Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
`www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/Ana1/`

Übungen Analysis I Wintersemester 2007/2008

Blatt 3 Abgabe: Freitag, 16.11.07

Aufgabe 1: Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \ |x^2 - 9| < 1\} \qquad C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|x - \tfrac{1}{n}\right| \leq \tfrac{3}{n}\right\}$$

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R} \mid \ \tfrac{1}{n} - 1 \leq x \leq 1 - \tfrac{1}{n}\right\} \qquad D = \left\{\tfrac{2^n}{n!} \mid \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

Aufgabe 2: Seien A und B beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

(b) Die Menge $C := \{x \mid x = y + z \text{ mit } y \in A \text{ und } z \in B\}$ ist beschränkt und es gilt
$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

(c) Sei $A \cap B \neq \varnothing$. Dann ist $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

Aufgabe 3: (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{1+2i}\,, \qquad \text{(ii)}\quad \frac{2i+3}{1-5i}\,, \qquad \text{(iii)}\quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^k,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

(b) Es seien $a, z \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Zeigen Sie: $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1 \iff |z| < 1.$

Aufgabe 4: Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = 2^n \cdot n^{-2}$

(b) $a_n = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$

(c) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(d) $a_n = \sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+k)},\ k \in \mathbb{N}$ fest

Aufgabe 5: (a) Zeigen Sie: Jede Folge reeller Zahlen enthält eine monotone Teilfolge.

(b) Konstruieren Sie eine Nullfolge (x_n) und geeignete Folgen (a_n), (b_n), (c_n) und (d_n), so daß gilt: $(x_n \cdot a_n)$ ist eine Nullfolge, $(x_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen 1, $(x_n \cdot c_n)$ ist unbeschränkt, und $(x_n \cdot d_n)$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.