Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/Ana1/

Übungen Analysis I Wintersemester 2007/2008

Blatt 6 | Abgabe: Freitag, 7.12.07

Aufgabe 1: Sei (a_k) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

Aufgabe 2: (a) Sei (a_k) eine monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie: die Reihe $\sum\limits_{k\geq 1}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right)$ konvergiert genau dann, wenn (a_k) beschränkt ist.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{C}$) konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a^k - a^{k-1})$, und falls sie konvergiert, was ist der Grenzwert?

Aufgabe 3: Sei (a_k) eine Folge positiver reeller Zahlen und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$. Was läßt sich über die Konvergenz der folgenden Reihen aussagen?

(a) $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ (c) $\sum \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$

(b) $\sum \frac{a_k}{1+k a_k}$ (d) $\sum \frac{a_k}{1+a_k^2}$

Aufgabe 4: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz.

(a) $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ (c) $\sum\limits_{k\geq 1}\left(\sqrt[k]{3}-1\right)^k$

(b) $\sum\limits_{k\geq 1}(-1)^k \frac{2+(-1)^k}{k}$ (d) $\sum\limits_{k\geq 0}(-1)^k \frac{k+1}{2k\sqrt{k}}$

Aufgabe 5: Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Konvergiert $\sum a_k$, so auch $\sum a_k^2$.

(b) Konvergiert $\sum a_k$ absolut, so auch $\sum a_k^2$.