# Mathematische Physik bei Hermann Weyl — zwischen 'Hegelscher Physik' und 'symbolischer Konstruktion der Wirklichkeit'

Erhard Scholz, Wuppertal

03. 04. 2010

**Zusammenfassung**

Hermann Weyls Beiträge zur mathematischen Physik waren stets mit reflektierenden Kommentaren verbunden, die deutlich zeigen, welche übergreifende Vorstellungen er sich von der Beziehung zwischen Mathematik und Physik in der jeweiligen Arbeitsphase machte. Es werden drei Modi unterschieden: (1) Mathematische Beiträge mit wesentlich spekulativ-apriorischem Geltungsanspruch, (2) begriffsanalytische Beiträge zu Grundlagenfragen der Physik, (3) Beiträge zur 'symbolischen Konstruktion' des Bildes der Wirklichkeit. Diese drei Auffassungen werden an Beispielen Weylscher Arbeiten zur mathematischen Physik und mit ausführlichen Textzitaten vorgestellt und kommentiert.

## Vorweg

Hermann Weyls Beiträge zur mathematischen Physik des 20. Jahrhunderts waren vielfältig und hatten — zumindest teilweise — weitreichende Folgen. Hier kann es nicht darum gehen, diese Beiträge im Einzelnen darzustellen oder gar zu analysieren. Vielmehr soll das Profil von Weyls Umgang mit der Mathematik in der (theoretischen) Physik und seine Reflexion dieses Verhältnisses herausgearbeitet werden, so weit das möglich ist. Natürlich blieb dieses Profil nicht zeitlich konstant; Weyls Auffassungen des Fragekomplexes veränderten sich im Laufe seines Lebens erheblich.

Aus meiner Sicht lassen sich folgende drei Arten der Verwendung der Mathematik in der Physik durch Weyl identifizieren:

(1) Mathematische *Beiträge mit wesentlich spekulativ-apriorischem Geltungsanspruch*, gewissermaßen Mathematik "als Naturphilosophie". Ein bekanntes Beispiel ist Weyls reine Infinitesimalgeometrie von 1918 und sein darauf aufbauender Versuch zur Formulierung einer einheitlichen Feldtheorie (1918–1920).

(2) *Begriffsanalytische Beiträge* zur Klärung von Grundlagenfragen der Physik. Typische Beispiele: Konforme und projektive Strukturen in der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) (1921), Weyls mathematische Analyse des Raumproblems (1921/22) und seine Untersuchung zum gruppentheoretischen Fundament der Tensorrechnung (1924).

(3) Schließlich der Einsatz der Mathematik in strukturell unterstützender Funktion bei der *symbolischen Konstruktion der Naturerkenntnis* oder, wie Weyl vorzog zu formulieren, bei der "symbolischen Konstruktion der Wirklichkeit". Beispiele dieses Einsatzes finden sich in Weyls Diskussion der Rolle der hermiteschen Formen (Operatoren) in der Quantenmechanik (1927), der Rolle der Gruppentheorie bei der Begründung der Quantenmechanik und speziell bei der Aufklärung der homöopolaren Bindung (1928ff.). Weiter wurde seine Sicht des Übergangs zur $U(1)$-Eichtheorie des Elektromagnetismus im Rahmen der allgemein relativistischen Dirac-Gleichung (1929) von dieser Auffassung charakterisiert. Wir finden sie auch bei seinen späteren Diskussionen mathematischer Konstruktionen in der ART.

Die angeführten Beispiele zeigen eine klare zeitliche Reihenfolge. Man wird versucht sein daraus abzulesen, dass die hier aufgelisteten Aspekte nicht lediglich analytisch zu unterscheiden sind, sondern Veränderungen in Weyls Auffassung der Rolle der Mathematik im Erkenntnisprozes der Physik zum Ausdruck bringen. Das ist nicht ganz falsch; es soll hier aber keine epistemisch-biographische Entwicklungslinie des Weylschen Denkens (in dieser Sache) behauptet werden. Schon eine detailliertere Diskussion der Gründe für die jeweiligen Verschiebungen würde den Rahmen dieses Artikels überschreiten. Des weiteren wäre es falsch, hier eine Reihe sich ablösender (sich wechselseitig ausschließender) Auffassungen zu sehen. Eher müsste man von einer Anreicherung und relativen Gewichtsverschiebung zwischen diesen ausgehen. Die früheren Auffassungen wurden von Weyl nie völlig verworfen, sondern blieben in untergeordneter Form und veränderter Funktion auch später erhalten. Dies wird im folgenden im Auge zu behalten sein.

## 1. Beiträge mit spekulativ-apriorischem Geltungsanspruch

Das wohl schönste Beispiel für einen Einsatz der Mathematik im Sinne eines spekulativ-naturphilosophischen Vorgehens findet sich in Weyls Formulierung seiner *reinen Infinitesimalgeometrie*, in heutiger Formulierung der Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie zur *Weylgeometrie* (Weyl 1918*a*, Weyl 1918*b*, Weyl 1919). In modernisierter Notation zusammengefasst ging es Weyl darum, die Möglichkeit des *direkten Vergleichs* geometrischer (und physikalischer) Größen in einer Mannigfaltigkeit $(M, g)$ mit Riemannscher Metrik $g$, in lokalen Koordinaten ausdrückbar in der Form $\sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$, aufzugeben. Stattdessen sollte ein direkter Vergleich nur von Größen "an einem Punkt" $x \in M$ möglich sein (etwa der Längen von Vektoren in demselben Tangentialraum $T_x M$). Dies war durch die Abstraktion von $g$ zur zugehörigen konformen Klasse $[g]$ ausdrückbar, mit $\tilde{g} \in [g]$, falls $\tilde{g} = \Omega g$ ($\Omega$ strikt positive reelle Funktion auf $M$). Der Vergleich an verschiedenen Punkten $x \neq x'$ wurde durch Integration einer Differentialform $\varphi$, in lokalen Koordinaten $\sum \varphi_\mu dx^\mu$, zu einem (im allgemeinen wegabhängigen) Umskalierungsfaktor ermöglicht. Weyl nannte $\varphi$ einen "Längenzusammenhang" (Skalenzusammenhang). Eine *rein infinitesimalgeometrische* (Weylsche) *Metrik* wurde/wird dementsprechend durch eine Äquivalenzklasse $[(g, \varphi)]$ angegeben, wobei Äquivalenzen $(g, \varphi) \sim (\tilde{g}, \tilde{\varphi})$ durch *Eichtransformationen* definiert sind:

$$\tilde{g} = \Omega g$$

$$\tilde{\varphi} \;=\; \varphi - \frac{1}{2} d \log \Omega$$

Auf diese Skaleneichgeometrie baute Weyl ein dreischrittiges gegliedertes, umfassendes physikalisches Theorieprogramm auf:

– Interpretation des Längenzusammenhangs $\varphi$ als ($\mathbb{R}^+$) *Eichtheorie des elektromagnetischen (e.m.) Feldes* $F = d\varphi$ (geometrisch Krümmungsform von $\varphi$),

– *geometrische Vereinheitlichung* von Gravitation $g$ und e.m. Feld $F = d\varphi$ durch die Weylsche Metrik $[(g, \varphi)]$,

– darauf aufbauend, in Fortführung des Mie-Hilbertschen Ansatzes, eine *rein feldtheoretische Materieerklärung* durch ein Wirkungsprinzip $\delta \int \mathcal{L} dx = 0$ mit nur von $g$ und $\varphi$ abhängiger *eichinvarianter Lagrangedichte* $\mathcal{L}(g, \varphi)$.

Die Materie hoffte er ähnlich wie Hilbert durch zeitlich stabile "Energieknoten" in $T_{00}$ erklären zu können, mit $T_{\mu\nu}$ Energie-Impulsanteil des aus Variation von $\mathcal{L}$ nach $g^{\mu\nu}$ hervorgehenden geometrisch-materiellen Tensors. Dies ist an vielen Stellen dargestellt worden.[1]

Man hätte dies als eine mehr oder weniger gewagte Hypothese der mathematischen Physik formulieren können, um sie der Fachdiskussion zu stellen und ihren empirischen Gehalt im Laufe der Zeit zu überprüfen. Bei Weyls ersten Publikationen zu diesem Thema hörte sich das aber anders an. Nach einer kurzen Schilderung der "alten Anschaung" von Raum und Zeit in der klassischen Physik erläuterte er die neue Sicht, die durch die ART eröffnet wurde:

> Das prinzipiell Neue an ihr ist (…) die Einsicht: die Metrik ist nicht eine Eigenschaft der Welt an sich; vielmehr ist Raum-Zeit als Form der Erscheinungen ein völlig gestaltloses vierdimensionales Kontinuum im Sinne der Analysis Situs, die Metrik aber bringt etwas Reales zum Ausdruck, das in der Welt existiert, das durch Zentrifugal- und Gravitationskräfte physikalische Wirkungen auf die Materie ausübt und dessen Zustand auch umgekehrt durch die Verteilung und Beschaffenheit der Metrik naturgesetzlich bedingt ist. (Weyl 1918*b*, 2)

Nach dieser Einstimmung kündigt er seinen eigenen Beitrag und dessen programmatische Intentionen an:

> …Indem ich die Riemannsche Geometrie, die doch reine 'Nahe-Geometrie' sein will, von einer ihr gegenwärtig noch anhaftenden Inkonsequenz befreite, ein letztes ferngeometrisches Element ausstieß, das sie von ihrer Euklidischen Vergangenheit noch bei sich führte, gelangte ich zu einer Weltmetrik, aus welcher nicht nur die Gravitations- sondern auch die elektromagnetischen Wirkungen hervorgehen, die somit, wie man mit gutem Grund annehmen darf, über alle physikalischen Vorgänge Rechenschaft gibt. Nach dieser Theorie ist *alles Wirkliche, das in der Welt vorhanden ist, Manifestation der Weltmetrik*; die physikalischen Begriffe sind keine andern als die geometrischen. Der einzige Unterschied, der zwischen Geometrie und Physik besteht, ist … (ebda, Hervorhebungen hier wie im folgenden im Original)

[1] (Vizgin 1994, Corry 2004, O'Raifeartaigh 1997, Scholz 2004*a*)

Es folgte eine Darlegung, dass die Geometrie das "Wesen der metrischen Begriffe", also die allgemeinen metrischen Strukturen erforsche, während die Physik die "Gesetze der wirklichen Welt" unter allen möglichen vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten auszuzeichnen habe.

Man könnte dazu neigen, solche Sätze als Überhöhung und spachliches Ornament einer möglicherweise ansonsten eher nüchtern ausgeführten Begriffsanalyse und -erweiterung samt Hypothesenbildung anzusehen. Zieht man aber weitere Arbeiten Weyls aus der Zeit 1918- 1920 hinzu, so bestätigt sich der Eindruck, dass in ihnen die vorwärtstragende Gedankenentwicklung ihres Autors durchaus adäquat zum Ausdruck kamen.

So finden sich am Ende des Textes der dritten Auflage von *Raum - Zeit - Materie* (RZM), in der Weyl nun auch seine neue Geometrie, einheitliche Feldtheorie und die feldtheoretische Materiehypothese aufnahm,[2] zum Verhältnis Geometrie – Physik folgende Ausführungen:

> Wir hatten erkannt, daß Physik und Geometrie schließlich zusammenfallen, daß die Weltmetrik eine, ja vielmehr die einzige physikalische Realität ist. Aber letzten Endes erscheint so diese ganze physikalische Realität doch als eine bloße Form; nicht die Geometrie ist zur Physik, sondern die Physik ist zur Geometrie geworden ... (Weyl 1919, 263)

Bei dieser Identifizierung von Geometrie und physikalischer Realität spielten starke philosophische Motive mit, die Weyl von seiten der Husserlschen Phänomenologie (Ryckman 2005) und der Fichteschen Philosophie aufgenommen hatte (Sieroka 2010, Scholz 2005*b*). Letztere nahm für Weyl in diesen Jahren eine zentrale Stellung ein.

Der cartesianisch anmutende Traum einer völligen Assimilation der Physik an die Geometrie blieb nicht ohne Folgen für den Charakter der physikalischen Erkenntnis. Diese formulierte Weyl zwei Sätze später so:

> ... Die Physik hat für die Wirklichkeit keine weitergehende Bedeutung wie die formale Logik für das Reich der Wahrheit ... Ich meine, daß die Physik es nur mit dem zu tun hat, was in einem genau analogen Sinne als formale Verfassung der Wirklichkeit zu bezeichnen wäre ... (ebda.)

Ähnliche Auffassungen finden wir an anderer Stelle in Äußerungen Weyls während der Jahre 1918/19. Wir können daher davon ausgehen, dass er in dieser Zeit und bis in das Jahr 1920 hinein davon ausging, dass

– die Physik in der Geometrie aufgehen würde,

– die Geometrie in innerer Entwicklungslogik ihrer eigenen begrifflichen Tendenzen entfaltbar sei (zunächst von der 'Fern-' zu einer halbherzigen 'Nahe-' schließlich zur 'reinen Nahegeometrie')

– und damit ein Erkenntnisfortschritt der Physik qua Begriffslogik schon so gut wie sicher verbunden sei.

[2] Die erste Auflage von RZM war im Druck (1918), als Weyl seine "reine" Infinitesimalgeometrie entdeckte, die zweite Auflage (1919) war ein unveränderter Nachdruck der ersten.

Hilbert kritisierte diese Auffassung als *Hegelsche Physik*.[3] Ironischerweise entstanden die von Hilbert der Weylschen Theorie vorgeworfenen "Paradoxien" nur dann, wenn man letztere in Hilberts Denkstil auszuwerten versuchte. Sie warfen insofern ebensoviel Licht auf Hilberts wie auf Weyls Versuche, Geometrie und Physik aufeinander zu reduzieren. Und doch wies Hilberts Polemik ohne Zweifel auf eine Schwäche hin, die jedem radikalen rationalistischen Reduktionsprogramm der Naturtheorie droht.

Die Auffassung Weyls blieb dennoch nicht ohne Auswirkungen auf die zeitgenössische mathematische Physik. O. Veblens Programm von 1922 einer geometrisierten mathematischen Physik — und dadurch das Forschungsprogramm der Princeton Gruppe der mathematischen Physik der 1920er Jahre — war stark von Weyls Sicht geprägt, auf jeden Fall in mathematischer, teilweise aber wohl auch in erkenntnistheoretischer Hinsicht.[4] Weyl selber hielt diese, philosophisch gesehen extreme Position jedoch nicht lange aufrecht. Schon in der nächsten Auflage von RZM ($^4$1923) fehlte die eben zitierte Schlusspassage von RZM ($^3$1919) über die Reduktion der Physik auf die Geometrie und deren rein formale Bedeutung für die Erkenntnis der Wirklichkeit. In der fünften Auflage (der letzten von Weyl selbst redigierten) beginnt der letzte Absatz in ganz anderem Ton. Anschließend an einen kurzen Hinweis auf die jüngsten Vorschläge einheitlicher Feldtheorien von Eddington, Bach, Einstein und Kaluza kommentierte Weyl nun:

> ... Wir sind an einen Punkt angelangt, wo wir Halt machen müssen, wenn wir uns nicht im Nebel der Spekulationen vollends verlieren wollen; gefährden wir dadurch nicht, was wir an wertvollen Erkenntnissen gewonnen haben! Die Rolle, welche *Raum und Zeit*, das extensive Medium der Außenwelt und seine Struktur, im Aufbau der der Wirklichkeit spielen, hat sich uns fortschreitend geklärt. ...

Die *Struktur* von Raum und Zeit erschien also als so weit verstanden, wie es für den zeitgenössischen Stand der Naturwissenschaft notwendig erschien; von einer Reduktion der gesamten physikalischen Wirklichkeit, einschließlich der Materie, auf die Geometrie war hingegen keine Rede mehr. Drei Sätze weiter wurde Weyl in dieser Hinsicht explizit. Die abschließenden Sätze des Haupttextes von RZM $^5$1923 lauteten:

> ... Wir haben unsere Analyse von Raum und Zeit nicht durchführen können, ohne uns zugleich mit *Materie* zu befassen. Hier stehen wir aber noch vor Rätseln, deren Auflösung nicht von der Feldphysik zu gewärtigen ist. In dem Dunkel, welches das Problem der Materie noch umhüllt, ist vielleicht die Quantentheorie das erste anbrechende Licht. (Weyl 1923*b*, 317)

[3]Hilbert benannte zwei "Paradoxien", zu der die "neueste *Weylsche Theorie*" seiner Ansicht nach führen würde. Eine folgte für ihn aus der (angeblichen) Reduktion des organischen Geschehens auf die Feldtheorie. Das führe zur Paradoxie der Reversibilität der Zeitrichtung auch für organische Vorgänge. Eine weitere Paradoxie ergebe sich daraus,"..., daß in der alles umfassenden Theorie dasjenige vorliegen würde, was ich eine *Hegelsche Physik* genannt habe. Es würde da alles, was noch geschehen wird, endgültig vorbestimmt sein. Eigentliche Entscheidungen könnten gar nicht stattfinden, und das ganze Weltgeschehen würde nicht über den *begrenzten Inhalt eines endliche Gedankens* hinausgehen." (Hilbert 1992, 100)

[4]Siehe den Beitrag J. Ritters in diesem Band.

Mittlerweile war Weyl also von der Annahme einer Reduzibilität der Materie auf die Geometrie weit abgerückt, und sei es auch nur über den Vermittlungsschritt einer geometrisierten einheitlichen Feldtheorie. Ein eigener Zweig der Physik, die Quantentheorie, hatte sich mit den Phänomenen der Materiekonstitution und ihrer Erklärung zu befassen. Diese galt ihm nunmehr als primär und irreduzibel gegenüber der Geometrie und den Interaktionsfeldern (damals: Gravitation und Elektromagnetismus). Dem entsprach auch eine bescheidenere Rolle für die Mathematik im physikalischen Erkenntnisprozess.

Ende des Jahrzehnts zog Weyl in einer Rückschau auf die geometrischen Vereinheitlichungsversuche der (klassischen) Feldtheorien ein noch deutlicher formuliertes kritisches Resümee. Mittlerweile hatte die neue Quantentheorie eigene Materiefelder eingeführt (Schrödinger-, Dirac-, Weyl-Wellenfunktionen für Fermionenfelder). Aus Weyls Sicht bedeutete das für die klassischen geometrischen Feldtheorien nun folgendes:

> Alle diesen geometrischen Luftsprünge waren verfrüht, wir kehren zurück auf den festen Boden der physikalischen Tatsachen. ... (Weyl 1931, 343)

Die "festen Tatsachen" charakterisierte Weyl durch seine eigene zweikomponentige spinorielle Wellenfunktion $(\psi_1, \psi_2)$ der irreduziblen Darstellung der komplex gelesenen Lorentzgruppe $SL_2(\mathbb{C})$. Diese Weyl-Spinorfelder erhielten allerdings erst in den 1950er Jahren bei der Beschreibung von Neutrinos in der Physik eine Bedeutung. In den 1930er Jahren wurden sie von Pauli wegen ihrer Masselosigkeit zunächst als unphysikalisch abgelehnt. Weyl dagegen schlug vor, so lang mit (zunächst) masselosen Feldern zu arbeiten, bis geklärt sei, wie die Ankoppelung an die Gravitation zu erfolgen habe.[5] Dies beleuchtet noch einmal, mit welcher Vorsicht selbst hier die Weylsche Rede vom "festen Boden der physikalischen Tatsachen" zu lesen ist.[6]

Was jeweils als "physikalische Tatsache" angesehen wird, hing hier wie in anderen Fällen davon ab, wer von ihr redete und welcher Community die redende Person primär verpflichtet war (Mathematik, mathematische Physik, theoretische Physik, experimentelle Physik etc.). Weyl ließ sich anscheinend in dieser Zeit in den USA gerne unwidersprochen als theoretischer Physiker bezeichnen; Pauli hielt ihn weiterhin für einen Mathematiker, aus dessen Beiträgen er lediglich bereit war, "möglichst großen Nutzen für den Fortschritt der Physik herauszuschlagen" (Pauli 1979, 505).

Weyl agierte selbstbewusst und erfolgreich auf beiden Feldern; eine stabile transnationale Community der mathematischen Physik, auf die er sich in diesen Arbeiten hätte beziehen können, gab es — noch — nicht. Mit der stärksten Gruppe dieser Arbeitsrichtung, der um Veblen und Eisenhart der 1920/30er Jahre (Princeton), stand Weyl zwar in engem Austausch; aber selbst diese war in ihrer Ausprägung noch stark von lokalen Bedingungen geprägt. [7] Die europäischen Zentren der mathematischen Physik waren weitgehend um Einzelpersonen

[5] "*Masse ist aber ein Gravitationseffekt*, es besteht die die Hoffnung, für dieses Glied in der Gravitationstheorie einen Ersatz zu finden, der die gewünschte Korrektur herbeiführt" (Weyl 1929, 245, Hervorh. im Original). Vgl. (Straumann 2001).

[6] Weyl verwies aber im selben Absatz auch auf Dirac, in dessen Händen sich das hier eingesetzte $U(1)$-Eichprinzip in der Theorie des Elektrons "glänzend" bewährt habe (Weyl 1931, 344).

[7] Siehe Anmerkung 4.

konzentriert und besaßen jeweils höchst unterschiedliche Forschungsprofile mit zu geringem Austausch untereinander, um eine internationale Community zu bilden: E. Cartan (Paris), A.S. Eddington (Cambridge), J.A. Schouten (Delft), T. Levi-Civita (Rom), A. Sommerfeld (München), F. Hund und B.L. van der Waerden (Leipzig), D. Hilbert und M. Born (Göttingen). Weyl (Zürich) stand zwar in engem Kontakt mit der Göttinger Gruppe (Hilbert, Born, von Neumann, in geringerem Maße auch Jordan), seinen Züricher Kollegen E. Schrödinger (bis 1927) und W. Pauli (der erst 1928 von Hamburg nach Zürich wechselte), er wurde aber nicht zum Zentrum einer eigenen Forschergruppe.[8] Die Göttinger mathematische Physik verlor mit Hilberts Emeritierung ihren Kopf; Weyls zweite Göttinger Periode (1930 – 1933) blieb ein kurzes Zwischenspiel. Nach dem Machtantritt der Nazis wurde die Göttinger Gruppe der mathematischen Physik in "alle Welt" (genauer gesagt, die angelsächsische) zerstreut.

## 2. Begriffsanalytische Beiträge zu Grundlagenfragen der Physik

Im Laufe der 1920er Jahre veränderten sich Weyls Auffassungen von den Aufgaben der Mathematik im Theoriebildungsprozess der Physik und insbesondere der Stellung der Geometrie in ihm. Schon zu Beginn des Jahrzehnts verlagerte sich seine Fragestellung in diesem Gebiet zu begriffsanalytischen Klärungen innerhalb der Mathematik mit unmittelbarer Bedeutung für Grundlagenfragen der Physik.

In einer kurzen Abhandlung *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und konformen Auffassung* ("aus einem Brief an F. Klein") (Weyl 1921*b*) beschäftigte er sich mit der Frage, wie sich konforme, projektive und metrische Struktur auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit zueinander verhalten. Dabei charakterisiert er eine

- *konforme Struktur* ("konforme Beschaffenheit")
  durch eine Äquivalenzklasse von Metriken $[g]$, $\tilde{g} \sim g \longleftrightarrow \tilde{g} = \Omega g$,
- *projektive Struktur* ("projektive Beschaffenheit")
  durch eine Äquivalenzklasse affiner Zusammenhänge $[\Gamma]$ mit $\tilde{\Gamma} \sim \Gamma$
  $\longleftrightarrow$ Spur der Geodätischen von $\tilde{\Gamma} \equiv$ Spur der Geod. von $\Gamma$
  $\longleftrightarrow \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} + \delta^{\mu}_{\nu}\psi_{\lambda} + \delta^{\mu}_{\lambda}\psi_{\nu}$ für gewisse Funktionen $\psi_{\mu}$,[9]
- *metrische Struktur* durch eine Weylsche Metrik, also auch wieder eine Äquivalenzklasse $[(g, \varphi)]$, wie oben angegeben.

Eine Weylsche Metrik zeichnet eindeutige affine und damit auch projektive Strukturen aus und besitzt eine natürliche konforme Struktur. Weyl konnte nun vergleichsweise leicht nachweisen, das zwei Weylsche Metriken $[(g, \varphi)]$, $[(g', \varphi')]$ mit äquivalenten projektiven und konformen Strukturen ($g \sim g'$, $\Gamma \sim \Gamma'$) identisch sind:

> Projektive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raumes bestimmen dessen Metrik eindeutig. (Weyl 1921*b*, 196)

[8] Nur in dieser Hinsicht konnte er, wie Yang es später beschrieb, in seiner Züricher Zeit als "lone wolf" erscheinen (Yang 1986, 15).

[9] Vgl. Veblens etwas allgemeinere Definition (ein Jahr später) im Beitrag J. Ritter, dieser Band.

Ein halbes Jahrhundert später zeigten F. Ehlers, F. Pirani und A. Schild in einem vielbeachteten Beitrag, dass man nicht einmal die Existenz einer metrischen Struktur voraussetzen muss. Schon die Vorgabe einer konformen Metrik von Lorentzsignatur und einer projektiven Struktur (mit gewissen, sehr natürlichen Kompatibilitätsbedingungen zwischen Geodätischen und infinitesimalen Nullkegeln) reicht aus, um ein Weylsche Metrik zu konstruieren und sie eindeutig festzulegen (Ehlers e.a. 1972).

Weyl formulierte die physikalische Bedeutung seines Struktursatzes klar, aber ohne naturphilosophischen Anspruch:

> In der Relativitätstheorie haben projektive und konforme Beschaffenheit eine unmittelbare anschauliche Bedeutung. Die erstere, die Beharrungstendenz der Weltrichtung eines sich bewegenden Teilchens, ... ist jene Einheit von Trägheit und Gravitation, welche Einstein an Stelle beider setzte, für die es aber bislang an einem suggestiven Namen mangelt ... die konforme Beschaffenheit ist der Wirkungszusammenhang der Welt, durch den bestimmt wird, welche Weltpunkte miteinander in möglicher kausaler Verbindung stehen ... (Weyl 1921*b*, 196)

Daher werde in seinem oben zitierten Satz "eine auch für die Physik bedeutungsvolle Tatsache" ausgesprochen. Tatsächlich verwies er direkt im Anschluss an den Beweis des Satzes auf dessen Bedeutung für einen wichtigen Punkt der Debatte um die empirische Basis der ART.

> Es geht aus diesem Satz hervor, dass allein aus der Beobachtung der 'natürlichen' Bewegung materieller Teilchen und der Wirkungs-, insbesondere der Lichtausbreitung die Weltmetrik festgelegt werden kann; Maßstäbe und Uhren sind dazu nicht erforderlich. (ebda)

Damit sprach Weyl einen Punkt an, der zwischen ihm und Einstein umstritten geblieben war, als er seine Skaleneichtheorie des e.m. Feldes im Jahre 1918 gegenüber Einstein verteidigte. Hier ging es nun aber nicht mehr um die Gültigkeit seiner einheitlichen Feldtheorie. Weyl arbeitete hier eine allgemeine strukturelle Eigenschaft der ART heraus, die unabhängig von speziellen feldtheoretischen Entscheidungen und damit verbundenen philosophischen Auffassungen galt. Es handelte sich also um eine von naturphilosophischen Präferenzen weitgehend unabhängige begriffliche Klärung von Grundlagenfragen der ART und jedweder darauf aufbauenden relativistischen Feldphysik. Interessanterweise bekam die Weylsche Metrik dadurch auch dann eine bleibende physikalische Bedeutung, wenn man Weyls einheitliche Theorie von 1918 aufgab (oder sie sogar für falsch hielt).

Man beachte dabei: Projektive und konforme Struktur einer Mannigfaltigkeit liefern eine *Weylsche Metrik*, nicht per se oder gar im ersten Schritt eine Riemannsche. Nur falls die Längenkrümmung Null ist ($d\varphi = 0$), lässt sich die Weylsche Metrik, zumindest mathematisch gesehen, auf eine Riemannsche reduzieren. Aber selbst dann hat man noch die Skaleneichfreiheit in Rechnung zu stellen, also zu prüfen, ob die Riemannsche Eichung die Skalierung der physikalischen Observablen adäquat zum Ausdruck bringt.

In derselben Zeit, in der Weyl diese — aus einer Gelegenheitsarbeit für Felix Klein hervorgegangene — Untersuchung über die Beziehung zwischen konformer, projektiver und metrischer Struktur verfasste, beschäftigte er sich auch mit der Neuformulierung einer *mathematische Analyse des Raumproblems* (ARP) (Weyl 1921*a*, Weyl 1922, Weyl 1923*a*). Auch hier ging es um eine mit mathematischen Methoden durchgeführte Begriffsklärung mit Blick auf die zeitgenössische (allgemein relativistische) Theoriebildung der Physik, angeregt und teilweise angeleitet durch philosophische Überlegungen.

Weyl versuchte hier zu klären, wie die grundlegende Idee der klassischen Analyse des Raumproblems des 19. Jahrhunderts im Sinne von Helmholtz, Lie und Klein unter den neuen Bedingungen der allgemein relativistischen Physik abzuändern ist. Dazu musste er zunächst einen möglichst allgemein formulierten Begriffsrahmen für die Charakterisierung der Gruppenoperationen "im Infinitesimalen" (in späterer Terminologie also etwa von Operationen auf dem Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit) formulieren. Für seine Sicht war wichtig, dass auch die "endlichen" Gruppenelemente "im Infinitesimalen" operierte (also die Liegruppe selbst auf den Tangentialräumen), nicht nur die "infinitesimalen" (die zugehörige Liealgebra). Dreißig Jahre später wurden solche Fragen in der Terminologie der Faserbündel (Prinzipal- und ... assoziierte) formuliert. Weyl standen solche symbolischen Mittel nicht zur Verfügung. So blieben seine Ausführungen zu dieser Frage in einigen Aspekten unfertig, d.h. unklar. Sie gingen aber — wie die in ähnlicher Absicht verfassten und in begrifflich wie technischer Hinischt entwickelteren Überlgungen von E. Cartan — in die Denkentwicklung ein, die später zur Formulierung der Faserbündel führte.

Es kann hier nur ganz kurz angedeutet werden, wovon Weyls Analyse des Raumproblems handelte. Sie genauer zu beschreiben, wäre hier kaum möglich, da schon die Formulierung des Problems erheblich verwickelter ist als im Fall der Aussage über projektive, konforme und metrische Strukturen. Weyl ging es darum, unabhängig oder vorgeordnet zu einer Metrik die Operation von endlichen und unendlich kleinen Elementen zweier miteinander in Verbindung stehender Gruppen $G \subset \tilde{G}$ ($G$ "Kongruenzen", $\tilde{G}$ "Änlichkeiten") in den "infinitesimalen Umgebungen" $U_x$ der Punkte $x$ einer differenziebaren Mannigfaltigkeit $M$ zu studieren (wir würden heute sagen, auf den Tangentialräumen $T_xM$). Dabei waren $G \subset SL_n(\mathbb{R}), \tilde{G} \subset GL_n(\mathbb{R})$, und $\tilde{G}$ der Normalisator von $G$. Die Operation der Gruppe $G$ sollte punktabhängig realisiert sein,

$$G_x := h_x^{-1} G h_x \qquad x \in U,$$

mit punktabhängigen Konjugationen durch $h_x \in \tilde{G}$. Weyl sprach von einer "wechselnden Orientierung der Gruppe". Dies stellte für Weyl die Einführung eines verallgemeinerten Begriffs der *Kongruenz* in jeder einzelnen infinitesimalen Umgebung ($T_xM$) dar.[10] Eine Kongruenz *zwischen* "infinitesimal benachbarten Punkten $x, x'$ (mit $x' = x + dx$ — *par abus de notation*) sollte nach seiner Auffassung durch einen (zunächst beliebigen) linearen Zusammenhang $\Lambda$ charakterisiert werden. Dieser ordnete jeder "infinitesimalen" Verrückung $dx = (dx^\mu)$ eine "infinitesimale" lineare Abbildung auf $T_xM$ zu:

$$dx \mapsto \Lambda dx \quad \text{mit} \ \ (\Lambda dx)^\mu_\nu := \Lambda^\mu_{\nu\lambda} dx^\lambda, \ \Lambda = (\Lambda^\mu_{\nu\lambda})$$

Die Gruppe $G$ sollte dann gewisse, in zwei Postulaten formulierte Bedingungen erfüllen, die Weyl aus semantischen Gründen als sinnvoll und sogar unumgänglich erschienen: 1. Postulat der "freien" Verfügbarkeit von $\Lambda$,

[10]Später sprach er auch von "physikalischem Automorphismus".

2. Postulat der eindeutigen Auszeichnung eines affinen Zusammenhangs.[11]

Daraus ließen sich algebraische Bedingungen an $\mathfrak{g} = Lie(G)$ ableiten, deren Auswertung Weyl zur Aussage führte:

**Theorem 1 (Hauptsatz der ARP)** *Erfüllt eine Gruppe die algebraischen Bedingungen abgeleitet aus den Postulaten 1 und 2, so gilt für ihre Liealgebra*

$$\mathfrak{g} = so(p,q), \quad p + q = n = dim\, M\,.$$

Eine Mannigfaltigkeit $M$ mit Weylscher Metrik ließ nun gerade faserweise Automorphismen auf $TM$ vom Typ des Satzes zu. Insofern lieferte der Hauptsatz der ARP eine weitere, nun begriffsorientierte Untermauerung der Weylschen Differentialgeometrie. Folgte man den motivierenden Argumenten Weyls für seine Postulate 1 und 2, so erwies sich die Weylsche Geometrie als bestgeeigneter weiter Rahmen für die ART und relativistische Feldphysik. Zwar gingen in die Motivation auch weiterhin philosophische Überlegungen ein; Ausführung und Resultat waren jedoch begriffsanalytisch, beziehungsweise ein Struktursatz der theoretischen Mathematik.

An diesen beiden Beispielen wird sichtbar, wie vorsichtig Weyl schon während der ersten Hälfte der 1920er Jahre wurde, naturphilosophische Motive in seine mathematisch-physikalischen Arbeiten einfließen zu lassen. Begriffliche Analysen schienen in dieser Zeit für ihn eine sicherere Alternative zu den hochspekulativen Ansätzen aus den Jahren 1918–20 zu sein. Auch in weiteren Arbeiten Weyls in den 1920er Jahre finden sich Fragestellungen solcher Art, etwa in seinen Untersuchungen zum *gruppentheoretischen Fundament der Tensorrechnung* (Weyl 1924). Auf dem Weg zum Beweis des Hauptsatzes dieser Arbeit entdeckte Weyl die Möglichkeit der Übertragung des Hurwitz-Schurschen "unitären Tricks" von der Invariantentheorie auf die Darstellungstheorie als Schlüssel zum Beweis der vollständigen Irreduzibilität. Dadurch wurde sie zum Einstiegstor in Weyls große Serie von Publikationen über die Darstellungstheore von Liegruppen (Hawkins 2000). Die Ausgangsfrage der Arbeit richtete sich jedoch zunächst auf die Rolle symmetrischer Tensoren in der Darstellungstheorie der speziellen linearen Gruppe $SL_n(\mathbb{R})$.

Die Charakterisierung von tensoriellen Symmetrietypen waren ihm als wichtig für die Felder der ART aufgefallen. Seine Arbeiten an der mathematischen Analyse des Raumproblems und E. Cartans Beitrag dazu (Cartan 1923) veranlassten ihn dazu, sich Cartans Arbeiten zur Klassifikation und Darstellung einfacher Liealgebren genauer anzusehen. Diese wurden um 1923 herum zum Katalysator für eine Erweiterung seiner eigenen mathematischen Fragestellungen. Er entdeckte, wie sich Cartans Klassifikation der Darstellungen der $sl_n\mathbb{R}$ mittels des unitären Tricks in eine vollständige Liste der irreduziblen Darstellungen der speziellen linearen Gruppe selbst, $\mathfrak{G} := SL_n(\mathbb{R})$, übersetzen ließ. Das Ergebnis zeigte, dass es sich um — durch Symmetrietypen ausgezeichnete — Unterräume von Tensorprodukten des $\mathbb{R}^n$ handelte. Weyl war davon so beeindruckt, dass er dies kurzerhand zur begrifflichen Grundlage der Tensorrechnung überhaupt erklärte:

> Und das wahre mathematische Fundament der Tensorrechnung scheint mir der Satz zu sein, daß *auf diese Weise jede zu* $\mathcal{G}$ [$= SL_n(\mathbb{R})$, E.S.]

[11] Für mehr Einzelheiten siehe (Scholz 2004*b*, Scholz 2010). Eine andere Interpretation geben (Coleman/Kort/'e 2001).

*isomorphe, linear- homogene Gruppe* $\Gamma$*, jede "Darstellung von* $\mathfrak{G}$*" erhalten wird.* (Weyl 1924, 451)

Eine solche Aussage mag aus späterer Sicht, die auf eine entwickelte multilineare Algebra zurückgreifen kann, möglicherweise nicht mehr überzeugend wirken. Für Weyl jedoch stellte sie eine höchst überzeugende und gleichzeitig überraschende Beziehung zwischen den tensoriellen "infinitesimalen" Strukturen der allgemein relativistischen Feldtheorie und der Darstellungstheorie der speziellen lineare Gruppe her. Als wenige Jahre später klar wurde, dass in der relativistischen Quantentheorie die Darstellungen der reellen speziellen linearen Gruppe durch die der Lorentzgruppe zu ersetzen waren, übertrug Weyl in seiner Arbeit zur allgemein relativistischen Diracgleichung (Weyl 1929) die irreduziblen Darstellungen der $SL_2(\mathbb{C})$ auf die infinitesimalen Strukturen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit (Konstruktion eines lokalen *Spinorbündels* in späterer Terminologie). Diese Art der Vorgehensweise ging über ("bloße") Begriffsanalyse schon weit hinaus, obgleich die Fragestellung zumindest der Arbeit (Weyl 1924) aus einer solchen hervorging. Inhalt und Ergebnis zeigten aber schon in eine Richtung, die Weyl in der zweiten Hälfte der 1920er Jahre in steigender Deutlichkeit ausformulierte.

## 3. Teilnahme an der 'symbolischen Konstruktion' der Wirklichkeit

Begriffsanalytisch ausgerichtete Forschung zur Unterstützung naturwissenschaftlicher Wissensbildung war — und bleibt — hilfreich und wichtig; aber sie operiert natürlich zurückhaltender als die mathematische Physik im Modus der spekulativen Naturphilosophie, der die Weylschen Arbeiten an der Wende zu den 1920er Jahren dominierte. Weyl schien das auf Dauer nicht zu genügen; auf jeden Fall finden wir im letzten Drittel des Jahrzehnts Kommentare und Arbeiten unseres Autors, die diese Zurückhaltung gegenüber der Physik aufgaben. Dazwischen lag ein Jahr intensiven Studiums der wissenschaftsphilosophischen Literatur (Ende 1925 bis Mitte 1926), durch das sich Weyl auf die Abfassung seiner *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften* (Weyl 1927*a*) vorbereitete (im folgenden PMN). In derselben Zeit vollzog sich der Übergang zur "neuen" Quantentheorie.

Weyl näherte sich um die Mitte der 1920er Jahre in Sachen Grundlagen der Mathematik den Aufassungen Hilbert wieder an, wenn auch in seiner eigenen Weise.[12] Das verband sich in steigendem Maße mit dem Blick auf die Verbindung von Mathematik und Physik. Ab etwa 1925 äußerte er, ganz anders als noch vier Jahre vorher, eine Wertschätzung für Hilberts Programm der logischen Absicherung der transfiniten Teile der Mathematik durch formale, aber *finite* Methoden im Sinne Hilberts (Weyl 1925) — allerdings nur insofern es dort um eine "Darstellung des Transzendenten im Symbol" ging (ebda, 540). Etwas später begann er von der "kühnen theoretischen Konstruktion" zum Zwecke der Wirklichkeitserkenntnis zu sprechen (Weyl 1927*a*, 51, 53),[13] um dies schließlich zur "symbolischen Konstruktion der Welt (symbolic construction of the world)" zusammenzuziehen (Weyl 1934, 78).

Das geschah in der Zeit der Entstehung der neuen Quantenmechanik (QM) von Heisenberg/Born/Jordan/Dirac/Schrödinger. Durch die Arbeit am Aufbau

[12]Vgl. dazu (Jahnke 1990).
[13]Entsprechend in (Weyl 1949, 64ff.).

der QM und die Herausforderung ihrer Interpretation wurde die rein formale Seite von Theorien der Physik noch einmal stärker betont, als dies schon nach der Formulierung der ART der Fall war. Das war ein zentrales Thema der logisch-empiristisch oder auch positivistisch ausgerichteten Kommentare zur QM von Physikern, Mathematikern und Philosophen. Für Weyl war das nicht grundsätzlich anders, während er auf die ART noch mit durchaus überschwänglich vorgetragenen, naturphilosophisch inspirierten Theorievorschlägen herangetreten war.

Er betonte nun im Anklang an die Debatte um die Grundlagen der Mathematik den wichtigen Beitrag einer mathematisch einwandfreien formalen (insbesondere konsistenten) Durchbildung der physikalischen Theorie, bestritt aber weiterhin vehement, dass sich dieser *lediglich* in der korrekten deduktiven Struktur der Theoriebildung auswirkte. Vielmehr galt ihm eine mathematisch gut durchgebildete physikalische Theorie, auch in ihren abstrakten Teilen, als eine *Repräsentation des Wirklichen im Symbol*, nicht nur in ihren direkt mit der Empirie vermittelbaren Observablen oder Beobachtungssätzen. Dieses Wirkliche musste dabei nicht — ja konnte vielleicht nicht einmal — anders als "im Symbol" benannt und bezeichnet werden. Es war jenseits der anschaulichen Evidenz und galt Weyl somit als *transzendent*, mit durchaus beabsichtigtem Anklang sowohl an die Sprache der Religion als auch an das Transzendete und Transfinite innerhalb der Mathematik.

Dies galt insbesondere für die Quantenrealität, die hinter den Erscheinungen mit ihren stochastischen Regularitäten lag, ohne selber direkt zugreifbar oder auch nur in sinnlichen Bildern imaginierbar war. Bestenfalls hatte ein solches auf sinnliche Anschauung rekurrierendes Bild (wie "Welle" oder "Teilchen" etc.) eine ebenfalls bloß symbolische Funktion mit metaphorischem Charakter und von beschränkter Reichweite. Von den mathematischen Symbolen erhoffte sich Weyl mehr — wenn sie denn in geeigneter Weise gewählt und ausgebildet waren. Das lässt sich vielleicht am besten an einem einfachen Beispiel erläutern: Weyls Diskussion der Rolle hermitescher Formen (beziehungsweise Operatoren) bei der Beschreibung *reiner Fälle* in der QM, obgleich dieses Bespiel keineswegs in besonderer Weise Weyls eigene Forschungsbeiträge zur QM zum Ausdruck bringt.[14]

Durch Gespräche und Korrespondenz mit Born, Jordan und Schrödinger während der Jahre 1925/26 verfolgte Weyl die Entstehung der neuen Quantenmechanik direkt und aktiv mit. Seine erste Publikation zu diesem Thema erschien anderthalb Jahre später (Weyl 1927*b*), kurz darauf sein weithin bewundertes, aber schwieriges Buch (Weyl 1928). Er konzentrierte sich dabei speziell auf konzeptionelle Fragen, die mit der Quantenwahrscheinlichkeit und den Einsatz der Gruppentheorie in der QM verbunden waren. Zu seinen wichtigsten Forschungsbeiträge zu den Grundlagen der QM zählen insbesondere:

(i) die integrale Fassung (Weyl-Form) der Heisenbergschen Kommutationsrelation, das darauf aufbauende Studium projektiver Darstellungen der "kinematischen Gruppe" $\mathbb{R}^{2n}$ eines Quantenysystems mit $n$ raumartigen Freiheitsgraden und die Eindeutigkeit der Schrödinger Darstellung (spä-

[14] Allerdings erfolgte Weyls Charakterisierung der "reinen Fälle" und deren Unterscheidung von "Mischungen" zeitglich mit der von J. von Neumann — möglicherweise mit mündlichem Austausch zwischen beiden Autoren — und enthielt selbst hier einen kleinen Originalbeitrag Weyls zur begrifflichen Grundlagenklärung in der QM.

ter präzisiert im Stone – von Neumann Theorem) und die Ansätze zur späteren Weyl-Quantisierung (Weyl 1927*b*),[15]

(ii) Theorie der homöopolaren Bindung durch Spinkopplung von Valenzelektronen (Weyl 1928, Weyl 1949),[16]

(ii) Übergang zur $U(1)$-Eichtheorie der Elektrodynamik in der Theorie des Diracfeldes (Weyl 1929).[17]

Dies Arbeiten sind technisch aufwendig; ihre Darstellung würde jeweils einen eigenen Beitrag erforderlich machen. Wir beschränken uns daher hier auf die einfachst mögliche Grundlagenfragen bezüglich der Rolle hermitescher Formen/Operatoren.

Unser Autor betrachtete in (Weyl 1927*b*) überall definierte hermitesche Formen im "unitären Raum" (Weyls Formulierung in (Weyl 1928) für *Hilbertraum*).[18] *Reine Fälle* quantenmechanischer Zustände werden durch Einheitsvektoren, oder etwas allgemeiner durch einen Strahl im unitären Raum angegeben (Weyl 1927*b*, 99). Diese symbolisieren physikalisch gesehen Zustände von höchstmöglicher Homogenität hinsichtlich eines bestimmten Experimentalarrangements und damit, konzeptionell gesehen, bezüglich einer dadurch ausgezeichneten Observablen. Weyl erläuterte dies am Beispiel des "magnetischen Elektrons" (Spinphänomen). Sortiert man durch eine (stilisierte) experimentelle Konstellation analog dem Stern-Gerlach Experiment diejenigen Elektronen mit positivem Spin in eine auszeichnete $x$-Richtung aus ($\sigma_x = +1$), so gilt:

> In einem solchen Elektronenschwarm haben wir (wenn wir noch von Ort und Geschwindigkeit der Elektronen abstrahieren) einen '*reinen Fall*' vor uns: er ist von einer inneren Homogenität, die prinzipiell nicht gesteigert werden kann. Denn alle physikalischen Fragen, welche sich sinnvoll mit Bezug auf ihn stellen lassen, finden eine von *vornherein angebbare numerisch bestimmte* Antwort. (Weyl 1927*b*, 96)

Die "numerische Bestimmtheit" bezog sich natürlich lediglich auf Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Bei der Betrachtung eines realen Elektronenschwarms habe man es im Gegensatz zum "reinen Fall" häufig mit einer "Mischung", einem "Mischstrom" oder einem "Gemenge" zu tun (synonym verwendet). Diese seien mathematisch durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß über reine Fällen beschreibbar; Weyl beschränkte sich allerdings auf endliche Gemenge und daher auf rein kombinatorisch angebbare Wahrscheinlichkeiten.[19] Auf die Art der Zusammensetzung eines Misch-

[15] Siehe dazu Hinweise in J. Lackis Beitrag, dieser Band, und (Scholz 2006).

[16] (Parshall 1997, Scholz 2006).

[17] Vgl. (Straumann 2001, Scholz 2005*a*)

[18] Die Terminologie "Hilbertscher Raum von unendlich vielen Dimensionen" wurde von F. Riesz für den Folgenraum $l_2$ verwendet, etwa in (Riesz 1918). Die axiomatische Definition des Hilbertraums erfolgte durch J. von Neumann (von Neumann 1930), dort auch Präferenz für die Betrachtung linearer (hermitescher) Operatoren und die Behandlung der analytisch kniffligen Fragen bei nicht beschränkten, nicht überall definierten symmetrischen bzw. selbstadjungierten Operatoren und des stetigen Anteils des Spektrums (Monna 1973).

[19] Von Neumann führte für den allgemeineren Fall einer Mischung über das stetige Spektrum der primären, den "reinen Fall" charakterisierenden Observablen die Charakterisierung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes durch später so genannte Spurklassen Operatoren (trace class) ein.

stroms könne man umgekehrt nur durch Auswertung experimentell beobachtbarer Häufigkeiten schließen.

Darin sah Weyl nichts für die QM Besonderes; denn auch beim Studium der Populationsdynamik von Spezies habe man etwa die "reinen Linien" der Mendelschen Vererbungslehre herauszupräparieren:

> Hier wie dort ist es eine wichtige Aufgabe der Experimentierkunst, reine Linien zu isolieren. Die Unterscheidung: Theorie der reinen Fälle einerseits, Statistik der Gemenge andererseits, scheint mir fundamental für die richtige Erfassung des Sinnes der Quantenmechanik. (Weyl 1928, 97)

Hatte die experimentelle Physik aus den auftretenden Mischungen "reine Fälle" extrahiert, so konnte man für die mathematische Beschreibung zwanglos von einer frequentistischen Beschreibung zu einer wahrscheinlichkeitstheoretischen übergehen:

> An dem Tatbestand, die Elektronenschwärme betreffend, wie er hier beschrieben wurde, ist nichts Paradoxes. Statt vom Schwarm spreche ich in Zukunft vom einzelnen Elektron und demgemäß von Wahrscheinlichkeit statt von Häufigkeit. (ebda)

In Weyls Sicht lieferte also die Bornsche Interpretation der Schrödingerschen Wellenfunktion Wahrscheinlichkeitsaussagen über das *einzelne Quantenobjekt* (eines reinen Falls). Bei gut präparierten Gesamtheiten ("Schwarm") kommen diese in entsprechenden Häufigkeitsverteilungen der Messwerte von observablen Größen zum Ausdruck. Damit war nach Weyl auch klar, worin man die "physikalische Bedeutung" der hermiteschen Operatoren (beziehungsweise Formen) in der QM zu sehen hatte:

> Der Kalkül der Hermiteschen Formen entspricht in rechnerischer Hinsicht allen Anforderungen, welche sich aus dem eben entwickelten Programm ergeben. Jede physikalische Größe wird repräsentiert durch eine Hermitesche Form, alle physikalischen Größen an demselben System durch Hermitesche Formen der gleichen Variablen $x_i$ [stehen für Koeffizienten auf Einheit normierten Basis von Strahlen im unitären Raum, E.S.]. (Weyl 1927*b*, 98)

Bei nichtkommutierenden "Koeffizientenmatrizen" hermitescher Formen führt dies notwendig zu Wahrscheinlichkeitssagen für weitere Größen, falls ein reiner Fall zur ersten Größe (bezüglich der das betrachtete System experimentell gesprochen präpariert, mathematisch gesehen definiert wird) vorliegt. Das sei "in Einklang mit Heisenbergs Anschauungen, wie er sie kürzlich in dieser Zeitschrift"[20] entwickelt habe (ebda 100).

Weyl lag mit dieser Darstellung nicht weit entfernt von Hilberts axiomatischer Auffassung der QM, wie sie insbesondere durch von Neumann weiterentwickelt wurde (Hilbert e.A. 1927, von Neumann 1927*a*, von Neumann 1927*b*). Doch lag sein Augenmerk nicht primär auf der Ausarbeitung der formalen Struktur, sondern auf einer sublimen Verschränkung von experimenteller Evidenz mit mathematisch angepassten Strukturen bei der Einführung der Grundbegriffe der neuen Theorie. Inbesondere gabe es für ihn keine prinzipielle Trennung

[20](Heisenberg 1927)

zwischen Beobachtungssätzen (Häufigkeitsaussagen der mathematischen Statistik) und Strukturaussagen (Eigenwerte hermitescher Formen, Projektion im Fall nichtkommutierender "Koeffizientenmatrizen" etc.).[21]

Aus Weyls Sicht war die Theorie der unitären Räume (Hilberträume) und der hermiteschen Formen (hermiteschen und selbstadjungierten Operatoren) durch darstellungstheoretische Strukturen der Symmetrien von Quantensystemen anzureichern ($SO_3(\mathbb{R})$, Permutationen, Strahldarstellung der kinematischen Gruppe $\mathbb{R}^{2n}$, Lorentzgruppe $\sim SL_2(\mathbb{C})$, $U(1)$ — die letzteren global und "lokalisiert" in der Funktion als Eichgruppen, etc.). Erst zusammen führte dies zu einer zumindest in einigen Aspekten adäquaten Darstellung der Quanten-Wirklichkeit "im Symbol".

Das Symbolsystem hatte dabei nicht lediglich eine formal axiomatische Bedeutung zur systematischen Ableitung von empirisch überprüfbaren Aussagen. Aus Weyls Sicht hatte es, wenn es gut gebaut war, bei ausreichend vorsichtiger Interpretation die Bedeutung einer Repräsentation "des Wirklichen", das man nicht direkt sieht, dessen Wirksamkeit aber in den gesetzhaften Regelmäßigkeiten der empirischen Statistik von Quantensystemen zum Ausdruck kommt. Die so verstandene (Quanten-) Realität braucht weder der unmittelbaren empirischen Anschauung noch der intellektuellen (nicht einmal der naturphilosophischen) Spekulation zugänglich sein.[22] Besonders zugespitzt trat dies in der nichteliminierbaren Stochastizität der Quantenwirklichkeit hervor (symbolisch repräsentiert durch nichtkommutierende Operatoren), die dennoch in vollem Einklang mit einer gesetzmäßigen Dynamik (unitäre Entwicklung des Zustands im Schrödinger- Bild) standen.

In seinem Anhang (C) zur englischen Ausgabe von (Weyl 1949) gab Weyl eine Zusammenfassung derjenigen Züge der Quantenphysik, die ihm von herausragender philosophischer Bedeutung erschienen. Darunter waren (starke Auswahl und Umordnung seitens E.S.):

> – There exits a primary probability, as a basic trait of nature itself, that has nothing to do with the observer's knowledge or ignorance ... (Weyl 1949, 263)
>
> – The principle of causality holds for the temporal change of the wave state, but must be dropped as far as the relation between wave and quantum states is concerned ["quantum state" hier verwendet im Sinne von Eigenzuständen von Observablen, E.S.] ... (ibid.)
>
> – ... observation is impossible without an encroachment the effect of which can be predicted only in a statistical sense. Thus new light is thrown on the relationship of subject and object; they are more closely tied together than classical physics had realized ... (ibid.).

[21]Eine Diskussion um einen vermeintlichen "Kollaps der Wellenfunktion" würde aus seiner Sicht keinen Sinn machen und müsste wohl eher als pseudo-ontologischer Hokuspokus erscheinen. Weyl zog es anscheinend vor, sich zu dieser Frage erst gar nicht zu äußern. Jedenfalls ist mir keine entsprechende Stelle in seinen Schriften oder dem mir bekannten Teil seiner Manuskripte oder Korrespondenzen aufgefallen.

[22]An anderer Stelle habe ich das als "symbolischen Realismus" bezeichnet (Scholz 2005*c*).

Für das Verhältnis von Mathematik zur Physik hatte dies die Zuspitzung einer Beziehung zur Folge, die Weyl schon vorher mit Blick auf die ART wie folgt charakterisierte:

> ... [W]e develop the theory as a symbolic construction with unexplained symbols and only in the end indicate in which way certain derived quantities may be checked by observation. (*Man and the foundations of science*, 1949, zitiert nach (Weyl 2009, 183))

Das war im Jahr 1949 formuliert und klang nun schon sehr nahe an Hilberts Auffassung der axiomatischen Methode in der Physik. Tatsächlich zog Weyl im selben Jahr die Parallele explizit, diesmal wieder in Anhang (C) von PMN:

> The 'physical process' undisturbed by observation is represented by a mathematical formalism without intuitive (anschauliche) interpretation; only the concrete experiment, the measurement by means of a grating [here in the generalized sense of a complete system of projectors, E.S.] can be described in intuitive terms. This contrast of physical process and measurement has its analogue in the contrast of formalism and meaningful thinking in Hilbert's system of mathematics. (Weyl 1949, 261)

Weyls Auffassung der strukturellen Unterstützung der mathematischen Naturwissenschaften durch die Mathematik bei der 'symbolischen Konstruktion der Wirklichkeit' verschob sich also in den zwei Jahrzehnten von Ende der 1920er Jahre bis zu den späten 1940ern noch einmal. Stand am Anfang dieses Zeitraums das 'symbolisch realistische' Motiv einer Darstellung des 'transzendenten' Wirklichen im Symbol noch im Zentrum seiner — damals auch aktiven — Bemühungen, die sich nur teilweise mit denen der mathematischen Physik im Sinne Hilberts deckte, zog er zwanzig Jahre später eine direkte Parallele zu dessen Auffassungen der axiomatischen Methode, sogar hinsichtlich der Grundlagen der Mathematik.

### Eine Nachbemerkung

Um keinen falschen Eindruck entstehen zu lassen, möchte ich abschließend darauf hinweisen, dass Weyls letzte Annäherung an Hilberts Auffassung der axiomatischen Methode keineswegs den Übergang zur Sichtweise einer gesicherten Wissensfundierung bedeutete. Ganz im Gegenteil! Es handelte es sich hier um einen eher skeptischen Kommentar zu Entwicklungen der letzten beiden Jahrzehnte.

Was die Quantenphysik angeht, sind die Gründe nicht eindeutig festzustellen. Wahrscheinlich waren sie zumindest teilweise den technischen Schwierigkeiten der Quantenfeldtheorie (QFT) geschuldet; vermutlich entsprach diese Haltung aber auch seinem eigenen Rückzug aus dem Feld als aktiver Forscher.[23] Weyl nahm jedenfalls die Entwicklung der QFT lediglich als Beobachter zur Kenntnis (Weyl 1949, 264); eigene Arbeiten dazu sind weder publiziert, noch finden sie sich im Nachlass Versuche in diese Richtung.

[23] Wenn diese Einschätzung zutrifft, dürften sich die beiden Motivlagen abgestützt, vielleicht sogar wechselseitig verstärkt haben. Zur frühen Entwicklung der QFT siehe den Beitrag von C. Lehner, dieser Band.

Hinsichtlich der Weylschen Einschätzung in Sachen Grundlagen der Mathematik ist die Quellenlage besser und völlig eindeutig. Im ersten 1949 neu verfassten Anhang (A) für die englische Ausgabe der *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences* wertete Weyl die Ergebnisse der Gödelschen und Gentzenschen Forschungen für das Hilbertprogramm der Sicherung der Grundlagen der Mathematik aus. Das Resultat war für ihn sehr ernüchternd. Die beiden Gödelschen Unvollständigkeitssätze stellten aus Weyls Sicht für Hilberts ursprüngliches (finites) Programm eine "Katastrophe (catastrophe)" dar (Weyl 1949, 60f.). Gentzens Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Arithmetik erschien ihm zwar "genial (ingenious)", war aber aufgrund seines notwendigerweise "substantially lower standard of evidence" am Ende doch nicht mehr als ein "Pyrrhus-Sieg" (Weyl 1949, 220). Hier kamen wieder Weyls konstruktivistische Sicht zum Tragen: eine beweistheoretische Argumentation, die transfinite Induktion bis in die Cantorsche zweite Zahlenklasse hinein verwendete, konnte zwar aus seiner Sicht als genial anerkannt werden; einen Anspruch auf Evidenz konnte sie nicht erheben.

Diese Kurzfassung der Weylschen Sicht von 1949 mag negativer klingen, als sie gemeint war. Weyl war nie ein Vertreter ewiger (oder gar auf ewig abgesicherter) Wahrheiten, weder in den Zeiten seiner größten Distanz zu Hilbert (1918–1920) noch in denen größerer Annäherung (1905–1912, 1925ff). So konnte er den Schlägen für das Hilbert-Programm auch etwas Positives abgewinnen. Zu Beginn des 1949er Anhangs zu den PMN über die Grundlagen der Mathematik machte er klar, worin er die übergreifende Bedeutung der Gödelschen Unvollstädnigkeitssätze sah:

> The ultimate foundations and the ultimate meaning of mathematics remain an open problem; we do not know in what direction it will find its solution, nor even whether a final objective answer can be expected at all. 'Mathematizing' may well be a creative activity of man, like music, the products of which not only in form but also in substance are conditioned by the decisions of history and therefore defy complete objective rationalization ... (Weyl 1949, 219)

Ähnlich wie Weyl schon Mitte der 1920er Jahre gefordert hatte, als er sich Hilbert wieder anzunähern begann, nun aber aus noch viel grundsätzlicheren Gründen, war die Widerspruchfreiheitssicherung nach Gödels Resultaten von 1931 endgültig zu einem Teil des größeren, transdisziplinären Unternehmens der mathematischen Wissenschaften insgesamt geworden. Darin spielte die Konsistenzsicherung der Mathematik keine unwichtige, aber eine insgesamt eher untergeordnete Rolle. Mit dem Verlust der Hoffnung auf eine fundamentale Sicherung der Widerspruchsfreiheit der interessanteren Teile der Mathematik blieb denn zuletzt folgendes:

> A truly realistic mathematics should be conceived, in line with physics, as a branch of the theoretical construction of the one real world, and should adopt the same sober and cautious attitude toward hypothetic extensions of its foundations as is exhibited by physics. (Weyl 1949, 235)

Das wurde 1949 geschrieben. Die theoretische und mathematische Physik wurde damals nach vergleichsweise strikten Maßstäben betrieben. Die Rolle W. Paulis als Kritiker der zeitgenössischen Bemühungen mag als ein Indikator dafür betrachtet werden.

Mehr als fünfzig Jahre später und unter dem Einfluss diverser string und superstring "revolutions" kann man den Zustand der theoretischen Grundlagenphysik kaum noch durch die Beschreibung "sober and cautious attitude toward hypothetic extensions of its foundations" kennzeichnen. Die heutige theoretische Physik (2010) gibt der Mathematik keinen Anlass, sie hinsichtlich der Nüchternheit ihrer Grundlagenerweiterung als Vorbild zu betrachten.[24] Hinsichtlich ihrer Ideenlieferungsfunktion mag das anders bewertet werden; dies ist aber hier nicht das Thema.[25]

# Literatur


Atiyah, Michael. 2002. "Mathematics in the 20th century." *Bulletin London Mathematical Societey* 34:1–15.

Baeumler, Alfred; Schroeter, Manfred. 1927. *Handbuch der Philosophie. Bd. II. Natur, Geist, Gott.* München: Oldenbourg.

Cartan, Élie. 1923. "Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl." *Journal des Mathématiques pures et appliquées* 2:167–192. In (Cartan 1952ff., III, 633–658).

Cartan, Élie. 1952ff. *Oeuvres Complètes.* Paris: Gauthier-Villars.

Coleman, Robert; Korté, Herbert. 2001. Hermann Weyl: Mathematician, physicist, philosopher. In *Hermann Weyl's* Raum - Zeit - Materie *and a General Introduction to His Scientific Work*, ed. E. Scholz. Basel: Birkhäuser pp. 161–388.

Corry, Leo. 2004. *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918. From Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik.* Dordrecht: Kluwer.

Ehlers, Jürgen; Pirani, Felix; Schild Alfred. 1972. The geometry of free fall and light propagation. In *General Relativity, Papers in Honour of J.L. Synge*, ed. Lochlainn O'Raiferteagh. Oxford: Clarendon Press pp. 63–84.

Hawkins, Thomas. 2000. *Emergence of the Theory of Lie Groups. An Essay in the History of Mathematics 1869–1926.* Berlin etc.: Springer.

Heisenberg, Werner. 1927. "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik." *Zeitschrift für Physik* 49:172–198.

Hilbert, David. 1992. *Natur und mathematisches Erkennen. Vorlesungen, gehalten 1919–1920 in Göttingen.* Nach Ausarbeitungen von P. Bernays. Hrsg. D. Rowe. Basel etc.: Birkhäuser.

Hilbert, David; Nordheim, Lothar; von Neumann Johann. 1927. "Über die Grundlagen der Quantenmechanik." *Mathematische Annalen* 98:1–30. In (von Neumann 1961/1976, I, 104–133).

Jahnke, Hans Niels. 1990. "Hilbert, Weyl und die Philosophie der Mathematik." *Mathematische Semesterberichte* 37:157–179.

Kragh, Helge. 1999. *Quantum Generations : A History of Physics in the Twentieth Century.* Princeton: UP.

Monna, Antonie F. 1973. *Functional Analysis in Historical Perspective.* Utrecht: Oosthoek.

O'Raifeartaigh, Lochlainn. 1997. *The Dawning of Gauge Theory.* Princeton: University Press.

Parshall, Karen. 1997. Chemistry through invariant theory? James Joseph Sylvester's mathematization of the atomic theory. In *Experiencing Nature: Proceedings of a Conference in Honor of Allen G. Debus*, ed. K. Parshall; P. Theerman. Dordrecht: Kluwer pp. 81–111.

Pauli, Wolfgang. 1979. *Wissenschaftlicher Briefwechsel .... Scientific Correspondence with Bohr, Einstein, Heisenberg a.o.. Volume I: 1919–1929* Edited by A. Hermann, K. von Meyenn, V.F. Weisskopf. Berlin etc.: Springer.


[24] Siehe dazu aus historischer Sicht das letzte Kapitel in (Kragh 1999), aus kritischer Perspektive theoretischer beziehungweise mathematischer Physiker (Smolin 2006, Woit 2006).

[25] Vgl. (Atiyah 2002, 12ff.), oder auch die ersten beiden Pfeiler der monumental angelegten *Brücke* (Zeidler 2006ff.).

Riesz, Friedrich. 1918. “Über lineare Funktionalgleichungen.” *Acta Mathematica* 41:71–98.

Ryckman, Thomas. 2005. *Reign of Relativity. Philosophy in Physics 1915–1925.* Oxford: University Press.

Scholz, Erhard. 2004*a*. The changing concept of matter in H. Weyl’s thought, 1918 - 1930. In *The interaction between Mathematics, Physics and Philosophy from 1850 to 1940*, ed. J. Lützen. Dordrecht etc.: Kluwer. [http://arxiv.org/math.HO/0409576].

Scholz, Erhard. 2004*b*. “Hermann Weyl’s analysis of the “problem of space” and the origin of gauge structures.” *Science in Context* 17:165–197.

Scholz, Erhard. 2005*a*. Local spinor structures in V. Fock’s and H. Weyl’s work on the Dirac equation (1929). In *Géométrie au XXième siècle, 1930 – 2000. Histoire et horizons*, ed. D. Flament; J. Kouneiher; P. Nabonnand; J.-J. Szczeciniarz. Paris: Hermann pp. 284–301. [http://arxiv.org/physics/0409158].

Scholz, Erhard. 2005*b*. “Philosophy as a Cultural Resource and Medium of Reflection for Hermann Weyl.” *Révue de Synthèse* 126:331–351. [arxiv.org/math.HO/0409596].

Scholz, Erhard. 2005*c*. Practice-related symbolic realism in H. Weyl’s mature view of mathematical knowledge. In *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*, ed. J. Gray J. Ferreiros. Oxford: UP pp. 291–309.

Scholz, Erhard. 2006. “Introducing groups into quantum theory (1926–1930).” *Historia Mathematica* 33:440–490. [http://arxiv.org/math.HO/0409571].

Scholz, Erhard. 2010. “H. Weyl’s and E. Cartan’s proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s.” *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* . To appear.

Scholz, Erhard (ed.). 2001. *Hermann Weyl’s* Raum - Zeit - Materie *and a General Introduction to His Scientific Work.* Basel etc.: Birkhäuser.

Sieroka, Norman. 2010. *Umgebungen. Symbolischer Konstruktivismus im Anschluss an Hermann Weyl und Fritz Medicus.* Zürich: Chronos.

Smolin, Lee. 2006. *The Trouble With Physics: The Rise of String Theory, the Fall of a Science, and What Comes Next.* Boston (Mass.): Houghton Mifflin. Reprint Penguin 2008.

Straumann, Norbert. 2001. Ursprünge der Eichtheorien. In *(Scholz 2001).* pp. 138–160.

Vizgin, Vladimir. 1994. *Unified Field Theories in the First Third of the 20th Century.* Translated from the Russian by J. B. Barbour. Basel etc.: Birkhäuser.

von Neumann, Johann (János, John). 1927*a*. “Mathematische Begründung der Quantenmechanik.” *Nachrichten Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften* pp. 1–57. In (von Neumann 1961/1976, I, 151–207).

von Neumann, Johann (János, John). 1927*b*. “Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik.” *Nachrichten Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften* pp. 273–291. In (von Neumann 1961/1976, I, 208–235).

von Neumann, Johann (Janos, John). 1930. “Eigenwerttheorie hermitescher Funktionaloperatoren.” *Acta Mathematica* 102:49–131.

von Neumann, John (János, Johann). 1961/1976. *Collected Works,* 6 volumes, ed. A.H. Taub. Oxford etc.: Pergamon.

Weyl, Hermann. 1918*a*. “Gravitation und Elektrizität.” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* pp. 465–480. In (Weyl 1968, II, 29–42), English in (O’Raifeartaigh 1997, 24–37).

Weyl, Hermann. 1918*b*. “Reine Infinitesimalgeometrie.” *Mathematische Zeitschrift* 2:384–411. In (Weyl 1968, II, 1–28).

Weyl, Hermann. 1919. *Raum, - Zeit - Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Dritte, umgearbeitete Auflage.* Berlin etc.: Springer.

Weyl, Hermann. 1921*a*. “Das Raumproblem.” *Jahresbericht DMV* 30:92ff. In (Weyl 1968, II, 212–228).

Weyl, Hermann. 1921*b*. “Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung.” *Nachrichten Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften* pp. 99–112. In (Weyl 1968, II, 195–207).

Weyl, Hermann. 1922. "Das Raumproblem." *(Kurzfassung Jber. DMV 30 (1921), 92.) Jahresbericht DMV* 31:205–221. In (Weyl 1968, II, 212–228).

Weyl, Hermann. 1923*a*. *Mathematische Analyse des Raumproblems.* Vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid. Berlin etc.: Springer. Nachdruck Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1963.

Weyl, Hermann. 1923*b*. *Raum - Zeit -Materie,* 5. Auflage. Berlin: Springer.

Weyl, Hermann. 1924. "Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechung." *Nachrichten Gesellschft der Wissenschaften Göttingen, Math.-phys. Klasse* pp. 218–224. In (Weyl 1968, II, 460–467).

Weyl, Hermann. 1925. "Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik." *Symposion* 1:1–32. In (Weyl 1968, II, 511–542).

Weyl, Hermann. 1927*a*. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.* München: Oldenbourg. In (Baeumler 1927, Bd. II A); separat. Weitere Auflagen [2]1949, [3]1966. English with comments and appendices (Weyl 1949).

Weyl, Hermann. 1927*b*. "Quantenmechanik und Gruppentheorie." *Zeitschrift für Physik* 46:1–46. In (Weyl 1968, III, 90–135).

Weyl, Hermann. 1928. *Gruppentheorie und Quantenmechanik.* Leipzig: Hirzel. [2]1931, English translation R.P. Robertson, New York: Dutten 1931.

Weyl, Hermann. 1929. "Elektron und Gravitation." *Zeitschrift für Physik* 56:330–352. In (Weyl 1968, III, 245–267). English in (O'Raifeartaigh 1997, 121–144).

Weyl, Hermann. 1931. "Geometrie und Physik." *Die Naturwissenschaften* 19:49–58. In (Weyl 1968, III, 336–345).

Weyl, Hermann. 1934. "Mind and Nature." Philadelphia: . In (Weyl 2009, 83–150).

Weyl, Hermann. 1949. *Philosophy of Mathematics and Natural Science.* Princeton: University Press. [2]1950, [3]2009.

Weyl, Hermann. 1968. *Gesammelte Abhandlungen, 4 vols.* Ed. K. Chandrasekharan. Berlin etc.: Springer.

Weyl, Hermann. 2009. *Mind and Nature. Selected Writings on Philosophy, Mathematics, and Physics. Edited and with an Introduction by Peter Pesic.* Princeton: University Press.

Woit, Peter. 2006. *Not Even Wrong: The Failure of String Theory and the Continuing Challenge to Unify the Laws of Physic.* New York: Basic Books.

Yang, Chen Ning. 1986. Hermann Weyl's contributions to physics. In *Hermann Weyl 1885–1955. Centenary Lectures*, ed. A. Borel; K. Chandaskharan; R. Penrose; C.N. Yang. Berlin etc.: Springer pp. 7–22.

Zeidler, Eberhard. 2006ff. *Quantum Field Theory. A Bridge between Mathematicians and Physicists. Vol. I, II (6 planned).* Berlin etc.: Springer.

## Personenverzeichnis

Born, Max (1882 – 1970)
Cartan, Elie (1869 – 1951)
Dirac, Paul A.M. (1902 – 1984)
Eddington, Arthur (1882 – 1944)
Einstein, Albert (1879 - 1955)
Heisenberg, Werner (1901 – 1976)
Hilbert, David (1862 – 1943)
Hund, Friedrich (1896 – 1997)
Jordan, Pascual (1902 – 1980)
Levi-Civita, Tullio (1873 – 1941)
Pauli, Wolfgang (1900 – 1958)
Riesz, Frigyes/Friedrich (1880 – 1956)
Schouten, Jan Arnoldus (1883 – 1971)
Schrödinger, Erwin (1887 – 1961)
Sommerfeld, Arnold (1868 – 1951)
van der Waerden, Bartel L. (1903 – 1996)
Veblen, Oswald (1880 – 1960)
von Neumann, Janos/Johann/John (1903 – 1957)
Weyl, Hermann (1885 – 1955)