Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/Ana1/

Übungen Analysis I   Wintersemester 2007/2008

Blatt 7 | Abgabe: Freitag, 14.12.07, 10 Uhr (!)

Aufgabe 1: Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} x^k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} 2^{\binom{k}{2}} x^k$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^{3k}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{2^k}$

Aufgabe 2: Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Finden Sie eine Potenzreihe $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $f(x)g(x) = 1$ und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten.

Aufgabe 3: Seien $E \subset D$ Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Zeigen Sie: Ist x_* ein Häufungspunkt von E, so ist x_* auch Häufungspunkt von D. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die umgekehrte Implikation.

(b) Sei x_* ein Häufungspunkt von E. Zeigen Sie:

$$\lim_{\substack{x \to x_* \\ x \in D}} f(x) = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\substack{x \to x_* \\ x \in E}} f(x) = a\,.$$

(c) Finden Sie ein Beispiel mit $\lim_{x \searrow x_*} f(x) \neq \lim_{x \nearrow x_*} f(x)$.

Aufgabe 4: In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

(a) $f(x) = \begin{cases} |x|^{-1}x & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^k} & \text{für } x = \dfrac{2n+1}{2^k},\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$