Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/Ana1/

Übungen Analysis I Wintersemester 2007/2008

Blatt 9 — Abgabe: 11.01.08 10 Uhr

Aufgabe 1: (a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a,b]) \subset [a,b]$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in U ihr Maximum annimmt. Zeigen Sie, daß f nicht injektiv sein kann.

Aufgabe 2: Seien $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > \frac{1}{n}, \\ 1 - nx & \text{für } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 + nx & \text{für } -\frac{1}{n} \leq x \leq 0. \end{cases}$

Zeigen Sie:

(a) Jedes f_n ist stetig, und für alle n und alle x gilt $0 \leq f_n(x) \leq 1$.

(b) Für jedes x konvergiert die Folge $\big(f_n(x)\big)_n$. Definiere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Ist f stetig an der Stelle 0?

Aufgabe 3: (a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Hyperbelfunktionen:

(i) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$,

(ii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,
$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

(b) Zeigen Sie, daß die folgenden Abbildungen bijektiv sind:

$$\begin{aligned} \sinh(x)\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \cosh(x)\colon [0,\infty[&\longrightarrow [1,\infty[\\ \tanh(x)\colon \mathbb{R} &\longrightarrow]-1,1[\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit.

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = |x|$.

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x|x|$.

(c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

(d) $f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$