Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

`www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/Ana1/`

Übungen Analysis I   Wintersemester 2007/2008

Blatt 5 | Abgabe: Freitag, 30.11.07

Aufgabe 1: (a) Es sei (a_n) eine monotone Folge. Beweisen Sie: jeder Häufungswert von (a_n) ist auch Grenzwert von (a_n).

(b) Sei $n \mapsto a_n$ eine Anordnung von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß jede reelle Zahl Häufungswert der Folge (a_n) ist.

Aufgabe 2: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so daß für ein $C \in \mathbb{R}$ mit $0 \le C < 1$ gilt: $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Folge (z_n) definiert durch $z_0 = a$ und $z_{n+1} = f(z_n)$. Beweisen Sie:

(a) $|z_{n+1} - z_n| \le C^n |z_1 - z_0|$.

(b) (z_n) ist eine Cauchy-Folge.

(c) Sei $z = \lim z_n$. Dann gilt $f(z) = z$.

(d) z ist unabhängig von a.

Aufgabe 3: Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.

(a) Seien $(a_{\varphi(k)})$ und $(a_{\psi(k)})$ zwei konvergente Teilfolgen mit $\{\varphi(k) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi(k) \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Zeigen Sie: haben die beiden Teilfolgen den gleichen Grenzwert a, so konvergiert auch (a_n) gegen a.

(b) Es seien (a_{2n}), (a_{2n+1}) und (a_{3n}) konvergent. Konvergiert dann auch (a_n)? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 4: Sei $\sum a_k$ die Reihe, die aus der harmonischen Reihe entsteht, wenn man sämtliche Glieder streicht, deren Nenner in Dezimalschreibweise die Ziffer 9 enthält. Konvergiert diese Reihe?

Aufgabe 5: Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{k\ge1}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ (c) $\displaystyle\sum_{k\ge1}\big(k(k+1)(k+2)\big)^{-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k\ge1}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ (d) $\displaystyle\sum_{k\ge0}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$