Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze und das Hilbertsche Programm einer "finiten" Beweistheorie

Erhard Scholz, Wuppertal

1. Vorbemerkungen

In diesem Beitrag geht es um den Entstehungskontext der Gödelschen Sätze aus mathematikhistorischer Sicht. Die Frage, was das mit der späteren Debatte um die "künstliche Intelligenz" zu tun hat, wird nicht direkt diskutiert. Allerdings wirft die historische Darstellung auch Licht auf die Frage, welche Bedeutung die Gödelschen Resultate der 1930er Jahre (± 1 Jahr) für die philosophische Selbstauffassung der Mathematik hatte und kann dadurch auch von Interesse für die Frage dieser Tagung sein.

Da der historische Kontext der Gödelschen Forschungen das von David Hilbert (1862 – 1843) im ersten Drittel des vergangenen Jahrhunderts vorgeschlagene und in den Anfängen aufgebaute Fundierungsprogramm der Mathematik war, handelt ein großer Teil dieses Beitrages von diesem Programm. Hier werden keine Spezialkenntnisse in Logik und Grundlagenforschung vorausgesetzt (für Logiker mag die Darstellung entsprechend vage erscheinen). Es handelt sich hier, dem Zweck der Tagung entsprechend, um einen Überblicksvortrag.

Das Hilbertsche Programm für eine, wie er glaubte, endgültige und unbestreitbare Sicherung der Grundlagen der Mathematik entwickelte sich in mehreren Phasen. Die erste lässt sich von etwa 1900 bis 1918 datieren (Teil 2). Danach gab es einen Einschnitt durch die notwendig werdende Auseinandersetzung mit den konstruktivistischen und intuitionistischen Gegenpositionen, wie sie von L.E.J. Brouwer und Hilberts ehemaligen Schüler H. Weyl ab etwa 1918 vorgetragen wurden (Teil 3). Hilbert entwickelte in den 1920er Jahren eine zunächst sehr erfolgreich erscheinende Beweistheorie mit symbolischen Mitteln, die er als "finit" bezeichnete (obwohl sie das in strikter Auslegung des Wortes nie war). Im Hilbertschen Umfeld glaubte man gegen Ende der 1920er Jahre, den gewünschten Widerspruchsfreitheitsbeweis für die klassische Arithmetik mit "finiten" Mitteln durch Beiträge W. Ackermanns und J. von Neumanns vorliegen zu haben oder ihm wenigstens zum Greifen nahe zu sein. Jedoch war unklar, was dieses "nahe" eigentlich beinhaltete (Teil 4).

Durch die Gödelschen Beiträge von 1930/1931 wurde sehr scharf herausgearbeitet, dass zumindest die von Hilbert proklamierte Interpretation der Ergebnisse, die in seinem Programm der finiten Beweistheorie von W. Ackermann und J. von Neumann erzielt worden waren, nicht aufrecht erhalten werden konnte (Teil 5). Es wurde daher eine Neuinterpretation dessen nötig, was in Hilberts "finiter" Beweistheorie tatsächlich erreicht worden war, was überhaupt auf diese Weise erreichbar sein konnte und wie die "finiten" Methoden gegebenenfalls (transfinit!) zu erweitern waren, um die erwünschten Konsistenzbeweise überhaupt führen zu können.

Dies führte zu einer Krise für das Hilbertsche Fundierungsprogramm der Mathematik, die sich im Ergebnis allerdings als sehr fruchtbar erwies. Sie leitete eine nach-Hilbertsche Phase der mit erweiterten Mitteln arbeitenden Beweistheorie ein, mit neuen interessanten Ergebnissen bis heute. Des weiteren wurde durch nachfolgende Beiträge Gödels und anderer Grundlagenforscher (G. Gentzen, A.Tarski u.a.) eine Auflösung der inhaltlichen Gegensätze der verschiedenen "Fraktionen" der Grundlagenforscher erreicht, deren polemisch ausgetragene Zuspitzung in den 1920er Jahren als *Grundlagenkrise der Mathematik* empfunden wurde. Darin liegt m.E. aus mathematikhistorischer Sicht die Hauptbedeutung der Gödelschen Resultate; hier kann das allerdings nur angedeutet werden (Teil 6). Für genauere Informationen ist die mathematik- und logikhistorische Literatur zu konsultieren.

2. Anfänge des Hilbertschen Fundierungsprogramm (1900 – 1918)

D. Hilbert entwickelte sein Fundierungsprogramm in mehreren Stufen (I: 1900 – 1918, II: 1918 – 1930, III: 1930 ff.), in Kontrast zu wechselnden Opponenten (I: Frege und Poincaré; II: Brouwer und Weyl; III: Gödel (nur noch indirekt)). Im Hintergrund schien für ihn immer der "Geist" Leopold Kroneckers zu stehen. Er suchte und fand die Unterstützung von jüngeren Mathematikern und Logikern, die er zur Arbeit an seinen programmatischen Ideen gewinnen konnte (I: F. Bernstein, E. Zermelo; II: P. Bernays (auch schon am Ende von Phase I), W. Ackermann, J. von Neumann; III: P. Bernays, K. Schütte, G. Gentzen (indirekt)). Er stellte seine Überlegungen zur Grundlegung der Mathematik in einer Reihe wissenschaftlicher Vorträge vor, die als Dokumente und Marksteine für die Entwicklung seiner Ideen dienen können. Als wichtige Markierungen sind die drei Internationalen Mathematiker-Kongresse in Paris (1900), Heidelberg (1904) und Bologna (1928) zu nennen, sowie wichtige Vorträge in Kopenhagen/Hamburg 1922/23 und in Königsberg 1930.

Seine berühmte, auf dem 2. Internationalen Mathematiker-Kongress in Paris im Jahr 1900 vorgestellte Liste *Mathematische Probleme* (insgesamt 26)[1] eröffnete Hilbert mit Cantors *Kontinuumsproblem*. Dieses galt ihm zu dieser Zeit als wichtigstes ungelöstes Problem der von G. Cantor im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts entworfenen transfiniten Mengenlehre. Er formulierte es ganz in Cantors Stil:

> Ist die Mächtigkeit jeder Teilmenge der reellen Zahlen $A \subset \mathbb{R}$ derjenigen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder der der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gleich: Gibt es also nur die Alternative $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ oder $|A| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph}_0$?

[1]Siehe (Hilbert 1900*a*) und (Gray 2000)

Hilbert erläuterte, welche Bedeutung dieses Ergebnis für die transfinite Mengenlehre allgemein hätte:

> Aus diesem Satz würde zugleich folgen, daß das Kontinuum die nächste Mächtigkeit über die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen hinaus bildet ... (Hilbert 1900*a*, 35)

Als ein ergänzendes Problem erwähnte er noch unter Punkt 1 seiner Liste die von Cantor zunächst als selbstverständlich, später als beweisbar (und sogar mehrfach kurzzeitig als "bewiesen") angesehene Frage nach der *Wohlordenbarkeit* jeder (transfiniten) Menge.

Als zweites Problem nannte Hilbert die "Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome". Er erläuterte kurz die Vorgehensweise der *axiomatischen Methode* im Aufbau einer mathematischen Theorie, wie er sie kurz zuvor in den Grundlagen der Geometrie ausgeführt hatte (Hilbert 1898), insbesondere die Rolle eines Nachweises der *Unabhängigkeit* und der *Widerspruchlosigkeit* der betrachteten Axiome. Dabei machte er deutlich, dass für ihn die "Existenz" einer mathematischen Theorie und der zugehörigen Begriffe mit dem Nachweis ihrer Widerspruchslosigkeit (Konsistenz) zusammenfiel.

Hilbert verstand die hier als widerspruchsfrei nachzuweisende "Arithmetik" im Sinne einer von ihm kurz vorher formulierten Axiomatik der *rellen* Zahlen (Hilbert 1900*b*). Er drückte seine Überzeugung aus, dass es möglich sei, die Konsistenz dieser "arithmetischen Axiome" (also derjenigen der reellen Zahlen) auf direktem Weg, nicht wie in der Geometrie durch Bezug auf eine andere als grundlegender angenommenen mathematische Theorie, durchzuführen. So glaubte er, schrittweise zu Beweisen der Widerspruchslosigkeit der Arithmetik (von $\mathbb{R}$),der Funktionen (relle Analysis) und schließlich der höheren transfiniten Zahlenklassen der Cantorschen Mengenlehre gelangen zu können (Hilbert 1900*a*, 39).

Zur Zeit des Pariser Vortrages (1900) war für Hilbert die Fundierung der Arithmetik im strikten Sinne der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ nicht der Rede wert. Sie erschien ihm anscheindend als grundsätzlich unproblematisch, obwohl sich Mathematiker und Logiker schon seit einigen Jahrzehnten auf verschiedene Weise daran versucht hatten, sie zu sichern:

- L. Kronecker setzte sie als Anfangsgrund der Mathematik voraus (Hilbert bezeichnte das ab 1904 als "dogmatisch"),
- G. Cantor schlug einen Weg vor, sie aus seiner transfiniten Ordinal- und Kardinalzahllehre durch Spezialisierung auf endliche Mengen zu gewinnen,
- G. Peano formulierte für die natürlichen Zahlen Axiome (speziell das *Nachfolger-* und das *Induktionsaxiom*),
- G. Frege, B Russell suchten nach einer Gewinnung aus allgemeinen Klassenbegriffen der reinen Logik

R. Dedekind stand zwischen den letzten drei Ansätzen und lieferte mit seiner berühmten Schrift 1872 Ausgangsmaterial sowohl für Peanos Axiomatisierung als auch für die späteren rein logischen Begründungsversuche. Umstritten war im Jahr 1900 nicht die Arithmetik als mathematische Basistheorie, sehr wohl aber die Cantorsche transfinite Mengenlehre und der "richtige" Zugang zum rellen Kontinuum, sofern dieser nicht überhaupt in Frage gestellt wurde, wie etwa von L. Kronecker. Das erklärt Hilberts Formulierung des zweiten Pariser Problems.

Schon im folgenden Jahr änderte sich die Lage durch Russells Entdeckung der Möglichkeit widersprüchlicher Mengenbildungen, wenn die Mengenlehre rein logisch verwendet wurde (in einem Brief vom 16. 6. 1902 an Frege mitgeteilt, publiziert 1903). Eine rein begriffslogische Fundierung der Mathematik wurde damit schon in ihrer arithmetischen Basisstufe fragwürdig.[2] Die Debatte weitete sich daraufhin schnell aus.

Im Jahre 1905 formulierte J. Richard semantische Paradoxien der Mengenlehre. Ein Jahr darauf (1906) zog H. Poincaré seine Schlussfolgerung, dass sogenannte "imprädikative" Definitionen als Wurzel des Übels in der Mathematik zu vermeiden seien. Kurz und leicht vergröbernd gesagt, schlug er vor, mathematische Begriffe und Objekte nur zuzulassen, wenn sie in einem symbolisch-konstruktiven Aufbau gewonnen werden konnten. Als *imprädikativ* sollten Definitionen angesehen — und damit aus seiner Sicht vermieden — werden, wenn sie unter Bezugnahme auf ein schon als extensional abgeschlossen vorausgesetzte transfinite Gesamtheit, zu der das Definiendum gehörte, erfolgte. Für den Aufbau der Analysis hätte das einschneidende Folgen.

Hilbert war anderer Meinung. Er wandte sich ausdrücklich und vehement gegen eine Einschränkung der zulässigen mathematischen Definitions- und Schlussweisen. Schon vor der Poincaréschen Zuspitzung, kurz nach Entdeckung der Russellschen Antinomie, bot ihm der 3. Internationale Mathematiker-Kongress eine Gelegenheit, sein Fundierungsprogramm von 1900 tiefer anzusetzen:

> Während wir heute bei den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie über die einzuschlagenden Wege und die zu erstrebenden Ziele im wesentlichen untereinander einig sind, ist es mit der Frage nach den Grundlagen der Arithemetik anders bestellt, hier stehen sich gegenwärtig noch die verschiedenen Strömungen der Forscher schroff gegenüber. (Hilbert 1904, 174)

Hilbert deutete in seinem Vortrag an, wie er glaubte, die Arithmetik durch ein axiomatisch reguliertes Formelsystem rein formal so aufbauen zu können, dass sie *evidenterweise* nie zu einem Widerspruch führen kann. Nach einer knappen Skizzierung eines Formelsystems, durch das er die elementare Arithmetik (ohne Induktion !) charakterisierte und eine eine kurze metatheo-

[2]Vegleich dazu u.a. (Ferreiros 1999).

retische Reflexion, was damit erreicht werden konnte, zog er die Schlussfolgerung:

> Wgen der (...) gefundenen Eigenschaften der Axiome erkenn wir, daß dieselben überhaupt nie zu einem Widerspruch führen, ... Die eben skizzierte Betrachtung bildet den ersten Fall, in dem es gelingt, den direkten Nachweis der Widerspruchslosigkeit von Axiomen zu führen, während die sonst — insbesondere in der Geometrie — für solche Nachweise übliche Methode der geeigneten Spezialisierung oder Bildung von Beispielen hier notwendig versagt. (Hilbert 1904, 181)

Diese Vortrag kann als Gründungsdokument des (später erst so genannten) Programms einer *formalistischen Begründung* der Mathematik angesehen werden. Freilich war hier alles noch in embryonaler Form; Axiome und Schlussregeln bildeten eine Einheit, es gab (bei Hilbert) noch keine formalisierte Logik. Es ging ihm hier zunächst um strikt finite Teile der Arithmetik, das Induktionsprinzip wurde nur per Analogie erwähnt (Hilbert 1904, 185), jedoch nicht in die Analyse mit einbezogen. Die eigentlichen Schwierigkeiten selbst für die Arithmetik in $\mathbb{N}$ blieben also noch völlig unangetastet. Nichtsdestotrotz schloss Hilbert seinen Vortrag höchst sicher und optimistisch mit einer Serie von Ankündigungen, denen er die Form von Behauptungen gab:

> Ähnlich wie die Existenz des kleinsten Unendlich [$\aleph_0$ und damit $\mathbb{N}$ als Menge, E.S.] bewiesen werden kann, folgt die Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen: in der Tat sind die Axiome, wie ich sie für die reellen Zahlen aufgestellt habe, genau durch solche Formeln ausdrückbar, wie die bisher aufgestellten Axiome. ...In gleicher Weise zeigt sich, daß den Grundbegriffen der Cantorschen Mengenlehre, insbesondere den Cantorschen Alefs die Widerspruchsfreiheit zukommt. (Hilbert 1904, 185)

Obwohl dies alles so klang, als ob die Probleme schon gelöst wären, war Hilbert natürlcih klar, dass es sich um programmatische Ankündigungen handelte. So regte er junge Mathematiker an, das angedeutete Programm auszuarbeiten. Ernst Zermelo (1871 – 1953), der schon im Wintersemester 1900/01 in Göttingen vor 7 Hörern eine Vorlesung zur Mengenlehre gehalten hatte (die erste überhaupt, F. Hausdorff hielt im Sommer 1902 in Leipzig die zweite), stellte noch im selben Jahr (1904) einen "Beweis" für den Satz auf, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. Dabei sah er das Auswahlprinzip stillschweigend als selbstverständlich an. Vier Jahre später stellte er die erste Axiomatik der Mengenlehre inklusive des nun zu einem Axiom erhobenen Auswahlprinzips (AA) auf (Zermelo 1908).

Hermann Weyl (1885 – 1955), der sich bis dahin ausschließlich mit Fragen der Analysis beschäftigt hatte, hielt seinen Göttinger Habilitationsvortrag

1910 über die Problematik der Definitionen mathematischer Grundbegriffe. Dabei verwies er schon zu dieser Zeit darauf, dass die *Definitionsprinzipien*, mittels derer aus den rein axiomatisch fixierten Grundbegriffen einer mathematischen Theorie neue Objekte und Beziehungen gebildet werden, selber durch präzise Regeln festzulegen sind. Dies müsse jedoch komplementär zu "anschaungsmäßiger" Interpretierbarkeit geschehen, wodurch erst die "Wahrheit" der Sätze gewährleistet werde (Weyl 1910, 300, 304). Später wurde diese Forderung durch eine formalsprachliche Fassung der Theorie und ihrer Definitionsprinzipien realisiert. Weyl selber liefert in seiner Schrift über das Kontinuum einen ersten Beitrag in diese Richtung (Weyl 1918); dies geschah aber schon in scharfer Abgrenzung vom Grundlegungsprogramm seines ehemaligen Lehrers.

Hilbert selber entwickelte sein Programm in diversen Vorlesungen und Seminaren weiter (SS 1905, 1908, 1910, 1917, WS 1917/18). Er setzte diese Serie in der ersten Hälfte der 1920er Jahre weiter fort, mit wesentlicher Unterstützung durch Paul Bernays (1888 – 1977), den er als Assistenten aus Zürich nach Göttingen (zurück) geholt hatte. Die Ausarbeitungen von Hilberts Veranstaltungen sind erhalten. Bisher ist wenig von ihnen publiziert, wenn wir von dem späteren Buch (Hilbert 1928) absehen, in das der logische Teil des Materials seiner frühen Lehrveranstaltungen eingegangen ist. Historisch arbeitende Grundlagenforscher und Logiker haben die Ausarbeitungen aber eingehend untersucht.[3] Die Rolle P. Bernays' bei der Formulierung und Ausgestaltung der Hilbertschen Vorlesungen war beträchtlich; vieles geht wohl auf ihn als eigentlichen Autor zurück.

Die Vorlesung vom WS 1917/18 "Prinzipien der Mathematik" war in zwei Teile gegliedert, Teil A: Axiomatische Methode, Teil B: Mathematische Logik. Die Ausarbeitung der Logik war dabei stark an Russell orientiert, allerdings aus Hilbert (und Bernays') Sicht abgeändert. Thema war der Aussagenkalkül, der "eingeschränkte Funktionalkalkül" (später als Prädikatenlogik erster Stufe bezeichnet) als Teil des weiteren "Funktionalkalküls" (Prädikatenlogik höherer Stufe). Große Teil der Inhalts von (Hilbert 1928) wurden hier zum erstenmal vorgestellt. W. Sieg sieht in der Vorlesungsmitschrift den "literally first text presenting the core of modern logic with its distinctive metamathematical turn" (Sieg 2000, 99).

Hilbert unterschied hier deutlich zwischen Semantik und Syntax. Der Logikkalkül selbst wurde axiomatisiert und die Fragen nach der Widerspruchsfreiheit. der logischen Unabhängigkeit und der Vollständigkeit für die Prädikatenlogik (den "Funktionalkalkül") selbst formuliert. Zentral und unbefragt erschien auf allen Stufen des Kalküls das Prinzip des *Tertium non datur*, $A \vee \neg A$.

Hilberts Arbeiten waren also bis zum Ende des Weltkrieges ein gutes

[3] Eine Edition aus Hilberts Vorlesungsmitschriften ist in Arbeit. Ich stütze mich hier auf (Sieg 2000).

Stück voran gekommen. Insbesondere hatte er mit Bernays' Unterstützung die Logik so formalisiert, wie es für die Durchführung der 1904 in Heidelberg formulierten Programmskizze eines Widerspruchsfreiheitsbeweises der nicht-elementaren Teile der Arithmetik und andere transfinite Teile der Mathematik (Analysis und Mengenlehre) notwendig erschien. Dies geschah parallel zu Arbeiten anderer Mathematiker, insbesonder H. Weyl und L.E.J. Brouwer, die aus anderen methodischen Vorstellungen heraus begonnen hatten, die Grundlagenfragen der Mathematik zu stellen und auf ihre Weise zu beantworten.

3 Exkurs: Brouwers intuitionistische Mathematik

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966) hatte als junger Mathematiker bahnbrechende Arbeiten zur Topologie verfasst: 1905 löste er das fünfte Hilbert-Problem für 1-dimensionale Liegruppen. 1911 gelang ihm der Nachweis der Invarianz der Dimension von Mannigfaltigkeiten unter stetigen Abbildungen. Durch die Einführung "simplizialen" Methoden revolutionierte er die zeitgenössische Topologie. Er bewegte sich in romantisch-lebensreformerischen Zirkeln, beteiligte sich an der "Signifik"-Bewegung, deren Ziel eine tiefgreifende Sprachreform mit Erfindung neuer Wörter war, um besseres Verstehen als mit der alten Sprache zu ermöglichen. So sollte eine ganzheitliche Lebensweise gefördert werden. Er stamd in Kontakt mit Intellektuellen wie R. Rolland, F. Mauthner, G. Peano, R. Tagore u.a.(van Dalen 1999ff.).

Ab 1918 begann L.E.J. Brouwer über eine *intuitionistische*, das heißt ganz auf inhaltliche Evidenz, nicht auf formale Absicherung, ausgerichtete Begründung der Mathematik zu publizieren. Brouwer sah die Mathematik als eine wesentlich auf Evidenzeinsicht gegründete sprachfreie mentale Struktur an. Inhaltliche Evidenz schien ihm nicht nur für (strikt) finite Teile der Mathematik möglich, sondern auch für gewisse transfinite Teile, wenn man nur der logischen Eigenständigkeit des Argumentierens mit dem Unendlichen gerecht wurde. Dies setzte allerdings seiner Ansicht nach eine Kritik an der Übertragung des Tertium non datur auf unendliche Objektbereiche voraus. Wahrheit sollte ja auf Evidenz beruhen, nicht auf der Anwendung rein formaler Schlussregeln, selbst wenn diese nicht zu Widersprüchen führten. Schloss die Beurteilung des Wahrheitswertes einer Aussage eine transfinite Variable ein, so gab es nach Brouwer keinen evidenten Grund mehr dafür, von einer strikten Alternative zwischen "falsch" und "wahr" für das Ergebnis auszugehen.

Dabei war die von Brouwer beanspruchte "Evidenz" ein höchst subjektives und damit prekäres Kriterium für die Grundlegung einer Wissenschaft wie der Mathematik. Ein Grundaspekt der Brouwerschen Kritik lässt sich aber zumindest modellartig nachvollziehen, wenn Wahrheit im Sinne der späteren Effektivität (Berechenbarkeit) verstanden wird. Auch dann tritt der Effekt auf, dass nicht jede Aussage "wahr" (beweisbar) oder "falsch" (widerlegbar) ist. Hier gibt es als *Tertium* die effektive Unentscheidbarkeit. Brouwers intuitives Wahrheitskonzept verhielt sich in dieser Hinsicht ähnlich, obwohl es nicht mit Berechenbarkeit/Effektivität im späteren Sinne zusammenfiel. Die intuitionistisch gültige, "evidentermaßen" zutreffende Argumentation im Unendlichen bedurfte damit einer eingehenden Untersuchung und Neufassung. Insbesondere erschien die Cantorsche Mengenlehre und die Übertragung der klassischen Logik auf das Transfinite aus intuitionistischer Sicht unbefriedigend und am Kernproblem der mathematischen Evidenz selbst dann völlig vorbeigehend, wenn der Nachweis gelingen sollte, diese ohne Widersprüche aufbauen zu können.

In den Jahren 1918 und 1919 erschienen die ersten Publikationen zum Aufbau eines eingeschränkten, intuitionistisch vertretbaren Umgehens mit dem Unendlichen. Dazu führte Brouwer das Konzept einer unbeschränkt fortsetzbaren, aber stets nur im Sinne eines potentiell Uendlichen fixierten "Wahlfolge" ein. Darauf gründete er seine Theorie des intuitionistischen Kontinuums und der intuitionistischen "Mengenlehre". Dieses Wort bedeute allerdings nun etwas ganz anderes als in der klassisch-modernen, an Cantor anschließenden Mathematik. Eine intuitionistische "Menge" bedurfte einer komplizierten Beschreibung aus einer (später so genannten) "Ausbreitungsregel" (spread law) und einer adjungierten "Zuordnungsregel" (complementary law) für eine Wahlfolge.

Hier ist nicht der Ort für eine Diskussion der spezifischen Vorgehensweise in Brouwers Konzept der intuitionistischen Mathematik.[4] Wichtig sind in unserem Kontext jedoch folgende Gesichtspunkte, die Brouwers Auffassung der Mathematik gegenüber derjenigen Hilberts auszeichnete:

– Für Brouwer war Mathematik inhaltliches Wissen, das von bloßen Zeichenfolgen himmelweit verschieden war; ihre Realität lag nicht im geschriebene Zeichen sondern in einer nicht auf anderes reduzierbare mentalen Struktuir.

– Er lehnte das Tertium non datur nicht wegen der Befürchtung ab, dass dessen uneingechränkte (aber formal korrekte) Anwendung eventuell zu Widersprüchen führen könnte, sondern weil dem Prinzip die inhaltliche Evidenz fehlt.

– Für ihn waren Mengen (etwa reeller Zahlen) nur akzeptabel , wenn sie durch eine "intuitiv nachvollziehbare" Regel ("Wahlfolge") erzeugt wurden.

– Natürlich lehnte er das Unendliche in der Mathematik keineswegs ab, sondern lediglich dessen Zuspitzung und aus seiner Sicht Überdehnung in der Cantorschen transfiniten Mengenlehre (samt unbeschränkter Anwendung des Tertium non datur).

[4] Siehe dazu (van Dalen 1999ff.)

– Akzeptabel waren für ihn im Unendlichen nur intuitionistisch begründbare Existenzaussagen und Allaussagen.

Natürlich führte diese Auffassung zu einer starken Einschränkung der zugelassenen Schlussweisen in der Mathematik, insbesondere der Analysis ("intuitionistisches Kontinuum"), und zu einer modifizierten Arithmetik. Die intuitionistische Arithmetik blieb aber immer noch sehr ausdrucksstark, wie eine spätere Überlegung Gödels zu einem Widerspruchsfreiheitsbeweis der ("klassischen") Peano-Arithmetik relativ zur intuitioistischen Arithmetik zeigen sollte (Gödel 1933).

Gegen Ende des Jahres 1919 ließ sich H. Weyl von Brouwers Perspektive überzeugen und gab (zeitweise) sein eigenes Programm einer arithmetisch-konstruktiven ("prädikativen") Begründung eines Teilsystems der Analysis (Weyl-Kontinuum) von 1918 auf. Im Zeitraum von etwa 1920 bis 1922 wurde er zu einem überzeugten Vertreter des Brouwerschen Grundlagenprogramms und verfasste eine deutlich gegen Hilberts Grundlagenprogramm gerichte Streitschrift "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik" (Weyl 1921). Hilbert reagierte unmittelbar und ebenso polemisch auf diese Herausforderung. Den Kontrahenten im ausgerufenen *Grundlagenstreit* ging es nicht nur um die Mathematik als Spezialdisziplin, sondern um die mathematische Rationalität als Paradigma der intellektuellen Moderne. Sie führten die Auseinandersetzung daher so, als ginge es in ihren Forschungen und Differenzen um die Krise und Aufrechterhaltung oder Niedergang der "modernen Kultur" überhaupt. Die geführte Polemik war dementsprechend durchsetzt mit offenen Metaphern der politischen und sozialen Konflikte der frühen Weimarer Republik. Weyl bemerkte in seiner Eröffnung des Artikels:

> Die Erklärungen, welche von berufener Seite über [die Antinomien der Mengenlehre, E.S.] abegeben werden, tragen aber fast alle nicht den Charakter einer aus völlig durchleuchteter Evidenz geborenen, klar auf sich ruhenden Überzeugung, sondern gehören zu jener Art von halb bis dreivierte ehrlichen Selbsttäuschungsversuchen, denen man im politischen und philosophischen Leben so oft begegnet.... (Weyl 1921, 143)

Er berichtete über Grenzstreitigkeiten des "Reiches" (hier der mathematischen Analysis) und über Brouwer, der die "Revolution" verkörpere.

Hilbert hielt dagegen, inhaltlich und rhetorisch. In Vorträgen, die er 1921/22 in Kopenhagen und Hamburg hielt, bestritt er vehement, dass Weyls und Brouwers Vorgehen eine "Revolution" für die Mathematik bedeuteten. Er erklärte die beiden kurzerhand zu bloßen "Putschisten" ohne jede Chance, gegen die mit Mittteln der modernen Logik ausgerüstete "Staatsmacht" angehen zu können. Er warnte vor absehbaren Konsequenzen des "Putsch"-Versuchs:

> Weyl und Brouwer ... suchen die Mathematik dadurch zu begründen, daß sie alles ihnen unbequem Erscheinende über Bord werfen und eine Verbotsdikatur à la Kronecker errichten. Das heißt aber, unsere Wissenschaft zu zerstückeln und verstümmeln, und wir laufen Gefahr, einen großen Teil unserer wertvollen Schätze zu verlieren, wenn wir solchen Reformern folgen. ... (Hilbert 1922, 157)

Bis in die Wortwahl hinein war Hilberts Polemik von Weltkriegserfahrungen geprägt ("zerstückeln und verstümmeln" ...). Darauf kann ich an dieser Stelle nur kurz hinweisen; mehr findet man dazu in (Mehrtens 1990) und (Schappacher 2002).

4. Hilberts Programm der "finiten" Beweistheorie (1920 – 1930)

Im Wintersemester 1920 begann Hilbert mit der Unterstützung durch P. Bernays in seiner Vorlesung "Logikkalkül" mit einem vollformalisierten Aufbau der Arithmetik, bestehend aus Peano-Axiomen und einem Untersystem der Prädikatenlogik 2. Stufe)

Weyl lehnte in seinem Krisen-Artikel (Weyl 1921) dagegen die Verwendung der Schlussweisen der (erst später so genannten) Prädikatenlogik 1. Stufe ab, insbesondere das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten für das Unendliche. Dies führte nach seiner, von Brouwer beeinflussten Auffassung zu einem sorglosen Umgang insbesonder mit Existenzaussagen, die er häufig überhaupt nicht als Urteile "im eigentlichen Sinne" ansehen wollte: (Abstrakte) Existenzialurteile sah er als eine "leere Erfindung der Logiker"an. Es handele sich bei ihnen genau besehen um bloße "Urteilsabstrakte", vergleichbar dem Papiergeld in der Volkswirtschaft. In diesem Lichte erschien ihm die moderne Mathematik wie eine "Papierwirtschaft"; während die Mathematiker zu wenig an die Einlösung des "Papiergeldes" dachten. Er forderte die Setzung anderer Prioritäten:

> Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweis geführte Konstruktion. (Weyl 1921, 156f.)

Trotz aller polemischer Zurückweisung der Vorschläge Brouwers und Weyls ging Hilbert auf die Kritik an der bedenkenlosen Verwendung des Tertium non datur ein. In (Hilbert 1923) akzeptierte er Brouwers und Weyls Warnung vor einer naiven Übertragung dieses Prinzips auf unendliche Bereiche. Er schlug nun vor, dieses durch ein "transfinites Axiom" abzusichern, in dem die Verwendung einer Prädikatenauswahlfunktion postuliert wurde:

> **(τ)-Axiom:** Es gibt eine Prädikatenauswahlfunktion τ, die jedem Prädikat 1. Stufe A im betrachteten Objektbereich ein Individuum $\tau(A)$ zuordnet, so dass stets folgende Formel gilt:
>
> $$A(\tau(A)) \longrightarrow A(x)$$

Das war eine Formalisierung der (fiktiven) Möglichkeit einen logischen "schlechtesten Fall" für jedes Prädikat A zu betrachten: Gilt A für $\tau(A)$, so gilt A für beliebige Objekte x. Gilt A für mindestens ein Objekt nicht, so wählt τ ein solches Gegenbeispiel aus und die im Axiom angegebene Implikation bleibt logisch korrekt.

Hilbert hoffte, gewissermaßen in einer Grätsche die konstruktivistische oder intuitionistische Kritik aushebeln zu können. Auf einer "offiziellen" Ebene akzeptierte er die Kritik an der bedenkenlosen Übertragung des Tertium non datur (ohne allerdings an *dieser Stelle* die Namen Brouwer oder Weyl zu erwähnen). Mit dem (τ)-Axiom und einem avisierten Nachweis, dass dessen Einführung die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems nicht zerstört, beabsichtigte er jedoch die Einführung eines funktionellen Äquivalentes in folgendem Sinne:

> Das (τ)-Axiom erlaubt die Ableitung der Negationsregeln der Quantoren 1. Stufe:
>
> $$\neg \bigwedge A(x) \longleftrightarrow \bigvee \neg A(x)$$
>
> $$\neg \bigvee A(x) \longleftrightarrow \bigwedge \neg A(x)$$

"Inoffiziell" ging es Hilbert um die mitgelieferte Botschaft, dass eine kompromisslose Verteidigung der Cantorschen transfiniten Begriffe als legitimes Feld der Mathematik, unabhängig von der philosophischen Auffassung des jeweiligen Mathematikers oder der Mathematikerin möglich ist. Er verwies darauf in klaren interpretierenden Worten, begleitend zu den formalen Ausführungen:

> Das transfinite Axiom (...) ist als Urquell aller transfiniten Begriffe, Prinzipien und Axiome anzusehen. (Hilbert 1923, 183)

Etwas später ersetzte Hilbert im übrigen die ursprüngliche Fassung des transfiniten Axioms durch eine "positive" Auswahl, gewissermaßen des logischen Best-Falles, der in die Mengenlehre übertragen dem Auswahlaxiom entspricht.

> **(ϵ)-Axiom:** Es gibt eine Prädikatenauswahlfunktion ϵ, die jedem Prädikat 1. Stufe A im betrachteten Objektbereich ein Individuum (Objekt) ϵA zuordnet, so dass stets folgende Formel gilt:
>
> $$A(x) \longrightarrow A(\epsilon A)$$

Für die Erweiterung eines formalen Systems durch dieses Axiom war ein Widerspruchsfreiheitsbeweis zu führen, wenn es gelang, die Elimination von in Ableitungen auftretenden ϵ-Terme in folgendem Sinne zu kontrollieren:

> Ist die Formel $0 = 1$ Endformel in einer Ableitung mit ϵ-Termen, so auch in einer gültigen Ableitung des betrachteten formalen Systems, in der kein ϵ-Term auftritt.

Konnte man diese Schlussfolgerung inhaltlich einsichtig machen, war gezeigt, dass ein widerspruchsfreies System $\mathcal{S}$ durch Hinzufügung des (ϵ)-Axioms zum System $\mathcal{S}'$ kein Widerspruch erzeugt werden kann.

In den späten 1920er Jahren schien es, als könnten die Hilbertschen Hoffnungen wahr werden. Wilhelm Ackermann (1896 – 1962) führte in seiner Dissertation bei Hilbert, wie er und sein Lehrer zunächst glaubten, eine Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Peano-Arithmetik. Die von ihm zugrunde gelegte ϵ-Logik im Stile Hilberts entsprach der Prädikatenlogik 1. Stufe; jedoch waren die in Ackermanns Analyse erfassten Ausdrücke in der Induktion eingeschränkt auf "primitiv rekursive" Funktionen (bzw. daraus aufgebaute Prädikate), wie sich später herausstellte. Außerdem war die Analyse der Elimination der ϵ-Terme intuitiv gehalten und lediglich vage ausgeführt.

So war es leicht zu übersehen, dass die Elimination nicht in endlich vielen Schritten und auch nicht durch eine metatheoretische ("gewöhnliche", das heißt bis zur ersten Cantorschen transfiniten Ordinalzahl $\omega := \omega_0$ laufende) Induktion beherrscht werden kann. Aus späterer Sicht (Gentzen 1936) wurde klar, dass bei einer Anordnung über wohlgeordnete Schrittfolgen der Elimination von ϵ-Termen eine sogenannte "transfinite" Induktion bis zur Ordinalzahl

$$\epsilon_0 := \text{Limeszahl von} \quad \omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}} \ldots$$

nötig war.

Tatsächlich war Hilbert schon seit mindestens 1923 zur Auffassung gekommen, dass die von ihm postulierte "finite Einstellung" in der Beweistheorie auch die Einsicht in das Hantieren mit unendlich-schrittige Zeichenketten mit einschließt. Dies ging auch aus seinen öffentlich gehaltenen Vorträgen hervor (Hilbert 1926, Hilbert 1930, Hilbert 1931). Insofern konnte Ackermann in seiner Beweisskizze auf unendliche Eliminationsketten in den Beweisfiguren rekurrieren, ohne den Rahmen der Hilbertschen "finiten" Einstellung offensichtlich zu überschreiten. Allerdings blieb zunächst ganz unklar, welche transfiniten Schlussweisen in der Metatheorie als unzweifelhaft (und in Hilberts Sinne als mit der "finiten Einstellung" übereinstimmend) angesehen werden sollten und welche nicht.

In der zweiten Hälfte der 1920er Jahre galt im Umfeld der Göttinger Mathematik der Widerspruchsfreiheitsbeweis im Rahmen der Hilbertschen "finiten" Einstellung als im wesentlichen erreicht. Es schienen nur kleinere Verbesserungen und Ergänzungen notwendig zu sein, um die Einschränkung im Induktionsaxiom aufzuheben und die Eliminationsargumentation klarer herauszuarbeiten. Aus späterer Sicht lag aber gerade in letzteren eine tiefgreifende Selbsttäuschung. Darüberhinaus war der von Hilbert ursrpünglich proklamierte strikt finite Standpunkt der beweistheoretischen Metatheorie aufgeweicht worden, und es fehlte eine Klärung dessen, was im Rahmen der Metatheorie als legitime transfinite Schlussweisen angesehen werden sollte. Insbesondere blieb höchst unklar, was genau bei der transfiniten Erweiterung für die Elimination der ϵ-Terme zugelassen werden musste. Das änderte sich auch nicht grundsätzlich durch Verbesserung des Ackermannschen Beweisansatzes von 1924 durch J. von Neumann und W. Ackermann in den Jahren 1927 und 1928.

Im Jahr 1928 ging Hilbert auf den 5. Internationalen Mathematiker-Kongress in Bologna und verkündete (nun immerhin schon 66-jährig) den Erfolg der ersten Stufe seines Programms eines "finiten" Widerspruchsfreiheitsbeweises der klassischen Arithmetik (Hilbert 1930).

Er begrüßte in dem Vortrag die Hinwendung einer Reihe jüngerer Mathematiker zur axiomatischen Methode (er nannte hier namentlich E. Zermelos Axiomatisierung der Mengenlehre), verwies aber darauf, dass eine "endgültige Lösung der Grundlagenprobleme (...) durch dieses axiomatische Verfahren niemals möglich" sei, weil die innermathematisch verwendete axiomatische Methode immer auf inhaltlichen Annahmen beruhten (Hilbert 1930, 3). Er ergänzte warnend:

> Wenn wir aber inhaltliche Axiome als Ausgangspunkte und Grundlagen für die Beweise benutzen, so verliert die Mathematik damit den Charakter der absoluten Sicherheit. (ebda.)

Damit wandte er sich noch einmal gegen die Evidenzforderungen der intuitionistischen Kritiker, die gerade die inhaltliche Gewissheit zum Hauptkriterium ihres mathematischen Wahrheitsbegriffes machen wollten. Hilbert behauptete dagegen, durch seinen formalen Zugang zu "absoluter Sicherheit" kommmen zu können.

> Mit dieser Neubegründung der Mathematik, die man füglich als eine Beweistheorie bezeichnen kann, glaube ich die Grundlagenfragen der Mathematik als solche endgültig aus der Welt zu schaffen, indem ich jede mathematische Aussage zu einer konkret aufweisbaren und streng beweisbaren Formel mache und dadurch den ganzen Fragenkomplex in die Domäne der reinen Mathematik versetze. (ebda.)

Das mathematische Denken sollte sich also nach Hilberts Konzeption seiner selbst versichern können. Insbesondere schien es ihm nun sicher, dass mit seiner Methode des ϵ-Axioms der Zugang für eine ganze Serie weiterer Widerspruchsfreiheitsbeweise geschaffen war. Für deren Durchführung forderte er die "hingebende Mitarbeit der jüngeren Mathematikergeneration". Als nächste Aufgaben nannte Hilbert insbesondere die Konsistenzbeweise für:

- die imprädikativen Definitonen der Peanoschen Zahlenlehre (aus mengentheoretischer Sicht ging es hier um die völlig freie Verwendung der Potenzmenge von $\mathbb{N}$),

– die Theorie der reellen Zahlen als Fundament der Analysis,

– der Analysis insgesamt und der Topologie.

Des weiteren stellte er die Forderung auf, die syntaktische Vollständigkeit der vollformalisierten Peano-Arithmetik und damit im "engsten Zusammenhang auch" die Entscheidbarkeit der Arithmetik zu beweisen. Für die Analysis solle man ähnlich vorgehen, allerdings ließ Hilbert hier ("für höhere Gebiete") die Möglichkeit offen, dass die Axiome ggfs. nicht vollständig sein könnten.

Hilbert räumte zwar ein, dass viele Probleme "noch der Lösung harren", fuhr aber im Tone höchster Sicherheit fort, es sei im allgemeinen und prinzipiellen Sinne "nicht mehr die leiseste Spur einer Unklarheit möglich". Er betonte dabei, dass es um weit über die Mathematik hinaus weisende Fragen gehe. Er beklagte das Vordringen kulturpessimistischer Strömungen ("Zweifelsucht und Kleinmut gegenüber den Wissenschaften"), die seiner Ansicht nach neuerdings bis in Fachzeitschriften hinein Ausdruck erhielten, und griff den darin liegenden "Okkultismus" scharf an:

> Die Beweistheorie macht eine solche Einstellung unmöglich und verschafft uns das Hochgefühl der Überzeugung, daß wenigstens dem mathematische Verstande keine Schranken gezogen sind und dap er sogar die Gesetze des eignen Denkens aufzuspüren vermag. (Hilbert 1930, 9)

Dies waren Worte der Grandiosität und des Anspruche auf Letzt-Sicherung. Die kritische Reflexivität, wie sie von H. Weyl oder in etwas anderer Ausrichtung von L.E.J. Brouwer einfordert worden war, wollte er "a limine", wie Hilbert an einer Stelle formulierte (ebda., p.8), ausschließen. Darüber hinaus machte er klar, dass er seinen radikalen Rationalismus als kulturellen Kampf (gegen "Zweifelsucht"und "Okkultismus") verstand, den er auch mit unverhülltem Machtanspruch im wissenschaftlichen Diskurs durchzusetzen bereit war.

Der kämpferische Ton Hilberts war keineswegs nur Rhetorik. Kurz nach dem Bologna-Kongress leistete er seinen fachpolitischen Beitrag zum Kampf gegen die angegriffene "Zweifelsucht" etc., indem er in der Redaktion der *Mathematischen Annalen* eine Krise herbeiführte, in derem Resultat sein grundlagentheoretischer und fachpolitischer Gegner L.E.J. Brouwer aus der Redaktion herausgeworfen wurde. Hilbert verblieb danach vertragsmäßig als einziger Herausgeber, der sich selber weitere Mitherausgeber nach eigenem Gutdünken heranziehen und auch wieder entlassen konnte (van Dalen 1990).

5. Die Gödelsche Wende

Kurt Gödel (1906–1978) lernte im Umfeld des Wiender Kreises bei H. Hahn und K. Menger den Stand der mathematischen Grundlagenforschung der späten 1920er Jahre kennen. Seine Dissertation lieferte einen wichtigen positiven Beitrag zum Programm der Hilbertschen Beweisheorie. Seine kurz darauf gemachte Entdeckung der Unvollständigkeitssätze lieferte hingegen einen entscheidenden kritischen, gewissermaßen "negativen" Beitrag, der sich aber als noch entscheidender als der erste herausstellen sollte.

In seiner Dissertation (Gödel 1929) bewies Gödel die Vollständigkeit der Prädikatenlogik 1. Stufe, die von Hilbert, Ackermann, Bernays und andere als ein wichtiges Untersystem des "allgemeinen Funktionalkalküls" herausgearbeitet worden war. Vollständigkeit ist hier im semantischen Sinne zu verstehen, in Gödels eigenen Worten:

> Dabei soll "Vollständigkeit" bedeuten, daß jede im eingeren Funktionalkalkül ausdrückbare allgemein giltige Formel (... [Verweis auf Löwenheim, E.S.]) sich durch eine endliche Reihe formaler Schlüsse aus den Axiomen deduzieren lässt. (Gödel 1929, 60)

Im Anschluss an die Dissertation beschäftigte er sich mit der Vollständigkeit und Widerspruchslosigkeit der Peano-Axiome. Anders als die Hilbert-Schule und die logischen Empiristen gab Gödel bald die Auffassung auf, dass das inhaltliche mathematische Denken voll in dessen formaler Fassung aufgehen könne – und näherte sich in *dieser Hinsicht* einer Brouwerschen Grundüberzeugung an. Brouwer hatte im Sommer 1928 Vorträge in Wien gehalten, bei denen Gödel zwar allem Anschein nach nicht persönlich anwesend war, von derem Inhalt er aber durch Gespräche im Umfeld des Wiener Kreises in den nachfolgenden Wochen erfahren haben musste.

Tatsächlich kam er schon etwa ein Jahr nach Fertigstellung seiner Dissertation zur Schlussfolgerung, dass im Rahmen eines formalen Systems $\mathcal{S}$, bestehend aus Peano-Axiomen und Typentheorie (im Sinne der *Principia Mathematica*, dessen eigene Metatheorie ausdrückbar ist. Er zeigte, wie Formeln, Beweisfiguren etc. durch Zahlen codiert werden können ("Gödelisierung" etwa der Formel F liefert eine "Gödelzahl" $g_F \in \mathbb{N}$) und dass dann metamathematische Prädikate "Formel", "Beweisfigur", "beweisbare Formel" etc. für Ausdrücke der Objektsprache selber wieder als arithmetische Prädikate formulierbar sind. Dadurch erhielt das System $\mathcal{S}$ ausreichend Ausdrucksmittel zur Bildung selbstreflektiver logische Figuren, dass die Annahme der Vollständigkeit des Kalküls zu Widersprüchen führen musste. Etwas genauer gesagt (zu mehr Details, siehe den Beitrag von U. Kohlenbach), gelang es ihm, eine logisch-arithmetische Formel $F(y)$ zu bilden (für eine Variable y, die Werte in in $\mathbb{N}$ annehmen kann), für deren *eigene* Gödelzahl g_F nachweislich gilt:

> Es ist formal unentscheidbar, ob $F(g_F)$ gilt oder nicht, falls $\mathcal{S}$ widerspruchsfrei ist.

Damit gewann Gödel im Sommer 1930 den Inhalt seines ersten *Unvollständigkeitssatzes*

Theorem 1 *Es gibt in der Sprache von $\mathcal{S}$ (formalisierte Peano-Axiome und Typentheorie) korrekt gebildete arithmetische Prädikate $F(x)$, deren Zutreffen/Nichtzutreffen für gewissen Werte $m \in \mathbb{N}$ unentscheidbar ist, falls $\mathcal{S}$ konsistent ist.*

Seine Vorgehensweise legte es nahe zu vemuten, dass der metatheoretischen Satz, der die Widerspruchsfreiheit des Systems behauptet

> 0=1 ist keine beweisbare Formel in $\mathcal{S}$

nach seiner Codierung selbst auf eine solche eine unentscheidbare arithmetische Aussage führt.

Mit diesem Wissen ging Gödel auf die *Tagung für exakte Erkenntnislehre* vom 5. bis 7. 9. 1930 in Königsberg, organisiert von der Berliner Gesellschaft für exakte Erkenntnislehre (der Hilbert nahe stand) und dem Wiener Verein Ernst Mach. Ziel der Tagung war, den aktuellen Stand der mathematischen Grundlagenforschung aus Sicht der verschiedenen Richtungen zu resümieren. Hauptreferate hielten A. Heyting (Intuitionismus), J. von Neumann (Hilbert-Schule) und R. Carnap (Logizismus). Gödel war als junger Logiker kein geladener Redner der Tagung. In der Abschlussdiskussion gab er trotzdem eine zurückhaltende aber deutliche Ankündigung seines (ersten Unvollständigkeitssatzes).

Es folgte eine intensive Diskussion mit J. von Neumann, der sofort die Richtigkeit der Gödelschen Ankündigung akzeptierte und ihre Bedeutung für das Hilbert-Programm erkannte. Das deutet darauf hin, dass zu dieser Zeit im Hilbert-Kreis die Unsicherheit darüber sehr groß geworden war, was man wirklich erreicht hatte. Von Neumann machte sich sogar selber an eine Ausarbeitung des Gödelschen Gedankens; aber glücklicherweise war dieser schon weit genug in seiner Ausarbeitung gekommen, dass er die Ausführung seiner Idee bald publizieren konnte (Gödel 1931*b*).

K. Gödel kündigte seine Arbeit im *Anzeiger der Wiener Akademie der Wissenschaften* in allgemein verständlicher Form an:

> Überbaut man die Peanoschen Axiome mit der Logik der *Principia mathematica* (...) (natürliche Zahlen als Individuen) samt Auswahlaxiom (für alle Typen), so entsteht ein formales System $\mathcal{S}$, für welches folgende Sätze gelten:
>
> I. Das System $\mathcal{S}$ ist *nicht* entscheidungsdefinit , d.h. es gibt Sätze A, (und solche sind auch angebbar), für welche weder A noch $\bar{A}$ beweisbar ist, ...
>
> II. Selbst wenn man alle logischen Hilfsmittel der *principia mathematica* (insbesondere also erweiterten Funktionalkalkül und Auswahlaxiom) in der Metamathematik zuläßt, gibt es keine Widerspruchsfreiheitsbeweis für das System $\mathcal{S}$ (umso weniger, wenn

> man die Beweismittel irgendwie beschränkt). Ein Widerspruchsfreiheitsbeweis des Systems $\mathcal{S}$ kann also nur mit Hilfe von Schlußweisen geführt werden, die im System $\mathcal{S}$ selbst nicht formalisiert sind, und Analoges gilt auch für andere formale Systeme, etwa das Zermelo-Fränkelsche Axiomensystem der Mengenlehre. (Gödel 1931*a*, 140ff.)

Diese Formulierungen widersprachen glasklar dem von Hilbert in seinen öffentlichen Reden erhobenen *Anspruch* auf Letztfundierung der Mathematik durch das Programm seiner "finiten" Beweistheorie. Gödel war sich (möglicherweise durch seine Diskussionen mit von Neumann) im klaren darüber, dass dennoch der von Hilbert eingeschlagenen Kurs nicht im Kern und endgültig getroffen wurde. Gegen Schluss seiner Arbeit (1931) kommentierte er

> Es sei ausdrücklich bemerkt, daß Satz XI (...) [Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz, E.S.] in keinem Widerspruch zum Hilbertschen formalistischen Standpunkt stehen. Denn dieser setzt nur die Existenz eines mit finiten Mitteln geführten Widerspruchsfreiheitsbeweises voraus und es wäre denkbar, daß es finite Beweise gibt, die sich $\mathcal{P}$ [Gödels Bezeichnung für die formalisierte Peano -Arithmetik, hier mit $\mathcal{S}$ bezeichnet, E.S.] *nicht* darstellen lassen. (Gödel 1931*b*, 194)

Inhaltlich war diese Bemerkung ganz zutreffend, obwohl die Redeweise von "finiten" Beweisen, die sich nicht in der Peano-Arithmetik darstellen lassen, nicht ohne hintergründige oder ungewollte "objektive" Ironie war. Vielleicht versuchte Gödel auch nur, eine offene Konfrontation mit Hilbert zu vermeiden: Warum sollte sich der 24-Jährige nicht benühen, den "Bannstrahl" Hilberts zu vermeiden, der Brouwer so schwer getroffen hatte.

Inhaltlich war allerdings Gödels Bemerkung, unabhängig von ihrer ironische klingenden Pointe, ganz korrekt. Sie ließ der Hilbertschen Beweistheorie eine infinitäre Entwicklung offen und stellte nicht einmal in Abrede, dass man dies aus Sicht einer Hilbert-Orthodoxie sogar weiterhin als "finiten Standpunkt" bezeichnen könnte, wenn man denn partout darauf bestünde. Damit vermied es Gödel, sich der Hilbertschen Rhetorik offen entgegenzustellen, die Weyl ein knappes Jahrzehnt früher nicht ganz unzutreffend, wenn auch selber höchst polemisch, als "dreiviertel ehrliche Selbsttäuschungsversuche, denen man im politischen und philosophischen Leben so oft begegnet" bezeichnet hatte (s.o.).

Die Wirkung der Gödelschen Arbeit von 1931 war für den weiteren Verlauf des Hilbert-Programms höchst folgenreich. J. von Neumann wandte sich anderen Fragen als denen der Grundlagenforschung zu, P. Bernays analysierte die Konsequenzen der Gödelschen Resultate für die bis 1930 als "erledigt" angesehenen Teile der Widerspruchsfreiheitsbeweise der Arithmetik und formulierte ihre Schwachpunkte.[5] Weiter betrieb er die Weichenstellung für die notwendige Wende von der "finiten" zu einer transfiniten Beweistheorie (wenn auch diese Formulierung zu Hilberst Lebzeiten peinlichst vermieden wurde). Wichtige Schritte am Beginn dieser neuen Phase war die Entwicklung des sogenannten "Sequenzenkalküls" durch Gerhard Gentzen in den Jahren 1934/35, auf die er einen Widerspruchsfreiheitsbeweis der Peano-Arithmetik aufbauen konnte. Allerdings war dazu nun metatheoretisch eine *transfinite* Induktion bis zur Ordinalzahl ϵ_0 notwendig.

Dadurch wurde eine grundlegend neue, post-Hilbertsche Phase des Programms der Beweistheorie eingeleitet, die sich aus Traditionsgründen jedoch gerne als (modifiziertes) Hilbert-Programm der Grundlagen der Mathematik bezeichnet. Hilbert selber gab sich nach einer anfänglichen, nur im engeren Kreis gezeigten Verärgerung[6] nach außen hin unbeeindruckt von Gödels Ergebnissen; er forderte nun lediglich eine "Zuschärfung des finiten Standpunks", wie er in der Einleitung zu dem unter seinem und Bernays Namen herausgegebenen Buches formulierte (Hilbert 1934/1939). Ich erspare mir einen Kommentar zu dieser Formulierung, die Bernays wahrscheinlich nur widerstrebend im Vorwort des ansonsten weitgehend von ihm geschriebenen Buches akzeptiert hat.

Im weiterem Umfeld wurden Gödels Sätze zum Teil als erheblicher Einschnitt für das Programm einer formalistischen Grundlegung der Mathematik angesehen. Weyl etwa sprach in einem Rückblich 1946 von einem "terrible blow" für Hilberts Programm (Weyl 1946, 279).

In *mündlichen* Äußerungen, von denen es unwahrscheinlich war, dass Sie bis nach Göttingen durchdrangen, formulierte Gödel durchaus ähnlich. In einem Vortragsmanuskript aus dem Jahr 1933 für ein gemeinsames Treffen der *American Mathematical Society* und der *Mathematical Association of America*, das erst posthum in den Gesammelten Werken publiziert wurde, äußerte er sich über formale Systeme, die lediglich klassische vollständige Induktion (bis ω_0) verwenden, wie folgt:

> This method possesses a particular high degree of evidence, and therefore it would be the most desirable if the freedom of contradiction of ordinary non-constructive mathematics could be proved by methods allowable in this system A. And as a matter of fact, all the attempts for a proof of freedom from contradiction undertaken by Hilbert and his disciples tried to accomplish exactly that. But unfortunately the hope of succeeding along these lines has vanishesd entirely in view of some recently discovered facts. (Gödel 1986ff., II, 52f.)

[5] Unter anderem in Bernays Anmerkungen zur Herausgabe der Hilbertschen *Gesammelten Werke* im Jahre 1935.

[6] Quelle dafür ist P. Bernays, siehe (Dawson 1999, 63).

Das klang schon ganz anders, als seine paradox klingende Einverständniserklärung, dass es möglicherweise "finite" Beweise geben könnte, die im System der Peano-Arithmetik nicht darstellbar sind.

Abschließende Bemerkungen

Trotz dieses folgenreichen Einschnittes für das Hilbert-Programm lösten die Gödelschen Sätze *keine Krise für die Mathematik* aus, obwohl in den 1930er Jahren die Verunsicherung unter Hilbert nahe stehenden Mathematikern allem Anschein nach erheblich war. Mittel- und langfristig gesehen, kann man aber eher von einer gegenteiligen Auswirkung sprechen. Gödels Ergebnisse, zu denen in den 1930er Jahren einige weitere entscheidende Beiträge über relative Konsistenz hinzutraten, trug sogar *im Gegenteil* dazu bei, die vorher in scharfer Form aufeinander prallenden gegensätzlichen Standpunkte in Fragen der Grundlagen der Mathematik wieder in einen gemeinsamen Rahmen stellen zu können und sie kommunizierbar und miteinander vergleichbar zu machen.

Der Kürze halber seien hier einige Punkte aufgelistet, die bei der historischen Würdigung der Gödelschen Arbeiten und der frühen 1930-Jahre zu berücksichtigen. Sie resümieren zum großen Teil schon Gesagtes:

(1) Gödels Unvollständigkeitssätze bedeuteten *keine* Infragestellung der Schlussweisen *innerhalb* der Mathematik. Sie bedeuteten jedoch eine drastische Korrektur für das Hilbertsche Programm der Beweistheorie und eine Infragestellung von dessen offizieller Ausßendarstellung durch Hilbert an der Wende zu den 1930er Jahren.

(2) Insbesondere wurde die ursprüngliche Spezifizierung einer "finiten" Methode oder eines "finiten" Standpunktes im eigentlichen Sinne des Wortes ad absurdum geführt. Hilbert wollte das nicht wahr haben (er war nun 69 Jahre alt und durch eine lebensbedrohende Krankeit gegangen); das änderte aber nichts am grundsätzlichen Sachverhalt. Die jüngeren Mitarbeiter an Hilberts Programm waren sich dessen vollauf bewusst.

(3) Jedoch bedeutete die von Gödel ausgelöste Krise keinen Zusammenbruch des Hilbertschen Unternehmens. Sie forcierte lediglich eine schon eingeleitete Umorientierung zum offenen Einbezug transfiniter metamathematischer Methoden und wirkte sich dadurch mittelfristig sogar für das (erweiterte) Hilbert-Programm der Beweistheorie höchst fruchtbar aus.

(4) Für die mathematische Arbeit konnte und kann man Gödels Einsichten (nicht das bloße Resultat der Sätze) so sehen, dass inhaltliche Schlussweisen — anders als in Hilberts *Bild* der *Grundlagen* der Mathema-

tik[7] — nicht nur in der Metamathematik, sondern auch in den mathematischen Theoriebildungen selbst wieder in ihr Recht eingesetzte wurden. Das Auftreten "wahrer" Sätze einer mathematischen Basistheorie (der Peano-Arithmetik), die in einer gut bedachten Formalisierung nicht beweisbar sind, bestätigt und betont die Irreduzibilität der Evidenzerfahrung der denkenden Wissenschaftler auf Formalismen und die Bedeutung von deren Intersubjektivierung in der Kommunikation der Mathematiker (vergleiche den Beitrag von M. Kreck).

(5) Auch wenn dies *nicht* Gödels Absicht war, wurde auf diese Weise eine von H. Weyl ab Mitte der 1920er Jahre (nach einer relativen Wiederannäherung an Hilberts Auffassung) vorgebrachte grundlegende Kritik an dem von Hilbert verbreiteten *formalistischen Bild* der Mathematik gestärkt, die ein Brouwersches Thema aufnahm und aus Weylscher Perspektive variierte: Selbst wenn die formalisierte Mathematik nachweislich widerspruchsfrei ist, und nach Art eines Schachspieles betrieben werden könnte, berührte dies nicht die weiter gestellte Frage nach dem *kulturellen Sinn* des mathematischen Tuns. Weyl erinnerte dabei an eine Motiv, das *in der mathematischen Arbeit* auch bei Hilbert eine ebenso herausragende Rolle gespielt hatte wie seine Bemühungen um die formale Grundlegung der Mathematik. Er verwies darauf, dass der Sinn der Erfindung und Bearbeitung der komplexen Symbolsysteme der Mathematik in ihrem Beitrag zur "Repräsentation des Transzendenten im Symbol" liege. Mit dieser konnnotationsreichen Formulierung zielte Weyl primär auf die Erkenntnisfunktion der Mathematik in den Naturwissenschaften, speziell der Physik. Die Pflege und der Ausbau dieser Beziehung erschien ihm als wesentlicher für die Mathematik als die Sicherung der bloßen Widerspruchsfreiheit durch metamathematische Reflektion im Stile Hilberts.

(6) Gödels Ergebnisse von 1929 – 1931 lösten auch deswegen *keine Krise für die Mathematik* aus, weil sie durch andere Arbeiten zur Logik und den Grundlagen der Mathematik (insbesondere A. Tarskis Beiträge zum Ausbau formalsprachlicher Methoden) erweitert wurden. Gödel selbst trug in den 1930er Jahren durch weitere Ergebnisse zur breiteren Aufklärung in Sachen Grundlagen der Mathematik bei. Ihm gelang eine Darstellung der Peano-Arithmetik samt Prädikatenlogik 1. Stufe in A. Heytings Fassung der intuitionistischen Arithmetik. Dadurch wurde die *relative Konsistenz* des Systems $\mathcal{S}$ in der obigen Bezeichnung gesichert.[8] Weiter gelang ihm der Nachweis, dass die Kontinuumshypothese und das Auswahlaxiom mit den Systemen sowohl der

[7] Diese Formulierung ist bewusst gewählt: In Hilberts Arbeit in der Mathematik spielten inhaltliche Überlegungen immer eine wesentliche Rolle.

[8] A. Kolmogoroff hatte ein solches Ergebnis in Beiträgen zu einem Moskauer Seminar zu Grundlagen der Mathematik schon 1926 auf seine Weise vorweggenommen. Er zeigte –

Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre als auch mit der von Neumann-Bernayschen Axiomatik der Mengenlehre (jeweils ergänzt durch die Prädikatenlogik 1. Stufe) relativ konsistent sind. Zusammen genommen trug dies inhaltlich zu einer völligen Veränderung der Situation in den Grundlagen der Mathematik bei, sodass man von einem entscheidenden Beitrag Gödels zur Auflösung der Grundlagenkrise der 1920er Jahre sprechen kann.

Die letzten beiden Punkte scheinen mir aus mathematikhistorischer Sicht die wichtigsten Auswirkungen der Gödelschen Arbeiten zu sein. Damit sind auch Fragen der Philosphie der Mathematik berührt, die in der weiteren Diskussion unseres Themas von Bedeutung sein mögen.

Literatur

Dawson, John W. 1999. *Kurt Gödel: Leben und Werk.* Berlin etc.: Springer.

Ferreiros, José. 1999. *Labyrinth of Thought : A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics.* Basel: Birkhäuser.

Gödel, Kurt. 1929. *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls.* Wien: Doktordissertation. In (Gödel 1986ff., I, 60–100).

Gödel, Kurt. 1931*a*. “Einige metamathematiche Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit.” *Anzeiger Wiener Akademie der Wissenschaften* 67:214f. In (Gödel 1986ff., I, 140–142),.

Gödel, Kurt. 1931*b*. “Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und vewandter Systeme I.” *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38:173–198. In (Gödel 1986ff., I, 144–194),.

Gödel, Kurt. 1933. “Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie.” *Ergenisse eines mathematischen Kolloquiums* 4:134–38. In ite[I,286–284]Goedel:CW.

Gödel, Kurt. 1986ff. *Collected Works, 3 vols.* Oxford etc.: Clarendon.

Gray, Jeremy J. 2000. *The Hilbert Challenge.* Oxford: University Press.

Hilbert, David. 1899. *Grundlagen der Geometrie.* Festschrift zur Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig: Teubner. Weiter Auflagen: ^{2}1903, ^{3}1909, ^{4}1913, ^{5}1922, ^{6}1923, ^{7}1930; Stuttgart: ^{8}1956, ^{9}1962, ^{10}1968, ^{11}1972, ^{12}1977.

allerdings in einer noch unausgereiften Fassung des Logikkalküls, dass eine Einbettung der klassischen Logik inklusive Tertium non datur in die intuitionistische Logik möglich ist. Nach seiner Einsicht konnten daher lediglich Differenzen in *Interpretationsfragen* auftreten, nicht in Bezug auf die Möglichkeit des Auftretens von Widersprüchen in mathematischen Theorien.

Hilbert, David. 1900*a*. “Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongresßs zu Paris 1900.” *Nachrichten Göttinger Akademie der Wissenschaften* pp. 253–297.

Hilbert, David. 1900*b*. “Über den Zahlbegriff.” *Jahreberichte DMV* 8:180–184.

Hilbert, David. 1904. Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. In *Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses Heidelberg*. Leipzig 1905: Teubner pp. 174–185.

Hilbert, David. 1922. “Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung.” *Abhandlung Mathematisches Seminar Hamburg* 1:157–177. In (Hilbert 1932–1935, III, 157–177).

Hilbert, David. 1923. “Die logischen Grundlagen der Mathematik.” *Mathematische Annalen* 88:151–165. In (Hilbert 1932–1935, III, 178–191).

Hilbert, David. 1923. “Über das Unendliche in der Mathematik.” *Mathematische Annalen* 95:161–190. [Nicht in GA].

Hilbert, David. 1930. “Probleme der Grundlegung der Mathematik. Vortrag gehalten auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreßs Bologna 1928.” *Mathematische Annalen* 102:1–9. [Nicht in GA].

Hilbert, David. 1931. “Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie.” *Mathematische Annalen* 104:485–494. [Nicht in GA].

Hilbert, David. 1932–1935. *Gesammelte Abhandlungen, 3 Bde.* Berlin etc.: Springer.

Hilbert, David, Ackermann Wilhelm. 1928. *Grundzüge der theoretischen Logik.* Berlin etc.: Springer.

Hilbert, David; Bernays, Paul. 1934/1939. *Grundlagen der Mathematik, 2 Bde.* Berlin etc.: Springer.

Mehrtens, Herbert. 1990. *Moderne - Sprache - Mathematik : eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme.* Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Schappacher, Norbert. 2002. “Politisches in der Mathematik.” *Preprint Fachbereich Mathematik Universität Darmstadt* . Erscheint in *Mathematische Semesterberichte.*

Sieg, Wilfried. 2000. *Toward finitist proof theory.* In Hendricks, Vincent e.a. (eds.), *Proof Theory. History and Philosophical Significance*, Dordrecht etc.: Kluwer, 95–116.

van Dalen, Dirk. 1990. "The war of the frogs and the mice, or the crisis of the *Mathematische Annalen*." *Mathematical Intelligencer* 12:17–31.

van Dalen, Dirk. 1999ff. *Mystic, Geometer, and Intuitionist : The Life of L. E. J. , Brouwer, 2 vols.* Oxford: Clarendon.

Weyl, Hermann. 1910. "Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe." *Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter* 7:93–95, 109–113. In (Weyl 1968, I, 298—304).

Weyl, Hermann. 1918. *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis.* Leipzig: Veit.

Weyl, Hermann. 1921. "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik." *Mathematische Zeitschrift* 10:39–79, GA II, 143–180.

Weyl, Hermann. 1946. "Mathematics and logic. A brief survey serving as a preface to a review of "The Philosophy of Bertrand Russell"." *American Mathematical Monthly* 53:2–13. In (Weyl 1968, IV, 268–279).

Weyl, Hermann. 1968. *Gesammelte Abhandlungen, 4 vols.* Ed. K. Chandrasekharan. Berlin etc.: Springer.

Zermelo, Ernst. 1908. "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre." *Mathematische Annalen* 65:261–281.