

SEMINAR TOPOLOGIE SS 2008: DUALITÄT

Ein etwas ausführlicheres Programm für das Seminar. Manche Vorträge können in einer Doppelstunde gehalten werden, andere wohl eher nicht, aber besonders schwierig sind sie alle nicht.

Als Grundlage dienen die Bücher von Massey [M] und Hatcher [H]; teilweise sind sie sich sehr ähnlich. Eine weitere Quelle ist Greenberg-Harper [GH]; das Buch von Switzer, das ich ansonsten gerne empfehle, ist für unsere Zwecke weniger geeignet.

Mögliche Vorträge:

1. Produkte
- [2. Mannigfaltigkeiten]
3. Orientierungen
4. Poincaré-Dualität
5. Alexander-Dualität
6. Mannigfaltigkeiten mit Rand

Vortrag 2 sollten wir eher weglassen; es wird eigentlich nur die Definition einer Mannigfaltigkeit gebraucht.

Vortrag 1: Produkte

Wiederholung cup-Produkt? Inneres Produkt = Auswertungsabbildung. Slant-Produkte. Das cap-Produkt. Eine Sitzung.

Literatur: Massey [M], Kapitel XIII

Genauer: (Seien stets K, L Kettenkomplexe und M, N Moduln über einem Ring R)

[0. Wiederholung cup-Produkt (kann auch weggelassen werden).]

1. Inneres Produkt (hatten wir eigentlich schon): Definiere

$$\text{Hom}_R(K_p, M) \otimes (K_p \otimes N) \xrightarrow{\langle -, - \rangle} M \otimes N$$

durch $\langle \varphi, x \otimes n \rangle = \varphi(x) \otimes n$. Wegen $\langle \delta \varphi, x \rangle = \langle \varphi, dx \rangle$ induziert dies einen Homomorphismus

$$H^p(\text{Hom}_R(K, M)) \otimes H_p(K; N) \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} M \otimes N;$$

insbesondere $H^p(X; M) \otimes H_p(X; N) \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} M \otimes N$ für einen Raum X .

2. Slant-Produkte: für $\varphi \in \text{Hom}_R(L_p, M)$ und $u = x \otimes y \otimes n \in (K \otimes L)_q \otimes N$ bzw. $\psi \in \text{Hom}_R(K \otimes L, M)$ und $v = y \otimes n \in L_q \otimes N$ definiere

(i) $\text{Hom}_R(L_p, M) \otimes (K \otimes L)_q \otimes N \xrightarrow{- \setminus -} K_{q-p} \otimes M \otimes N$ durch $\varphi \setminus u := (-1)^{|\varphi| \cdot |x|} x \otimes \langle \varphi, y \rangle \otimes n$;

(ii) $\text{Hom}_R((K \otimes L)_p, M) \otimes (L_q \otimes N) \xrightarrow{- / -} \text{Hom}_R(K_{p-q}, N)$ durch $(\psi / v)(x) = \langle \psi, x \otimes y \rangle \otimes n$.

Nachrechnen: $\delta(\varphi \setminus u) = (\delta \varphi) \setminus u + (-1)^{|\varphi|} \varphi \setminus du$ bzw. $\delta(\psi / v) = (\delta \psi) / v + (-1)^{|\psi| - |v|} \psi / dv$. Also werden durch (i) und (ii) Homomorphismen in Homologie induziert. Für Raumpaare (X, A) und (Y, B) sind dadurch die slant-Produkte definiert:

Definition 1. (i) $H^p(Y, B; M) \otimes H_q((X, A) \times (Y, B); N) \xrightarrow{- \setminus -} H_{q-p}(X, A; M \otimes N)$;
(ii) $H^p((X, A) \times (Y, N); M) \otimes H_q(Y, B; N) \xrightarrow{- / -} H^{p-q}(X, A; M \otimes N)$.

Lemma 2. Die slant-Produkte sind natürlich.

Lemma 3. (a) $(u \times v) \setminus w = u \setminus (v \setminus w)$ (analog für $/$).

(b) Für $v \in H_q(X \times Y)$ gilt $1 \setminus v = \text{pr}_{X*}(v)$.

3. Das cap-Produkt: Definition via slant-Produkt: (A_1, A_2) ausschneidend, $\Delta: (X, A_1 \cup A_2) \rightarrow (X \times X, A_1 \times X \cup X \times A_2)$ die Diagonale.

Definition 4. $\cap: H^p(X, A_1; M) \otimes H_q(X, A_1 \cup A_2; N) \rightarrow H_{q-p}(X, A_2; M \otimes N)$ gegeben durch $u \cap v = u \setminus \Delta_*(v)$,

Lemma 5. *Eigenschaften:*

- (i) *Natürlichkeit;*
- (ii) $(u \cup v) \cap w = u \cap (v \cap w)$;
- (iii) $(u_1 \times u_2) \cap (z_1 \times z_2) = (-1)^{\dots} (u_1 \cap z_1) \times (u_2 \cap z_2)$.
- (iv) $\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \setminus w \rangle$ bzw. $\langle u \cup v, w \rangle = \langle u, v \cap w \rangle$.

Vortrag 2: Mannigfaltigkeiten

Wenn überhaupt: Wiederholung der Definitionen. Mannigfaltigkeiten mit Rand. Das Kragenlemma ([H, Proposition 3.42]). Diesen Vortrag sollten wir eigentlich weglassen, da dies alles (bis auf das Kragenlemma) bekannt ist.

Vortrag 3: Orientierungen

Ein etwas längerer Vortrag, möglicherweise mehr als eine Sitzung.

Literatur: Massey [M], Kapitel XIV Hatcher [H], 3.3, S. 233ff.

Lemma 1. M eine n -Mfg., $x \in M$. Dann gilt $H_i(M, M - x) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Definition 2. (Massey XIV.2.1, und Hatcher für (c))

- (a) Lokale Orientierung
- (b) globale Orientierung
- (c) Orientierungsüberlagerung $\widetilde{M} \rightarrow M$

Beispiele.

Proposition 3. (Proposition 3.25 in Hatcher [H]). M zshgd. Dann gilt: M orientierbar $\Leftrightarrow \widetilde{M}$ hat zwei Komponenten.

Definition 4. R -Orientierbarkeit und $\widetilde{M}_R \rightarrow M$.

Satz 5. (Massey XIV.2.2) M eine n -Mfg., $K \subset M$ kompakt. Dann existiert $\mu_K \in H_n(M, M - K; R)$, so daß $\rho_{x*}(\mu_K) = \mu_x$ für alle $x \in M$.

Bemerkung: eine globale Orientierungsklasse μ_M kann es für nichtkompaktes M nicht geben. Benutze $H_k(M) = \operatorname{colim}_K H_k(K)$.

Beweis des Satzes mit

Lemma 6. (Massey XIV.2.3, bzw. Hatcher 3.27)

- (a) $H_i(M, M - K; R) = 0$ für $i > n := \dim M$;
- (b) $u \in H_n(M, M - K; R)$, $\rho_{x*}(u) = 0 \ \forall x \in K \Rightarrow u = 0$.

Korollar 7. M geschlossene zshgde n -Mfg.

- (a) M ist R -orientierbar $\Rightarrow H_n(M; R) \cong R$.
- (b) M nicht R -orientierbar $\Rightarrow H_n(M; R)$ ist die 2-Torsion in R .

Bemerkung: Jede Mfg. ist $\mathbb{Z}/2$ -orientierbar.

Korollar 8. Hatcher 3.28

Vortrag 4: Poincaré-Dualität

Auch ein längerer Vortrag.

Literatur: Massey [M], XIV.3+4, Hatcher [H], S. 242ff

Definition 1. Koketten mit kompaktem Träger, Kohomologie mit kompaktem Träger $H_c^*(X; R)$.

Lemma 2. Interpretation als direkter Limes: $H_c^q(X; R) \cong \operatorname{colim}_{K \subset X \text{ kp.}} H^q(X, X - K; R)$.

Beispiele.

Erläuterung der Dualitätsabbildung $D: H_c^q(M; R) \rightarrow H_{n-q}(M; R)$.

Satz 3 (Poincaré-Dualität). Die Dualitätsabbildung D ist ein Isomorphismus.

Vielleicht noch ein paar Anwendungen aus Massey XIV.5; Kohomologie projektiver Räume.

Vortrag 5: Alexander-Dualität

Kohomologie von Komplementen. Je nachdem, wieviel man über Čech-Kohomologie erzählt, ein längerer oder kürzerer Vortrag.

Literatur: Massey XIV.6, Hatcher hier nicht so geeignet.

Definition 1. Čech-Kohomologie $\check{H}^*(X; R)$.

Bemerkungen:

(1) Čech-Kohomologie erfüllt alle Eilenberg-Steenrod-Axiome.

(2) Čech-Kohomologie erfüllt das Ausschneidungsaxiom sogar in einer verschärften Fassung: Sei $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung mit $f(X - A) \cong Y - B$ (homöomorph). Dann ist $\check{H}^*(f)$ iso.

(3) Aus (1) folgt: $\check{H}^*(X) \cong H^*(X)$, falls X homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex ist.

(4) Barratt-Milnor-Beispiel: $X = \bigcup_n S^2(\frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}^3$ mit $S^2(\frac{1}{n}) =$ Sphäre mit Radius $\frac{1}{n}$ und Mittelpunkt $(\frac{1}{n}, 0, 0)$. Dann gilt $H^3(X) \neq 0$, aber $\check{H}^3(X) = 0$ sowie $\check{H}^2(X) = \bigoplus_{\infty} \mathbb{Z}$.

Lemma 2. M kompakt orientierbare n -Mfg., $A \subset M$ abgeschlossen. Dann gibt es einen Isomorphismus $\check{H}^q(A; R) \xrightarrow{\cong} H_{n-q}(M, M - A; R)$.

Beispiel. Dies ist falsch in singulärer Homologie: $M = \mathbb{R}^2 \cup \infty = S^2$, $A =$ polnischer Kreis = Graph von $\sin(1/x) \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \cup \infty$.

Lemma 3. M kompakte, orientierbare n -Mfg., $A \subset M$ abgeschlossen $\Rightarrow \check{H}^q(A; R) = 0 \ \forall q \geq n$.

Beispiel. Wieder falsch für singuläre Kohomologie; Barratt-Milnor-Beispiel.

Satz 4 (Alexander-Dualität). Sei M eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare n -Mannigfaltigkeit, $q \in \mathbb{Z}$ mit $H_q(M; R) = H_{q+1}(M; R) = 0$. Dann gilt:

(a) $A \subset M$ abgeschlossen $\Rightarrow \check{H}^{n-q-1}(A; R) \cong H_q(M - A; R)$.

(b) $A \subsetneq M$ abgeschlossen und $H_1(M; R) = 0 \Rightarrow \check{H}^{n-1}(A; R) \cong \check{H}_0(M - A; R)$.

(c) $A \subset M$ abgeschlossen $\Rightarrow \check{H}^0(A; R)$ hat einen direkten Summanden R . Falls $H_{n-1}(M; R) = 0$, so ist $\check{H}^0(A; R)/R \cong H_{n-1}(M - A; R)$.

Beispiele. (1) $M = S^n$, $A \subset S^n$ abgeschlossen: $\check{H}^{n-q-1}(A) \cong H_q(S^n - A)$ und $\check{H}^{n-q-1}(A) \cong \check{H}_q(S^n - A)$ ($0 < q < n - 1$).

(2) $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Rightarrow \check{H}^{n-q-1}(A) \cong \check{H}_q(\mathbb{R}^n - A)$.

(3) Spanier-Whitehead-Dualität?

Vortrag 6: Mannigfaltigkeiten mit Rand

Der Dualitätssatz von Lefschetz. Eine Sitzung, denke ich.

Falls Vortrag 2 doch unbedingt gehalten werden soll, fängt Vortrag 6 erst nach Lemma 2 an.

Vielleicht ist Vortrag 2 plus Vortrag 6 eine gute Kombination?

Literatur: Massey XIV.7, Hatcher S.252ff

Definition 1. Mfg. mit Rand.

Lemma 2. (*Hatcher 3.42*) Existenz von Kragenumgebungen.

Korollar 3. $M - \partial M \hookrightarrow M$ ist eine Homotopieäquivalenz.

Korollar 4. *Massey 7.3.*

Korollar 5. *Massey 7.4:* $H_c^q(M - \partial M; R) \cong H^q(M, \partial M; R)$

Definition 6. $(M, \partial M)$ -Orientierung.

Satz 7 (Lefschetz-Dualität I). $H^q(M, \partial M; R) \xrightarrow{-\cap \mu_M} H_{n-q}(M; R)$ iso.

Satz 8. M orientierbar $\Rightarrow \partial M$ orientierbar.

Satz 9 (Lefschetz-Dualität II). $H^q(M; R) \xrightarrow{-\cap \mu_M} H_{n-q}(M, \partial M; R)$ iso.

- [BM] M. Barratt, J. Milnor. An example of anomalous singular homology. *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 293–297.
- [GH] M. J. Greenberg, J. T. Harper. Algebraic Topology. A first course. Mathematics Lecture Notes Series, 58. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981.
- [H] A. Hatcher. Algebraic Topology. <http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html>
- [M] W. S. Massey. A Basic Course in Algebraic Topology. Graduate Texts in Mathematics 127. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.
- [S] R. M. Switzer. Algebraic topology—homotopy and homology. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 212. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.