhr

---

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche der folgenden Funktionen und berechnen Sie ihre Ableitungen. Geben Sie in jedem Schritt die verwendete Ableitungsregel an.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(b) $g(x) = (x^2-1)^{x^2+1}$

(c) $h(x) = \log\big(-\log(\cos x)\big)$

**Aufgabe 2:** (a) Sei $f\colon ]0,\infty[ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{1-x^2}$. Zeigen Sie, daß $]0,\infty[$ von $f$ bijektiv auf $]0,e[$ abgebildet wird und bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion.

(b) Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen $\arcsin(x)$ und $\arctan(x)$.

**Aufgabe 3:** (a) Benutzen Sie den Mittelwertsatz, um die folgenden Abschätzungen zu beweisen.

(i) $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$ für $x > 0$,

(ii) $1 + x < e^x < \dfrac{1}{1-x}$ für $0 < x < 1$.

(b) Sei $p > 0$. Zeigen Sie, daß das Polynom $x^3 + px + q$ genau eine reelle Nullstelle hat.

**Aufgabe 4:** (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g' \neq 0$. Es gelte $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to b} g(x)$ oder $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to b} g(x)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

falls der rechts stehende Grenzwert existiert.

(b) Seien $f, g\colon [a,\infty[ \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g' \neq 0$. Zeigen Sie die zu (a) analoge Aussage für die Grenzwerte $x \to \infty$.

(c) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \sin x}{x}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{x}$.