

Übungen Analysis I Wintersemester 2007/2008

Blatt 8

Abgabe: 21.12.07, 10 Uhr

Aufgabe 1: Formulieren Sie Definitionen der Aussage $\lim_{x \rightarrow x_*} f(x) = a$ für

- (a) $x_* \in \mathbb{R}$, $a = \infty$,
- (b) $x_* = \infty$, $a \in \mathbb{R}$,
- (c) $x_* = \infty$, $a = \infty$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die (eventuell uneigentlichen) Grenzwerte

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-k} e^x$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x}$,
- (c) $\lim_{x \searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}}$,
- (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{e^x} - 1}{e^x}$.

Aufgabe 3: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $f(x + y) \leq f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$,
- (ii) $f(0) = 1$,
- (iii) f ist an der Stelle 0 stetig.

Zeigen Sie, daß f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 4: (a) Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nur abzählbar viele Werte annimmt. Zeigen Sie: f ist konstant.

- (b) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$. An welchen Stellen ist f stetig?