Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/Ana1/

Übungen Analysis I   Wintersemester 2007/2008

Blatt 4 | Abgabe: Freitag, 23.11.07

Aufgabe 1: Sei y eine reelle Zahl mit $0 < y < 1$. Beweisen Sie durch Induktion über n die folgenden Ungleichungen:

$$(1-y)^n \leq \frac{1}{1+ny} \tag{1}$$

$$\sum_{k=-n}^{n} y^k \geq 2n+1 \tag{2}$$

Aufgabe 2: Sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Seien die Folgen (b_m), (c_m) definiert durch $b_m := \sup\{a_n \mid n \geq m\}$ sowie $c_m := \inf\{a_n \mid n \geq m\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Folgen (b_m) und (c_m) sind konvergent.

(b) (a_n) konvergiert genau dann, wenn $\lim\limits_{m\to\infty} b_m = \lim\limits_{m\to\infty} c_m$ ist.

Aufgabe 3: (a) Sei (a_n) eine gegen a konvergente Folge positiver reeller Zahlen. Sei $r \in \mathbb{Q}_+$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^r = a^r .$$

(b) Seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit $a_n \geq b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $s_n := a_n + b_n$, $d_n := a_n - b_n$ und $p_n := a_n b_n$. Beweisen Sie: Konvergieren zwei der drei Folgen (s_n), (d_n), (p_n), so auch die dritte.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, daß die unten angegebenen Rekursionsformeln wohldefinierte Folgen liefern. Untersuchen Sie diese Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+x_n}, \quad x_0 = a > 0$

(b) $x_{n+1} = \dfrac{2+x_n}{1+x_n}, \quad x_0 = a > 0$

(c) $x_{n+1} = -\dfrac{1+x_n}{x_n}, \quad x_0 = a > 0$

(d) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a + x_n^2), \quad x_0 = a \in]0,1[$