

Kapitel I

Die Symmetriekonzepte der Kristallographie und ihre Beziehungen zur Algebra des 19. Jahrhunderts

Vorbemerkungen

Am Ende des 18. Jahrhunderts war die Kristallographie neben Botanik und Zoologie ein Kerngebiet der beschreibenden Naturwissenschaften, der "Naturgeschichte". Die in ihr beobachteten und phänomenologisch klassifizierten Formen ließen die auftretenden Regelmäßigkeiten gegenüber denjenigen in anderen Zweigen der Naturgeschichte so deutlich hervortreten, daß die Kristallographie einem Mathematisierungsversuch der zugrundeliegenden Formbildungsprinzipien als besonders offen erschien und innerhalb der zeitgenössischen spekulativen Naturphilosophie sowie der romantischen Naturbetrachtung als ein vermittelnder Bereich zwischen der anorganischen und der organischen und belebten Natur angesehen wurde. Das Zusammentreffen der beiden zuletzt angedeuteten Strömungen prägte die kristallographischen Theoriebildungen zu Beginn des 19. Jahrhunderts und brachte die für die weitere Entwicklung fundamentale Idee kristallographischer "Symmetriegesetze" hervor. Diese führte noch im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts zur Herausbildung der Konzepte der Kristallsysteme und Kristallklassen sowie deren vollständiger Klassifizierung. Die damit verbundene erste systematische Etablierung von Symmetriegesichtspunkten innerhalb der Kristallographie ist Gegenstand von §1.

Die Theoretiker der von der spekulativen Naturphilosophie beeinflussten Strömung der Kristallographie entwickelten in wenigen Jahrzehnten — motiviert durch die von ihnen vertretene Ontologie der kristallbildenden regelmäßigen Kräftesysteme — beachtenswerte Mathematisierungen, die in der Einführung dreidimensionaler vektorieller Kalküle und der vollständigen Klassifizierung der endlichen Punktsymmetriesysteme (und damit implizit der endlichen orthogonalen Gruppen im dreidimensionalen euklidischen

Raum) gipfelten (§2). Ihre Ergebnisse wurden etwa zur Jahrhundertmitte bei der Neufassung der in Frankreich dominierenden atomistischen Kristallstrukturtheorie durch A. Bravais zum Teil aufgenommen, zum Teil in leicht veränderter Form neu hergeleitet und schließlich durch eine Erweiterung des Symmetriebegriffs auf unendlich ausgedehnte räumliche Systeme (Molekülgitter) erweitert. Dabei stieß Bravais zu einer impliziten Charakterisierung eines Teils der besonders einfach gebauten kristallographischen Raumgruppen (genauer: der semidirekten Produkte endlicher orthogonaler Gruppen mit Translationsgittern) vor (§3).

Erst gegen Ende der 1860er Jahre setzte ein intensiverer Austausch zwischen der disziplinären Mathematik und der kristallographischen Theorie ein. C. Jordan ließ sich von Bravais' Arbeiten zur expliziten Übertragung des Gruppenbegriffs in die Geometrie anregen. Die Rolle des von ihm im Jahre 1869 publizierten *Mémoires* bei der Herausbildung des (geometrischen) Transformationsgruppenbegriffs wird in §4 untersucht. Erst anschließend an diese lange Vorgeschichte erfolgte die im weiteren so erfolgreiche Theoretisierung des kristallographischen Symmetriekonzeptes im Sinne der Gruppentheorie, die in der weithin bekannten Entdeckung der 230 kristallographischen Raumgruppentypen durch Fedorov und Schoenflies (1890/91) gipfelte. Dadurch wurden die kristallographische Theorie auf weitgehend neue Grundlagen gestellt, die Beziehung zwischen Mathematik und Kristallographie völlig erneuert und die theoretischen Voraussetzungen für die neuartigen Entwicklungen der Kristallographie unseres Jahrhunderts geschaffen, die durch die Entdeckung der Röntgenstrahlbeugungsmethode durch Max von Laue möglich wurden (§5).

§1 Von der phänomenologischen Kristallklassifikation zur Einführung der Kristallsysteme und Kristallklassen

1.1 Kristallklassifikation im 18. Jahrhundert: Werner und Romé de l'Isle

Wohl geht die Beobachtung einzelner Kristallformen und die naturphilosophische Spekulation über Entstehung und Auftreten von Kristallen bis weit in die Antike zurück;¹ aus diesen beiden Quellen bildete sich jedoch erst mit Renaissance und wissenschaftlicher Revolution des 16./17. Jahrhunderts ein eigener Zweig der beschreibenden Naturwissenschaften ("Naturgeschichte"). Einschnitte im Konstitutionsprozeß waren die 1669 von Nils Stensen veröffentlichte Entdeckung der Winkelkonstanz zwischen den Seitenflächen des Bergkristalls,² unabhängig von Größe und Ausbildung der Flächen [Marx 1825, 55f.; Groth 1926, 3f.], die Entdeckung der Doppelbrechung am isländischen Kalkspat³ im Jahre 1670, die Christian Huygens zu einem Erklärungsversuch durch die Hypothese eines Aufbaus der bekannten Kristalle aus aneinanderliegenden ellipsoidförmigen kleinsten Teilchen veranlaßte (Huygens 1690), sowie die entscheidende Verbindung von mikroskopischer Beobachtung, graphischer Darstellung und beginnender phänomenologischer Gestaltklassifikation. Auch die terminologische Verallgemeinerung der Bezeichnung "Crystal" von Quarz/Bergkristall auf die gesamte Klasse der regelmäßig geformten Mineralien entstand erst zu dieser Zeit.⁴

Wie die anderen Zweige der Naturwissenschaften gewann die Kristallographie während des 18. Jahrhunderts an Breite und methodischer Präzision. Hier ist nicht der Ort, diesen Prozeß im Detail zu untersuchen,⁵ doch ist die Art der Vorgehensweise bei der Gestaltklassifikation insofern von Belang, als sie den Ausgangspunkt für die beginnende Theoretisierung gegen Ende jenes und zu Beginn des 19. Jahrhunderts bildete. In unserem Zusammenhang ist dabei vor allem die Frage zu klären, ob schon in dieser Phase der Kristallographie implizite Wurzeln von Symmetriekonzepten nachweisbar sind.

Wir werden uns dazu auf zwei, beziehungsweise drei Kristallographen des 18. Jahrhunderts beschränken. Das können wir deswegen, weil deren Arbeiten die Mineralogie/Kristallographie des 18. Jahrhunderts in herausragender Weise prägten: *Abraham Gottlieb Werner* (1750–1817) im deutschsprachigen Raum und *Romé de l'Isle* (1736–1790) sowie *René Just Haüy* (1743–1822) in Frankreich. Haüys Arbeiten sind dabei schon so stark durch mathematisch-geometrische Hypothesenbildung zur Klärung der Kristallstruktur geprägt, daß sie als erster bedeutender Schritt einer mathematischen Theoretisierung gewertet werden müssen, wie sie für die Entwicklung der Kristallographie

des 19. Jahrhunderts charakteristisch wurde. Wir werden sie daher in einem eigenen Unterabschnitt diskutieren (§1.2).

Die Kristallographen des späten 18. Jahrhunderts versuchten, in die beobachteten Kristallformen dadurch System zu bringen, daß sie gewisse einfache Kristallpolyeder als *Grundgestalten* hypostasierten, durch die in schrittweiser Gestaltmodifikation die Vielfalt der beobachteten Kristallformen gleichzeitig erzeugt wie klassifiziert werden sollte. Als *Gestaltmodifikationen* wurden dabei vor allem Ecken- oder Kantenabstumpfungen (Stutzungen) verwendet, darüberhinaus aber auch metrische Deformationen.

Werner ging zunächst (1774) von fünf "*Grundgestalten*" aus: Ikosaeder, Oktaeder, Prisma, (Doppel-) Pyramide, "Tafel". Später ergänzte er diese noch um den Würfel und die "Linse" (von zwei konvexen Flächen begrenzter Körper). Dabei war etwa unter "Pyramide" die gesamte Klasse von n-Pyramiden bzw. n-Doppelpyramiden zusammengefasst, die "Tafel" war lediglich durch zwei große nahe aneinanderliegende Flächen ausgezeichnet. Anzahl und relative Lage der Seitenflächen waren nicht weiter spezifiziert; ebensowenig metrische Daten im allgemeinen. Die beiden ersten Grundformen waren als kombinatorische — nicht notwendig reguläre — Polyeder verstanden. Bei der Beschreibung der Kristallformen ging Werner von einer Grundform aus und erklärte die betrachtete Form durch schrittweise Abänderung (Stutzen von Ecken und Kanten) und durch qualitative (nicht-messende) Beschreibung metrischer Eigenschaften wie "Zuspitzung" (auffällig kleine Flächen- oder Kantenwinkel) und eine qualitative Skala der Größen ("auffällig groß", "sehr groß", ..., "ganz klein", "kaum sichtbar"). *Obwohl sich seine Formbeschreibung vor dem Hintergrund der theoretisch und quantitativ wohlbestimmten regulären und halbrekulären Körper vollzog, blieben die von ihm gegebenen Spezifizierungen der Kristallformen also wesentlich phänomenologisch-deskriptiv und ohne quantitative Präzisierung.* Auch war die Zuordnung eines Minerals zu einer der Grundformen nicht eindeutig: die Modifikation durch Stutzung von Ecken/Kanten erlaubte die Erzeugung ein- und derselben geometrischen Form aus verschiedenen Grundformen. Die so entstehenden "Übergangsreihen" wurden sogar zu einem Thema der theoretischen Betrachtung der Kristallformen im Wernerschen Programm. Für die Einordnung von Kristallen in eine Grundform mußten Werner und seine Schüler häufig zu ad-hoc Entscheidungen greifen [Marx 1825, 110ff.].

Höhere mathematische Präzision erreichte die Kristallklassifikation von *Romé de l'Isle*. Auch er begnügte sich in seinem Frühwerk (1772) zunächst noch mit einer groben Intervallangabe für Winkel an Kristallpolyedern.⁶ Im Rahmen einer späteren umfassenden Bestandsaufnahme und Klassifikation der bekannten Mineralien beauftragte er seinen Assistenten *Carangeot* mit einer möglichst genauen Modellierung der beobachteten Kristallformen. Carangeot entwickelte dazu die Technik der Winkelmessung an Kristallen mit

dem Anlegegoniometer und entdeckte die später von Romé de l'Isle publizierte *Winkelkonstanz* bezüglich jeder Kristallart [Burke 1966, 69ff.].

Als Romé de l'Isle in (1783) auf diese Untersuchungen gestützt eine detaillierte Beschreibung von über 500 Kristallarten gab, die an Umfang und Präzision alle vorherigen Klassifikationen weit übertraf, versuchte er, die beobachteten Kristallformen in ein geometrisches System einzuordnen. Er griff auf die Wernersche Methode der Erzeugung geometrischer Formen zurück [Burke 1966, 62] und baute sein System dazu auf sechs "*Grundformen (formes primitives)*" auf: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, rhombisches Prisma, Rhombendodekaeder, hexagonale Dipyramide. Aus diesen gewann er durch Serien von Kanten- oder Eckenabstumpfungen sowie durch metrische Deformation innerhalb eines gewissen Rahmens jeweils "*abgeleitete Formen (formes secondaires)*", die er als die zugehörige "*Modifikationsserie (suite des modifications)*" der betreffenden Grundform zusammenfaßte. In Ausnahmen verwendete er weitere Erzeugungsmodi durch Aufsetzen von Pyramiden auf Flächen oder durch Umstülpen.

Romé de l'Isle teilte die mechanistisch-materialistische ("atomistische") Auffassung eines Aufbaus der Kristalle aus aneinanderliegenden Molekülen [Hoykaas 1952]. Er führte die unterschiedlichen Grundformen auf hypothetische "*integrierende Moleküle (molécules intégrantés)*" derselben geometrischen Gestalt zurück, die wiederum aus einfacheren Bausteinen, den "*konstituierenden Molekülen (molécules constituantes)*" aufgebaut sein sollten (1783, 1, 22f., 73f.). Waren die "Moleküle" auch nicht beobachtbar, so doch die aus ihnen abgeleiteten Kristallformen, und diese waren der Ausgangspunkt seiner Gestaltklassifikation. So gab es einen ersten Ansatz einer Verbindung naturphilosophischer Erklärung des Kristallaufbaus und der von Romé de l'Isle vorgeschlagenen Formbildungsprinzipien, die ihm gewissermaßen als "Grammatik" einer ideellen Nachbildung der Kristallgestalten dienten. Die Erzeugungsregeln waren dabei weder so weit mathematisch fixiert, daß sie eine theoretische Deduktion aller möglichen Kristallformen gestattet hätten, noch waren sie eine bloße — wenn auch vergleichsweise präzise — Beschreibung der beobachteten Formen. Sie waren ausreichend theoretischer Natur, um eine ideelle Erzeugung geometrischer Formen zu gestatten, und gleichzeitig flexibel und offen genug, daß sie zielgerichtet auf die Nachbildung der durch Beobachtung und Messung festgestellten Kristallformen eingestellt werden konnten. Dies läßt sie als einen aufschlußreichen Zwischenschritt von einer lediglich beschreibenden Vorgehensweise der Naturgeschichte zu einer strukturellen Theoriebildung erscheinen.

Auch am Maßstab einer solch "weichen" Theoretisierung⁷ gemessen, besaß Romés Programm problematische Stellen. Aufgrund der im Rahmen der Erzeugungsregeln generierbaren Übergänge zwischen verschiedenen Modifikationsserien war keine eindeutige Zuordnung der einzelnen Kristallform

in diese möglich — ein vom Klassifikationsstandpunkt aus wenig erfreulicher Tatbestand. Darüberhinaus war die Auswahl der Grundformen schwer begründbar und enthielt eine gewisse Beliebigkeit; Romé de l'Isle gründete sie anscheinend auf die Beobachtung und Abstraktion besonders häufiger, auffällig stark ausgebildeter einfacher Formen an den ihm bekannten Kristallen — ein kaum intersubjektivierbarer Prozeß [Marx 1825, 123]. Jedoch enthielt auch die gewählte weiche Theoretisierung unter dem Gesichtspunkt der Ausbildung von Symmetriekonzepten einige bemerkenswerte Züge.

Romé respektierte nämlich in einzelnen Modifikationsschritten Symmetriesysteme des zu modifizierenden Polyeders. So führte er etwa in der Modifikationsserie des Würfels neben dem gewöhnlichen Würfel (Symmetrie 0^*) einen als Kristallisationsform des Pyrits⁸ auftretenden gestreiften Würfel an, dessen Streifung auf den Seitenflächen die Ordnung der Rotationsachsen durch die Seitenmitten von 4 auf 2 reduziert (Symmetrie T_h). Aus diesem symmetriereduzierten Würfel (einfache Form der Fläche 100 zur Kristallklasse T_h , Fig. 1a) erzeugte er durch schiefe Kantenstutzung (längs Flächen 210) sukzessive die zusammengesetzten Formen von Fig. 1b, c und schließlich durch Verdrängung der Flächen des Ausgangswürfels das Pyritoeder (Fig. 1d; Fläche 210 zur Kristallklasse T_h). Aus diesem gewann er wiederum durch Eckenstutzung die zusammengesetzte Form von Fig. 1e (Flächen 210 und 111) und schließlich bei geeigneter Wahl des Abstands vom Ursprung das kombinatorische (nicht-reguläre) Ikosaeder von Fig. 1f (zusammengesetzte Form der Flächen 210 und 111 zur Kristallklasse T_h) (Romé de l'Isle 1783, t. 4, Pl. II).

Er konstatierte die Abweichung der Figur 1d (bzw. 1f) vom regulären Dodekaeder (bzw. Ikosaeder), führte aber auch die letzteren durch kleine Veränderung der metrischen Parameter als Figuren der Modifikationsserie des Würfels ein (1783, 4, Pl. II, Fig. 25; 1783, 3, 232ff.). So deutete sich im Resultat eine höhere Symmetrie als die des Würfels an.⁹

In derselben Serie erzeugte er an anderer Stelle durch Abplattung des Würfels in einer der Achsenrichtungen bzw. durch Verlängerung in einer Achsenrichtung und Abplattung in einer anderen das gerade quadratische Prisma bzw. den Quader (1783, 4, Pl. II, Fig. 2, 3). Dabei nahm er stillschweigend eine Symmetriereduktion von 0^* auf D_{4h} bzw. D_{2h} vor. Weitere Beispiele reduzierten durch Stutzen lediglich zweier räumlich-diagonal gegenüberliegender Ecken die Symmetrie stillschweigend auf $\bar{C}_6 = C_{3i}$ (ebda., Pl. II, Fig. 34).

Symmetrieerhöhungen und Symmetriereduktionen waren also in Romé de l'Isles System natürlich auftretende Phänomene. Sein Klassifikationssystem der Kristallpolyeder baute wesentlich auf eine Verbindung einer kombinatorischen Charakterisierung der Polyeder mit deren möglicher Spezifizierung und Veränderung durch Variation der metrischen Parameter auf. Während Stutzen den kombinatorischen Typ des Polyeders stets verändert,

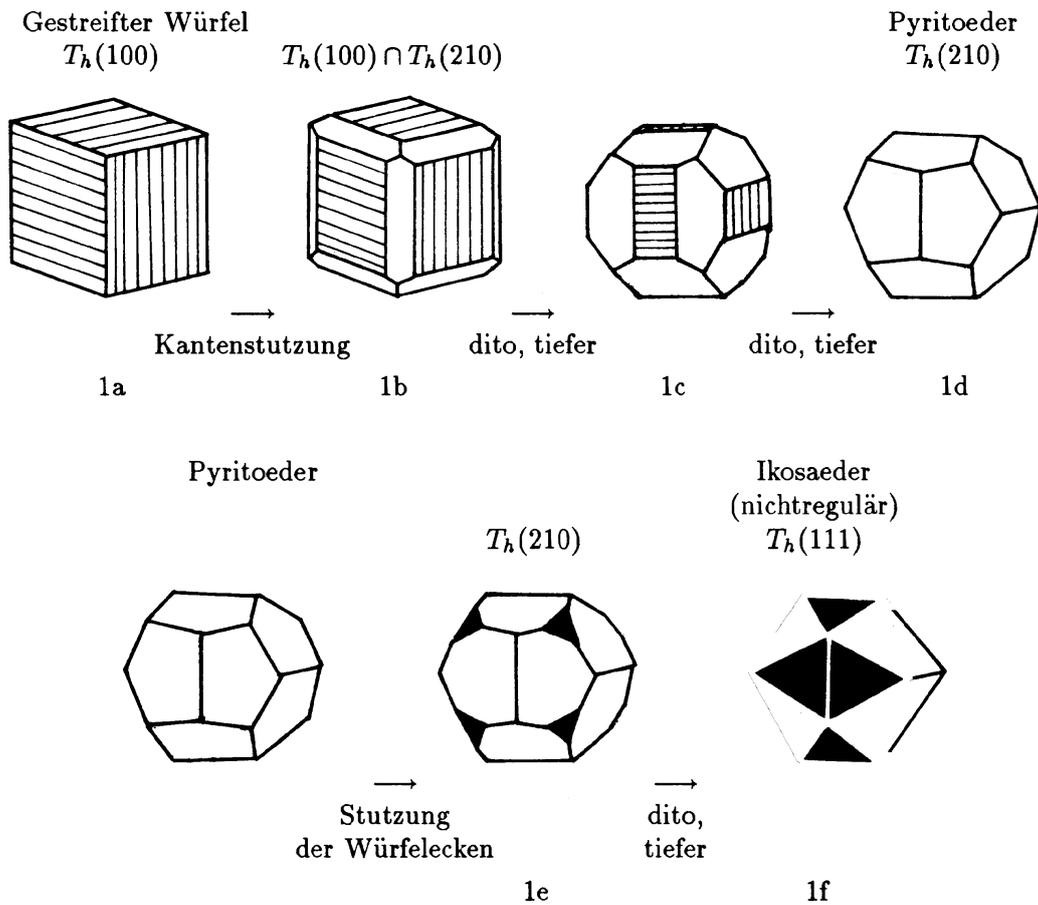


Fig. 1 Romé de l'Isles Modifikationsserie des Würfels mit impliziter Symmetrie T_h (1728, Tafel II – Teilstück)

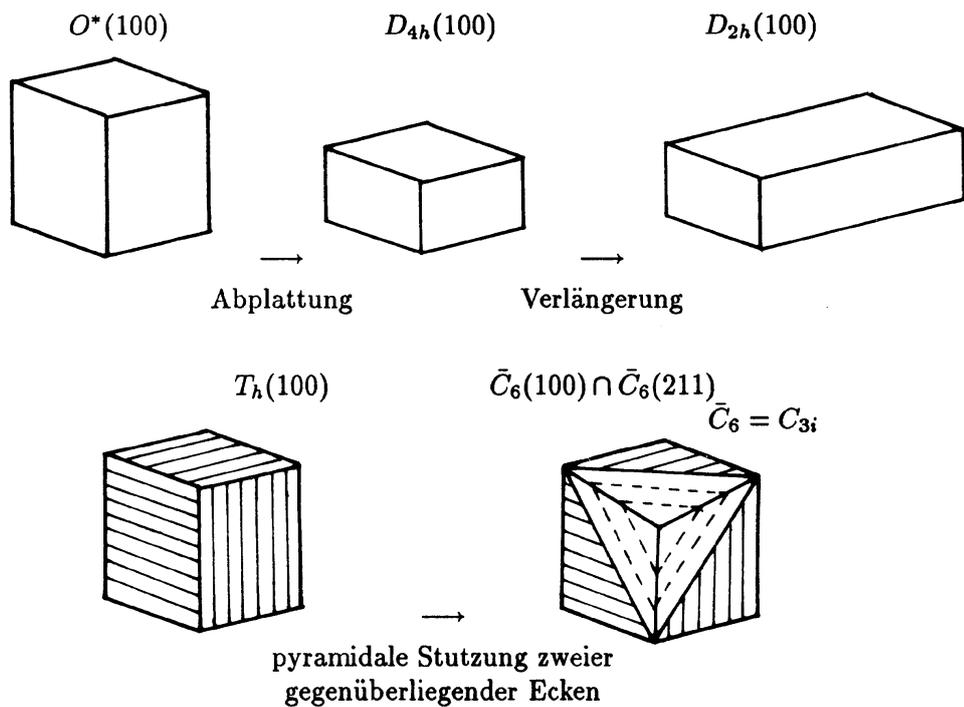


Fig. 2 Symmetriereduktionen in der Modifikationsserie des Würfels bei Romé de l'Isle (1723, Tafel II)

wiesen de l'Isles Modifikationsserien daneben auch deutlich auf die qualitativ verschiedenen Phänomene hin, die durch Veränderung der metrischen Daten eintreten können:

- bloße quantitative Veränderung der Gestalt ohne qualitative Veränderung des kombinatorischen Typs oder der Symmetrie (Beispiel Übergang $1b \rightarrow 1c$),
- quantitative Veränderung der Gestalt mit Umschlag des kombinatorischen Typs des Polyeders (Beispiel $1c \rightarrow 1d$),
- quantitative Veränderung der Gestalt mit Veränderung des Symmetrietyps des Polyeders aber ohne Veränderung des kombinatorischen Typs (Symmetrierhöhung am Ikosaeder $1f$, Symmetriereduktionen in Figur 2 etc.).

Implizit bildeten bei Romé de l'Isles somit Symmetriegesichtspunkte neben den kombinatorischen eine zweite Ebene qualitativer Unterscheidungen im Universum der Kristallpolyeder.¹⁰ Romé hatte jedoch anscheinend keinen Anlaß, diese qualitativen Unterscheidungen explizit zu charakterisieren. Für die Einteilung der Kristallfiguren in Systeme (Modifikationsserie des Würfels, des Tetraeders, des Oktaeders usw.) spielten die Verbindungen zwischen verschiedenen Typen von Polyedern, die durch Stutzen und Variation metrischer Parameter hergestellt werden können, die entscheidende Rolle. Symmetriegesichtspunkte (auch in impliziter Form) spielten bei seiner Einteilung in Serien hingegen lediglich eine auxiliäre Rolle. Sonst wäre kaum zu verstehen, daß Symmetriereduktionen (O^* auf T_h , auf D_{4h} , D_{2h} , C_{3i} usw.) und (Schein-)Symmetrieerhöhungen (T_h auf I^*) sämtlich in der Serie des Würfels auftreten konnten, ohne daß de l'Isle einen Grund sah, diese Phänomene zum Gegenstand einer weiterführenden Diskussion zu machen.¹¹

1.2 Beginnende Mathematisierung im atomistischen Programm: R.J. Haüy

Die in Romé de l'Isles Theoretisierungsansatz enthaltenen Grundideen der Formbildung von Kristallen wurden um die Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert von René Just Haüy (1743–1822) aufgenommen, präzisiert und zu einer Theorie verbunden, in der die Korpuskularhypothese in eine solche Form gebracht wurde, die die bis dahin offenen Erzeugungsregeln weitgehend zu fixieren gestatteten.¹²

Auch Haüy ging von der Existenz gewisser Grundformen (*“formes primitives”*) aus, die er allerdings sowohl empirisch als auch vom geometrischen Resultat her anders bestimmte als de l'Isle. So kritisierte er, daß de l'Isle nur den äußeren Aspekt der Kristalle berücksichtigt habe, ohne ihre *“Struktur”* in Betracht zu ziehen (*“sans avoir égard a leur structure”*) (Haüy 1801, 1, 20). Für ihn war die *“Struktur”* über Spaltungsversuche durch Auswertung der auftretenden Spaltkerne und Streifungsmuster zu erschließen. Dadurch

wurde seine geometrische Abstraktion und die Auswahl der Grundformen stärker durch die Empirie gebunden, als das für Romés Vorgehensweise der Fall gewesen war. So unterschied sich seine *Liste von 5 Grundformen* (Parallelepiped, Oktaeder, Tetraeder, gerades hexagonales Prisma, Rhombendodekaeder) sichtlich von der Romé de l'Isles (Haüy 1793; 1801, 1, 28; 1822, 1, 44).¹³

Eine Hypothese zur theoretischen Erklärung dieser Grundformen besaß Haüy nicht; jedoch entwickelte er für die Ableitung der Sekundärgestalten auf atomistische Vorstellungen gegründete, mathematisch präzisierte Erzeugungsregeln. Er ging davon aus, daß die Kristallmaterie aus *„integrierenden Molekülen (molécules intégrantes)“* aufgebaut war. Diese sollten jedoch anders als bei Romé de l'Isle mit den Grundbausteinen (Molekülen) im Sinne der neuen zeitgenössischen Chemie Lavoisiers übereinstimmen und von wohlbestimmter geometrischer Form sein (Tetraeder, Dreiecksprisma, Parallelepiped). War ihre Form zwar nicht unmittelbar beobachtbar, so doch indirekt dadurch, daß *mehrere integrierende Moleküle sich zur Grundform zusammenschließen* und darüberhinaus wiederum in anderer Konstellation — mit oder ohne Zwischenräume — *parallelepipedische Bausteine*, die sogenannten *„subtraktiven Moleküle (molécules soustractives)“* bilden sollten. Haüys Idee war nun, daß die von Werner und de l'Isle verwendeten Modifikationen der Grundformen dadurch erklärt und gleichzeitig präzisiert werden können, *daß sich aus parallelepipedischen Bausteinen (subtraktiven Molekülen) gebildete Schichten auf der Grundform aufbauen und dabei an Kanten, Ecken oder Flächendiagonalen in wohldefinierter Art schrittweise zurücktreten* (1822, 1, 51ff.).

Dabei entdeckte er, daß es beim Prozeß des Aufschichtens häufig einfacher war, von bestimmten sekundären Gestalten auszugehen, die zwar streng genommen nicht zu den Grundformen gehörten (also nicht als Spaltungskern auftraten), aber aus diesen wieder durch Aufschichtung zu gewinnen waren und nun in einem zweiten Schritt von ihm als *„hypothetische Kerne (noyaux hypothétiques)“* eingeführt wurden (1822, 1, XXf., 188ff.). Dadurch wurde die Darstellung der Vielfalt der Kristallgestalten technisch wesentlich vereinfacht.

Haüy verwendete 18 „elementare Kristallformen“ (ebda., 9–22) in der Funktion solcher hypothetischer Kerne:

1. Würfel,
2. reg. Oktaeder,
3. reg. Tetraeder,
4. Rhombendodekaeder,
5. Rhomboeder, ·
6. quadratische Dipyramide,
7. rechteckige Dipyramide,

8. rhombische Dipyramide,
9. parallelogrammatische Dipyramide,
10. (gerades)¹⁴ quadratisches Prisma,
11. Rechteckprisma,
12. Rhombenprisma,
13. Parallelogrammprisma,
14. schiefes Rechteckprisma,
15. schiefes Rhombenprisma,
16. Parallelepipiped,
17. hexagonales Prisma,
18. hexagonale Dipyramide
(Haüy 1822, 1, 263–270).

Diese Liste erwies sich — obwohl auf einer eigenartigen Mischung aus Empirie und Pragmatik der Ableitungsvereinfachung beruhend — *im Lichte der späteren Untersuchungen als erstaunlich stabil*: sie wurde mit geringen Abänderungen (Reduktion von 18 auf 15, später auf 14)¹⁵ von Frankenheim (1835) bestätigt und als Ausdruck der Symmetrietypen von Raumgittern interpretiert — eine Beobachtung, die in Bravais' Theorie der Kristallstruktur (1850, 1851) schließlich ausgebaut und auf eine sichere theoretische Grundlage gestellt wurde (vgl. §§2.4, 3.3). Dabei wurde Haüys Unterscheidung von "Grundformen" im engeren Sinn und von "hypothetischen Kernen" fallengelassen.

Haüy präziserte die Idee der regelhaften Aufschichtung auf die Kerne durch die Formulierung zweier Regeln:

- (i) "*Dekreszenzgesetz (loi de décroissance)*": Bei der sukzessiven Aufschichtung tritt jede folgende Schicht, beziehungsweise eine Stufe aus m Schichten parallel einer Kante oder Flächendiagonale um eine feste Anzahl von $n = 1, 2, 3, 6$ Reihen subtraktiver Moleküle zurück (1801, 1, 34ff.).
- (ii) "*Symmetriegesetz (loi de symétrie)*": Die Abnahme (Dekreszenz) erfolgt an solchen Teilen des Ausgangspolyeders (Kanten, Flächendiagonalen, Ecken) mit denselben Schrittmaßen n, m , die gemessen an der Ausgangsgestalt als "*identische Teile (parties identiques)*" erscheinen (Haüy 1815; 1822, 1, 196ff.).

Sein theoretischer Entwurf war aus verschiedenen Gründen folgenreich und erscheint als *Vorform der bis weit in das 19. Jahrhundert reichenden mathematischen Theoretisierung der Kristallstruktur*: im Konzept der Aufschichtung parallelepipedischer Schichten aus "subtraktiven Molekülen" lag ein — nicht in aller Konsequenz (insbesondere die Gestaltung der Grundform selber) durchgeführter — Ansatz eines *impliziten Konzepts translationsinvarianter Bausteine*, der später in der Form der Molekülgittertheorie weiter ausgebaut wurde. Aus dem Dekreszenzgesetz, verbunden mit der Hypothese

eines rationalen Verhältnisses folgte eine Einschränkung der möglichen Formbildungen, die später als *Rationalitätsgesetz* formuliert wurde (vgl. §§1.4, 2.1). Insbesondere war es unmöglich, das reguläre Dodekaeder als Sekundärgestalt des Würfels zu erzeugen (Haüy 1822, 2, 25),¹⁶ wobei Haüy selbstverständlich von einer kubischen Gestalt ausging.

In unserem Kontext ist aber Haüys Formulierung und Verwendung des Symmetriegesetzes von herausragender Bedeutung. Haüy scheint in Auffassung und Terminologie durch Legendres systematische Untersuchung der Spiegelsymmetrie in seinen “Elements de Géométrie” (Legendre 1794) angeregt worden zu sein, die bei den Modifikationen von Kristallgestalten zu berücksichtigende Gesetzmäßigkeit in dieser Weise zu präzisieren. Erfolgte in seinen früheren Arbeiten die Respektierung des Symmetrieprinzips bei der Aufschichtung zunächst ähnlich wie die Abstumpfungen bei Romé de l’Isle unausgesprochen, so explizierte er seine Auffassung in (1815) ausführlich.¹⁷ Schon vorher hatte er von der “Symmetrie” der Dekreszenzen gesprochen, allerdings in einem vagen Hinweis auf die “Regularität” des Kerns (der Grundform), die sich in der “Symmetrie der Dekreszenzen” niederschläge. *Dabei verwendete er “Symmetrie” noch in dem alten Wortsinn eines durch Gleichheit oder Proportionen definierbaren Ebenmaßes.*¹⁸ In (1815) präziserte er:

“... Elle (la symétrie, E.S.) consiste en ce qu’une même espèce de décroissement se répète sur toutes les parties du noyau dont telle est la ressemblance, que l’on peut substituer l’une à l’autre, en changeant à l’égard de l’oeuil la position de ce noyau, sans qu’il cesse de se présenter sous le même aspect. Je donne à ces parties le nom d’identiques ...” (Haüy 1815, 81).

Die Charakterisierung der als “identisch” zu betrachtenden Teile durch räumliche Substitution, ohne daß sich etwas für das Auge ändere, enthielt einen ersten *Ansatz zu einer geometrisch operierenden Definition der Symmetrie*. Haüy versuchte, diese Definition durch “lokale” (d.h. nicht auf das ganze Polyeder bezogene) Kongruenzbeziehungen zu präzisieren. So beschrieb er “Identität”

- von Seitenflächen durch Kongruenz,
- von Kanten durch Längengleichheit sowie Gleichheit der Winkel zwischen den inzidierenden Seitenflächen,
- und von Ecken durch Kongruenz der Raumwinkel einschließlich paarweiser Längengleichheit korrespondierender Kanten (1815, 82).

In dieser Präzisierung der Symmetrie war die Andeutung einer globalen Kongruenzoperation des Polyeders, wie er im Verweis auf die anschauliche “Substitution” noch enthalten war, zwar verloren gegangen, doch wirkte die letztere anscheinend in kritischen Anwendungssituationen als Korrektiv auf die unzureichende “lokale” Fassung zurück.¹⁹

Die statische Charakterisierung der Symmetrie durch Angabe eines Systems metrischer Relationen entsprach einer bis in die antike Mathematik zurückgehenden Auffassung der *“Regularität”* (reguläre und halbreguläre Polygone und Polyeder), wie sie etwa auch von Kepler vertreten worden war (Kepler 1619).²⁰ Das schwächere Konzept der *“Symmetrie”* hatte vor Legendre innerhalb der Mathematik keine Rolle gespielt, wohl aber in Kunsttheorie, Bau- und Gartenarchitektur als Terminus für ein gefälliges Ebenmaß, das durch metrische Relationen (Gleichheit und/oder Proportionen) zwischen ausgewählten charakteristischen Teilen gesichert werden sollte.²¹ *Die quantitativ präzisierte Beschreibung und Systematisierung der Kristallformen gab nun den Anlaß und das Material zur Verallgemeinerung des Konzepts der “Regularität/Halbregularität” zu dem der “Symmetrie” im mathematisch-geometrischen Sinne.*

Haüys *“Symmetriegesetz”* enthielt eine *implizite Charakterisierung der Holoedrien der späteren Kristallsysteme* und — ohne begriffliche Trennschärfe — einiger untergeordneter Kristallklassen. Die mangelnde Trennschärfe äußerte sich schon in der Sprechweise von *“dem Symmetriegesetz (le loi de symétrie)”* anstatt einer Vielheit von Symmetriegesetzen. So konnte etwa in Haüys Darstellung die Unterscheidung holoedrischer und hemiedrischer Kristallsymmetrien, oder allgemeiner die Unterscheidung verschiedener Kristallklassen desselben Systems bei der Regelung der Aufsichtung auf die Grundform nicht herausgearbeitet werden.²² Auch konnte Haüy ja die Symmetriesysteme nur indirekt über den Verweis auf die jeweilige Grundform angeben. Die vage Generalisierung in der Sprechweise von *“dem Symmetriegesetz”* stand dabei wiederum der Entdeckung im Wege, daß die Symmetriesysteme gewisser Grundformen gleich sind (etwa bei Würfel, Oktaeder, Rhombendodekaeder), während sie sich bei Vergleich anderer Grundformen durchaus signifikant voneinander unterscheiden können. Dieser Sachverhalt konnte bestenfalls als Ahnung am Wissenshorizont aufscheinen.

Die Beobachtung solcher Beschränkungen stellt natürlich die Bedeutung des Häüyschen *“Symmetriegesetzes”* für die Entwicklung des modernen Symmetriebegriffs keineswegs in Frage; sie ist jedoch für die Klärung der Genese eines Begriffs wichtig, dessen nächster Ausarbeitungsschritt durch eine Gruppe von Forschern erfolgte, die auf Haüys Ergebnisse aufbauten, aber gleichzeitig in den Grundsätzen erheblich von Haüy abwichen. Sie waren — teils mehr, teils weniger stark — von der dynamistischen Naturphilosophie beeinflusst und richteten ihr Augenmerk auf allgemeinere Formbildungsprinzipien, als Haüy in seiner geometrisch-atomistischen Philosophie hatte ins Auge fassen können.

1.3 Konstituierung eines alternativen Theoretisierungsprogramms unter dem Einfluß der dynamistischen Philosophie

In der nachrevolutionären Phase in Frankreich hatte es, gestützt auf die neugegründete Ecole Polytechnique und die erneuerte Académie des Sciences beziehungsweise das Institut National, einen bedeutenden Schub empirisch gestützter Quantifizierung und Mathematisierung derjenigen Teile der Naturwissenschaften gegeben, in denen sich diese Methoden nicht schon im Gefolge der wissenschaftlichen Revolution des 17. Jahrhunderts durchgesetzt hatten. Die "baconischen" Naturwissenschaften (Chemie, Optik, Wärme, Elektrizitätslehre, Magnetismus) beschleunigten ihren Wandel zu experimentellen und mathematisierten Naturwissenschaften [Kuhn 1976]. Selbst in Teile der ehemals beschreibenden Naturwissenschaften, der "Naturgeschichte", insbesondere die Mineralogie, drangen experimentelle Methoden und mathematische Theoretisierung ein (Haüy). So gab es Anzeichen einer Erneuerung der bis dahin verschiedenartigen Gruppen von Naturwissenschaften mit einer Tendenz zur Vereinheitlichung nach dem Vorbild der Mechanik.

Den stärksten, aber auch restriktivsten Ausdruck fand diese Tendenz im *Laplaceschen Programm* der physikalischen Wissenschaften, das in Frankreich etwa vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis zum Sturz Napoleons intellektuell und institutionell dominierte, bevor es von einem breiteren Spektrum mathematisierender Forschungsprogramme abgelöst wurde (Fourier, Fresnel, Ampère/Arago, Dalton/Gay-Lussac u.a.) [Fox 1974]. Charakteristisch für das Laplacesche Programm sowie seine Vorläufer in der Newtonschen Tradition war ein *atomistischer Standpunkt*, der als ontologische Grundannahme in die Theoriekonstruktion einging.²³ Alle physikalischen Wirkungen sollten durch einen Aufbau der (ponderablen oder imponderablen) Materie aus kleinsten Teilen (Moleküle/Atome) und zwischen ihnen wirkenden Zentralkräften nach Vorbild der Himmelsmechanik erklärt werden. Wenn auch Haüys theoretische Kristallographie nicht unmittelbarer Teil des Laplaceschen Programms war, so ordnete sie sich diesem doch in naher Verwandtschaft zu [Fox 1974, 99].²⁴

Im deutschsprachigen Raum stieß das Laplacesche Programm und — allgemeiner — der ihm zugrundeliegende Atomismus nicht auf ungeteilte Zustimmung. In Philosophie, Literatur, in Naturgeschichte und Teilen der experimentellen Naturwissenschaften verbreitete sich als Gegenbewegung zur messend-experimentellen, atomistischen und mathematisierenden Strömung der französischen Naturwissenschaften eine literarisierend-romantische sowie eine auf dynamistische Vorstellungen gegründete naturphilosophische und naturforschende Strömung [v. Engelhardt 1978, 1981; Hermann 1976, 1977; Snelders 1970]. Die *dynamistische Auffassung* stellte dem Atomismus die Vorstellung entgegen, daß Natur und Materie aus polaren Kräftesystemen konstituiert werden, die ständiger Veränderung unterliegen, aber in dieser Veränderung relativ beständige Muster bilden. Wurden diese auch als Anlaß

für die Hypothesenbildung des Atomismus akzeptiert, so erschien die These eines Materieaufbaus aus kleinsten Teilen von Standpunkt der dynamistischen Auffassung gewissermaßen als eine konzeptionelle Verdinglichung von Kräftermustern.

Die dynamistische Denkweise ging auf Leibniz, Boskowitz und Kants "Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft" (1786) zurück und wurde von der dialektischen Philosophie des deutschen Idealismus, namentlich Fichte, Schelling und Hegel in ihrem jeweiligen Gesamtsystem in verschiedener Betonung aufgenommen und ausgebaut. Auf diesem Weg nahm sie während der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts Einfluß auf das intellektuelle Leben in Deutschland.

Der Einfluß der dialektischen und dynamistischen Philosophie auf die Naturwissenschaften war äußerst widersprüchlich und ist in seiner Bedeutung bis heute historisch nicht endgültig ausgewertet; jedoch ist ihre positive heuristische Rolle in Elektrochemie (Ritter) und Elektromagnetismus (Oersted, eventuell Faraday) unumstritten [v. Engelhardt 1981, Knight 1970, Snelders 1970]. In unserem Zusammenhang spielt diese Philosophie als Hintergrund eines im deutschsprachigen Raum während des ersten Jahrhundertdrittels verfolgten Theoretisierungsprogramms der Kristallographie eine Rolle, das in erster Linie auf C.S. Weiß zurückgeht.

Christian Samuel Weiß (1780–1856) hatte seit 1796 in Leipzig studiert und sein Studium 1801 mit einer Dissertation über die Begriffe des festen und des flüssigen Aggregatzustandes abgeschlossen. In dieser Zeit befand sich auch Schelling teils in Leipzig, teils im nicht sehr weit entfernten Jena;²⁵ gleichzeitig fand eine heftige Kontroverse um die Philosophie Fichtes statt, die des "Atheismus" gescholten wurde. C.S. Weiß wurde dadurch zur Auseinandersetzung mit Fichtes dialektischer Philosophie des Ich und dessen Religionsphilosophie gebracht und bezog in seiner persönlichen Korrespondenz mit seinem (älteren) Bruder Christian sehr klar Stellung für Fichtes Position.²⁶ Vermutlich lernte Weiß in dieser Zeit auch die gerade entstehende Schellingische Naturphilosophie kennen und damit einen äußerst pointierten Ausdruck der dynamistischen Auffassung.

Zentrales Thema der Naturphilosophie des deutschen Idealismus bildeten die Ideen der Polarität und der Einheit der Naturkräfte, die sich in den Formbildungen der unbelebten und belebten Natur zur Geltung bringen sollten. Die Kristalle wurden dabei als höchster Ausdruck der Formbildung der unbelebten Natur angesehen, die in Pflanzen und tierischem Wachstum ihre Fortsetzung finde.²⁷ Häüys geometrische Strukturtheorie der Kristalle, die aus Grundgestalten über integrierende und subtraktive Moleküle die Sekundärformen ableitete, erschien von diesem Standpunkt aus als mechanistisch und gewollt. In der Tat wurde sie von Schelling, der sich in der Frühphase intensiv mit den verschiedensten aktuellen Theorien der Naturwissenschaften auseinandersetzte, als ein bloß hypothetisches "scharfsinniges

Spiel” kritisiert, das allein seiner mathematischen Ableitungsmöglichkeiten wegen eingeführt worden sei (Schelling 1798, 577). Dies war ein Motiv, das in variiert Form bei den Kristallographen dynamistischer Ausrichtung auftrat — bis hin zu Frankenheim, der selber eine sehr gemäßigte und offene Haltung gegenüber dem Atomismus einnahm (vgl. §2.5).

Weiß wurde nun zwar von der dynamistischen Philosophie beeinflusst, wandte sich aber einem intensiven Studium der Chemie, Physik und Mineralogie zu, weil ihn die bloß spekulative Entwicklung dynamistischer Prinzipien nach Art der Naturphilosophie nicht befriedigen konnte.²⁸ Im Winter 1801/1802 lernte er bei D. Karsten in Berlin, im Sommer 1802 bei G.A. Werner in Freiberg Mineralogie. Er begann — auf Karstens Anregung — mit einer Übersetzung von Häüys “*Traité de Minéralogie*” (Häüy 1801) ins Deutsche, nicht ohne einen kritischen Kommentar zu dessen Grundprinzipien in Anmerkungen und einen längeren Anhang unter dem Titel “*Dynamische Ansicht der Krystallisation*” (Weiß 1804) zu verfassen. So war er schon ein Experte in Häüys Kristalltheorie, bevor er in zwei Pariser Aufenthalten (1807, 1808) mit Häüy und seiner Schule in persönlichen Kontakt trat.

Im Laufe dieser Zeit distanzierte er sich weiter von der reinen Naturphilosophie, ohne jedoch die dynamistische Grundauffassung und seine Nähe zu anderen dynamistischen Naturforschern, etwa Ritter, aufzugeben [Schuster 1922a, 91ff.]. Gegen Ende 1808 wurde Weiß als Nachfolger Karl Friedrich Hindenburgs (1741–1808) nach Leipzig berufen und von dort bei der Gründung der Berliner Universität 1810 als Mineraloge und Leiter des königlichen Mineralienkabinetts nach Berlin geholt. Dort wurde er 1815 Mitglied der Akademie der Wissenschaften und verfaßte seine bedeutendsten Arbeiten [Hölser 1976; Fischer 1962, 1963; Schuster 1922a].

Die ausgeprägte Neigung zur naturphilosophisch-dynamistischen Auffassung in Verbindung mit seinem detaillierten Wissen innerhalb der Mineralogie ließen *C.S. Weiß zum Begründer eines alternativen theoretischen Programms der Kristallographie gegenüber der Häüyschen Theorie* werden. Schon in seinen Kommentaren zur Häüy-Übersetzung kritisierte Weiß, daß Häüy seinen Grundgestalten und Molekülen Realitätscharakter beimaß und sie nicht nur als bloße hypothetische Konstruktionen ansah, die bei tieferem Verständnis der Kristallbildung dynamistischen Prinzipien zu weichen hätten (Weiß 1804). Die Kristallisation deutete er als Resultat der Überlagerung abstoßender Kräfte (“chemische Repulsion”),

“... bei welcher es nicht zum vollständigen Auseinandertreten, zur Absonderung der Produkte voneinander gekommen ist, sondern wo die chemische Trennungskraft noch gehemmt ist, ohne ihr Ziel zu erreichen” (Weiß 1804, 371).

Er erhob nun zum Programm, die Regelmäßigkeit der erscheinenden Kristallformen aus einer zu erschließenden Gesetzmäßigkeit des Systems der zugrundeliegenden Kräfte zu erklären.²⁹ Dabei war seine Idee, daß das Kräftesystem durch zwei, später drei, Grundkräfte dominiert wird, aus denen sich die anderen ableiten. Das führte ihn zur Annahme des Aufbaus des gesamten Kräftesystems aus "Hauptabstoßungen", aus denen sich die anderen Kräfte zusammensetzen [Fischer 1962, 250].

Da nach dynamistischer Auffassung die Begrenzungsflächen von Kristallpolyedern als Orthogonalflächen zugehöriger Kräfte des kristallbildenden Kräftesystems auftreten, war die Struktur des Kräftesystems durch Auswertung der auftretenden Flächenbildungen (Begrenzungsflächen oder Blätterdurchgänge im Inneren) grundsätzlich zugänglich. Eine solche Analyse führte Weiß zunächst zur Charakterisierung der *Achsen* eines Kristalls als wesentlichem Element zur Fixierung der Struktur eines kristallbildenden Kräftesystems (Weiß 1809); später baute er darauf eine *Einteilung der Kristallformen in 4 "Abtheilungen" und 3 "Unterabtheilungen"* — die 7 Kristallsysteme — auf (Weiß 1815). Die darin verwendete Idee der Charakterisierung von Kristallsystemen durch ihre Achsenkonstellationen und die zugehörigen Symmetriesysteme wurde zum Ausgangspunkt einer Richtung innerhalb der Kristallographie, die von dynamistischen Vorstellungen ausging und in der die Symmetriekonzepte von der Häüyschen morphologischen Bindung an die Grundgestalten gelöst und weiter ausgebaut wurden.

Weiß war nicht der alleinige Initiator einer dynamistischen Forschungsrichtung in der Kristallographie. Noch bevor seine erste Arbeit über die Klassifikation in 7 Kristallsysteme erschien (Weiß 1815), hatte der Werner-Schüler *Friedrich Mohs* (1773–1839) die Kristalle in ähnlicher Weise wie Weiß aber unabhängig von diesem in zunächst 4, später 7 Systeme eingeteilt (vgl. §1.4). Unter unserem Gesichtspunkt der Entwicklung von Symmetriekonzepten waren allerdings drei andere, spätere Vertreter der dynamistischen Richtung von besonderer Bedeutung: *M.L. Frankenheim*, *J.G. Graßmann* und *J.F. Hessel*. Auf diese wird sich — neben C.S. Weiß — unsere Untersuchung im weiteren hauptsächlich richten.

1.4 Charakterisierung der Kristallsysteme durch C. S. Weiß

Entscheidend für die Transformation der Weißschen philosophischen Kritik an Häüy in ein mit dynamistischen Konzepten verträgliches kristallographisches Forschungsprogramm war die Ausarbeitung eines Konzeptes zur Fixierung und Auswertung der hypothetischen Struktur kristallbildender Kräftesysteme. Das gelang Weiß mittels Charakterisierung der Kräfte durch ein *Achsensystem*. Die Grundidee der Achsen eines Kristalls formulierte er in seiner Antrittsvorlesung als Ordinarius für Physik am 8. März 1809 in Leipzig (Weiß 1809).

Er entwickelte dort zunächst sein schon über fünf Jahre altes Programm einer Auffassung, in der die äußere Gestalt als Ausdruck eines Systems innerer Kräfte verstanden werden sollte.³⁰ Daran schloß er die Idee an, das Kräftesystem über eine Analyse der Konfigurationen besonders auffälliger Richtungen der Kristallfigur, der *Achsen*, mathematisch beschreibbar zu machen:

“Eine Achse aber ist tatsächlich eine die ganze Figur beherrschende Gerade, um die herum alles gleichmäßig verteilt ist. (Axis vero linea est omnis figurae dominatrix, circa quam omnia aequabiliter sunt disposita.)” (Weiß 1809).

Diese Forderung einer “gleichmäßigen Verteilung” enthielt andeutungsweise die Idee einer Charakterisierung der Symmetrie des Kristalls durch die Achsen als Symmetrieelemente, wie sie in der nächsten Phase der Ausarbeitung des kristallographischen Symmetriebegriffs üblich wurde (etwa bei Hessel oder Bravais), ohne daß jedoch von Weiß schon die verschiedenen möglichen Arten von Symmetrieelementen weiter verfolgt worden wären.³¹ Im Jahre 1809 unterschied er zunächst nach der geometrischen Konstellation der Achsen 4 große “Abtheilungen” der Kristallformen (Weiß 1823, 106). Doch dauerte es weitere sechs Jahre, bis Weiß das Ergebnis seiner Analyse der in den Kristallformen auftretenden Achsen in einen Vorschlag fassen konnte, die Kristalle in 4 “Abtheilungen” und 3 “Unterabtheilungen”, insgesamt also 7 Systeme einzuteilen (Weiß 1815).³²

Zu den einzelnen Systemen gab Weiß metrische Eigenschaften des Achsensystems, Andeutung möglicher Vertauschungen der Achsen untereinander, Höchstzahl der Flächen einer zugehörigen einfachen Gestalt und die einfachen Gestalten selber an. Im Falle des isometrischen Systems ergänzte er dies durch eine Diskussion möglicher halbflächiger Gestalten und darin einer impliziten Andeutung dreier hemiedrischer Kristallklassen (s.u.). Das *isometrische System* (Weiß “1. Abtheilung” — ohne “Unterabtheilung”) selber charakterisierte er durch die Bestimmung

“... Drei Dimensionen gleich und rechtwinklig unter sich; oder mehr physikalisch ausgesprochen: Gleichheit des Gestaltungsactes in diesen drei Dimensionen” (Weiß 1815, 291).

Mit “Dimensionen” bezeichnete er die Achseneinheiten a, b, c (vektoriell interpretiert die Basisvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ mit kristallographischer Normierung $a = |\mathbf{a}|, b = |\mathbf{b}|, c = |\mathbf{c}|$); also war seine Formulierung

$$a = b = c, \quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{mit} \quad \alpha := \sphericalangle(\mathbf{c}, \mathbf{b}),$$

$$\beta := \sphericalangle(\mathbf{c}, \mathbf{a}), \quad \gamma := \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Er selbst schloß auf die Flächenzahl 48 der einfachen Gestalt im generischen Fall und gab dafür die Begründung

“... dass gegen drei gegebene, unter sich gleiche und rechtwinklige Dimensionen die Lage einer Ebene von gegebenem Verhältnis gegen sie, um der Gleichheit der Dimensionen willen, im allgemeinen 48 mal abgeändert werden kann” (ebda., 294).

Dies war eine der weitestgehenden Formulierungen Weißens für die in (1815) implizit bleibende Symmetriebeschreibung ($O^* \cong \mathfrak{S}_3 \oplus \mathbb{Z}_2^3$), die aus den Eigenschaften der Achsensysteme zu entnehmen war. Das Prinzip war klar; er wertete es aber im folgenden nur in seinen Konsequenzen aus. Eine Möglichkeit der expliziten Angabe von Symmetrierelationen oder gar -operationen (samt Entwicklung einer angepaßten Symbolik) deutete er zwei Jahre später an (Weiß 1817); die Ausführung überließ er aber späteren Arbeiten, die das von ihm begründete Forschungsprogramm ausfüllten.

Weiß führte die einfachen Formen des kubischen Systems komplett auf:

Würfel,
 Oktaeder,
 Rhombendodekaeder (“Granatoeder”),
 Trapezoeder (“Leucitkörper”),
 Tetrakishexaeder (“Pyramidenwürfel”),
 Trisoktaeder (“Pyramidenoktaeder”),
 Hexakisoktaeder (“Pyramidengranatoeder”);
 (Weiß 1815, 291–294) (vgl. Fig. 3).

Er verstand das Hexakisoktaeder als generisches Polyeder des Systems³³ und diskutierte an ihm als weitere Konsequenz der Symmetrie des kubischen Systems, daß es je “drei Arten” von Kanten und Ecken (drei Orbits unter der Operation 0^*), jedoch nur “eine Art” Seitenflächen gibt, die aus “ungleichseitigen” (generischen) Dreiecken bestehen (ebda., 294ff.).

Analog ging er bei den anderen Systemen vor. Dabei charakterisierte er die Systeme einer “Abtheilung” stets durch dasselbe Achsensystem und schränkte für die “Unterabtheilungen” die zugehörigen zugelassenen Symmetrien ein. Die “2. Abtheilung”, mit

$$a = b \neq c, \quad \alpha = \beta = \gamma = \pi/2$$

besaß wiederum keine “Unterabtheilung”, und enthielt nur das “viergliedrige” (tetragonale) System mit voller Symmetrie (also der Diedergruppe D_{4h}).

In der “3. Abtheilung”, a, b, c paarweise verschieden,

$$\alpha = \beta = \pi/2,$$

faßte er drei “Unterabtheilungen” zusammen:

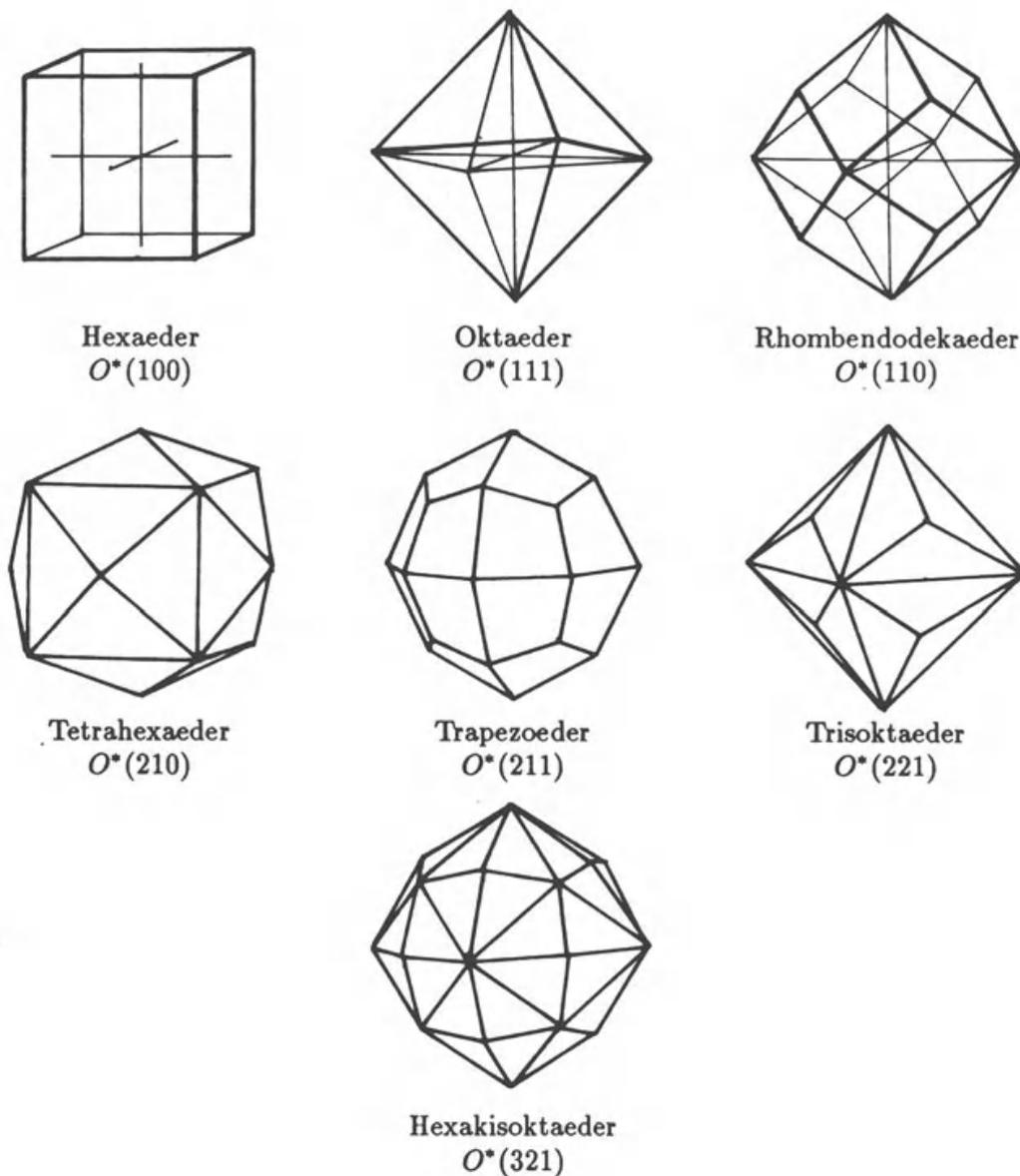


Fig. 3 Einfache holoedrische Formen des isometrischen Systems bei C.S. Weiß (1815)

- das “zwei- und zweigliedrige” (*orthorhombische*) System mit voller Symmetrie (Symmetriegruppe D_{2h}) (ebda., 306ff.),
- das “zwei- und eingliedrige” (*monokline*) System mit reduzierter Symmetrie (“halbflächiges System”), ausgezeichnet durch “Zurücktreten der drei gleichwerthigen Paare”, die im “zwei- und zweigliedrigen System” auftreten (Unterdrücken der Diederachsen von D_{2h} , Resultat C_{2h}) (ebda., 315ff.),

- das “*ein- und eingliedrige*” (*trikline*) *System* wiederum als “halbflächiges System des zwei- und eingliedrigen”.

Beim letzten scheinen, wie Weiß sich ausdrückte, “die Regeln vom Zusammengehören einer Mehrzahl von Gliedern” zu verschwinden, “. . . abgesehen von dem Gesetz, dass je zwei Flächen unter sich parallel und gleichen Werthes bleiben” (ebda., 321). Das war eine für den Entwicklungsstand des Symmetriebegriffs bemerkenswerte Angabe der Punktsymmetrie des Systems (Symmetrie C_i — Punktinversion).

Bei der “*4. Abtheilung*” mit zwei “Unterabtheilungen” verwendete Weiß 4 Achsen mit Einheiten a, b, e, c , davon die ersten drei koplanar, die vierte dazu orthogonal mit $a = b = e$ und betrachtete darin:

- das “*sechsgliedrige*” (*hexagonale*) *System* mit voller Symmetrie und dihexagonaler Dipyramide als generischer Form (Symmetrie D_{6h}) (ebda., 323ff.)
- und das “*drei- und dreigliedrige*” (*trigonale*) *System* als zugehöriges “halbflächiges System” mit generischer Form ditrigonales Skalenoeder (Symmetrie D_{3d}) (ebda., 331).

Weiß hatte in dieser Form durch die Angabe der Achsen — sowie in der dritten und vierten Abteilung durch symmetrieeinschränkende Zusätze — eine *verbale Charakterisierung von 7 Punktsymmetriesystemen* gegeben, die in impliziter Form den Gruppen $0^*, D_{4h}, D_{2h}, C_{2h}, C_i, D_{6h}, D_{3d}$ entsprachen. Die — aus unserer Sicht eigenwillige — Zusammenfassung des orthorhombischen, des monoklinen und des triklinen Systems zu einer “Abtheilung” war durch die Auffassung bedingt, nur für den hexagonal/trigonale Fall von orthogonalen Achsensystemen abzugehen. Bezogen auf ein solches Achsensystem war dann bei monoklinen oder triklinen Kristallformen die Symmetrie gegenüber der des Achsensystems entsprechend einzuschränken (von D_{2d} auf C_{2h} beziehungsweise C_i). Dadurch erschienen sie konsequenterweise als “Unterabtheilungen” des orthorhombischen Falls.

Die *Dreistufigkeit der theoretischen Konstruktion* (erscheinende Kristallgestalt — kristallbildendes Kräftesystem als zugrundeliegende agierende Struktur — Achsensystem als wesentliches Charakteristikum der kristallbildenden Kräfte) erwies sich als höchst bedeutsam für die Herausarbeitung einer allgemeinen Fassung der Kristallsymmetrie. Das Konzept des “Achsensystems” erlaubte es, ein System von Symmetrien zu fixieren, ohne den Symmetriebegriff etwa durch Kongruenzoperationen zu explizieren. Die Symmetrieeigenschaften des Achsensystems wurden in der physikalischen Interpretation der Weißschen Theorie durch das kristallbildende Kräftesystem auf die äußere Gestalt übertragen. So wurden deren Konsequenzen für die Flächen einer zugehörigen Kristallgestalt greifbar, ohne daß Weiß an Symmetrieoperationen auf den Flächen denken mußte.³⁴

Diese Auffassung erlaubte Weiß sogar eine andeutungsweise Behandlung von *Symmetriereduktionen auf hemiedrische Kristallklassen*. Seine Argumentation erfolgte dabei allerdings im Wernerschen Sinne noch ganz morphologisch. Das heißt, Weiß diskutierte die Möglichkeit des Auftretens von Kristallgestalten, die gewissermaßen “zu wenig” Flächen besitzen (Flächenorbits von Untergruppen der Holoedrie des Systems). Dabei erkannte er, daß die Flächenreduktion wohlbestimmten Regeln unterliegt, die er jedoch zunächst nur fallweise und gestaltorientiert angeben konnte. Er diskutierte dabei die Entstehung zulässiger “halbflächiger Formen” (Flächenorbits zu Untergruppen von Index 2) aus vollflächigen einfachen Formen durch “Hervortreten/Dominanz” gewisser Flächen und “Verdrängung/Verschwinden” anderer (Fig. 4). Die von ihm diskutierten Übergänge von Voll- auf Halbflächner sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Die verwendeten “Auswahlregeln” für wegzulassende beziehungsweise dominant werdende Flächen entsprachen einer impliziten morphologischen Berücksichtigung der drei hemiedrischen Kristallklassen T_h , T_d und O . Jedoch gab Weiß keinen Hinweis darauf, daß beziehungsweise welche Achsensymmetrien bei den Übergängen zu den Halbflächnern unterdrückt werden — was eine bei seinem in (1815) erreichten Stand der impliziten Symmetrieargumentation anwendbare Ausdrucksweise gewesen wäre. Er verwies in viel vagerer Andeutung lediglich darauf, daß bei der Bildung der Halbflächner

“... der Wechsel dieses Hervortretens der einen (Flächen, E.S.) und Zurücktretens der anderen, (...) einem eben so bestimmten, sich gleichbleibenden, durchgreifenden Gesetz unterworfen (ist)” (1815, 296).

Einen Versuch, dieses “Gesetz” zu formulieren, machte er in (1817); in (1815) verwies er zunächst nur andeutungsweise auf Übereinstimmungen bei den Auswahlregeln zur Erzeugung des Trisoktaeders und des Tetraeders (1815, 297f.), sowie des Trapezoeders und des Pyritoeders (“gebrochenes Pentagonododekaeder”) (1815, 301). Das reichte ihm jedoch schon als Grundlage des induktiven Schlusses, daß die bis dahin beobachteten halbflächigen Formen des kubischen Systems zu neuen ad-hoc postulierten Unterabteilungen, dem “*tetraedrischen*” beziehungsweise “*pentagon-dodekaedrischen System*”, gehören (d.h. zu den hemiedrischen Kristallklassen T_d , T_h ; ebda., 304f.). Vom Gyroid (“gedrehten Leucitkörper”, Kristallklasse O) merkte er die Existenz zweier spiegelbildlicher Varianten an, stellte jedoch auch fest, daß Kristallformen dieses Typs noch nicht beobachtet worden waren (ebda., 304).³⁵

Um die Vorteilhaftigkeit der Kristallcharakterisierung durch seine Achsensysteme nachzuweisen, arbeitete Weiß in den folgenden Jahren insbesondere an detaillierterer metrischer Erfassung der Eigenschaften von Kristallformen und ergänzte seine Methode um symbolische Repräsentation der auftretenden Flächen und ihrer Symmetrien. Häufig führte er dabei entscheidende

Tabelle 1
Symmetriereduktion auf Halbflächner bei Weiß

Vollflächner	Übergang durch Dominanz Verschwinden von von		Implizite Auswahl- regel	Resultierender Halbflächner
Oktaeder	111	$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	T_d	Tetraeder
Trapezoeder	112	$\bar{1}\bar{1}\bar{2}$	T_d	Tristetraeder
Trisoktaeder	221	$\bar{2}\bar{2}\bar{1}$	T_d	Deltoeder
Hexakisoktaeder	321	$\bar{3}\bar{2}\bar{1}$	T_d	Hexakistetraeder
Tetrahexaeder	2 $\bar{1}$ 0	201	T_h	Pyritoeder
Hexakisoktaeder	321	312	T_h	Trapezoeder/ Diploid
Hexakisoktaeder	321	$3\bar{2}\bar{1}$	O	Gyroid

neue Ideen oder Methoden beim Studium einzelner Kristallarten exemplarisch ein, das heißt mit explizitem oder indirektem Hinweis auf ihre allgemeine Bedeutung.

So betrachtete er in einer Arbeit über den Feldspat (Orthoklas)³⁶ (Weiß 1817) die auftretenden Hauptflächenrichtungen und schloß sich Romé de l'Isle an, der als Grundform des Orthoklas das rhombische Prisma mit einem $120^\circ/60^\circ$ -Rhombus ausgemacht hatte. Weiß paßte sein Achsensystem in das Zentrum der Säule ein, mit zwei Achsen in den Diagonalen des Rhombus. Wegen der am Orthoklas auftretenden weiteren Flächenbildungen ordnete er diesen in das "zwei- und eingliedrige" (monokline) System ein; wegen der angenommenen Winkel des Rhombus standen die waagerechten Achsenlängen im Verhältnis $1 : \sqrt{3}$. Dazu glaubte Weiß die vertikale Achsenrichtung im Verhältnis $1 : \sqrt{13}$ angeben zu können; insgesamt erhielt er also $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{13}$.

Diese Gelegenheit nützte er zur Formulierung des allgemeingültigen Prinzips, daß die Verhältnisse der Achsenlängen den *Verhältnissen aus Quadratwurzeln* (kleiner) natürlicher Zahlen gleich seien. Er stützte dies durch Verweis auf die Erfahrung (!), durch eine entsprechende Vorgehensweise Häüys und durch die zentrale Rolle einfacher quadratischer Irrationalitäten unter den metrischen Beziehungen an Polyedern des kubischen Systems.³⁷ Die Flächen am Feldspat stellte er im Fall von Achsenabschnitten ma , nb , pc mit ganzen Zahlen m , n , p — in Ausnahmen rationale Zahlen mit kleinen Nennern — durch das Symbol $[ma : nb : pc]$ dar ("Weißsche Parameter").

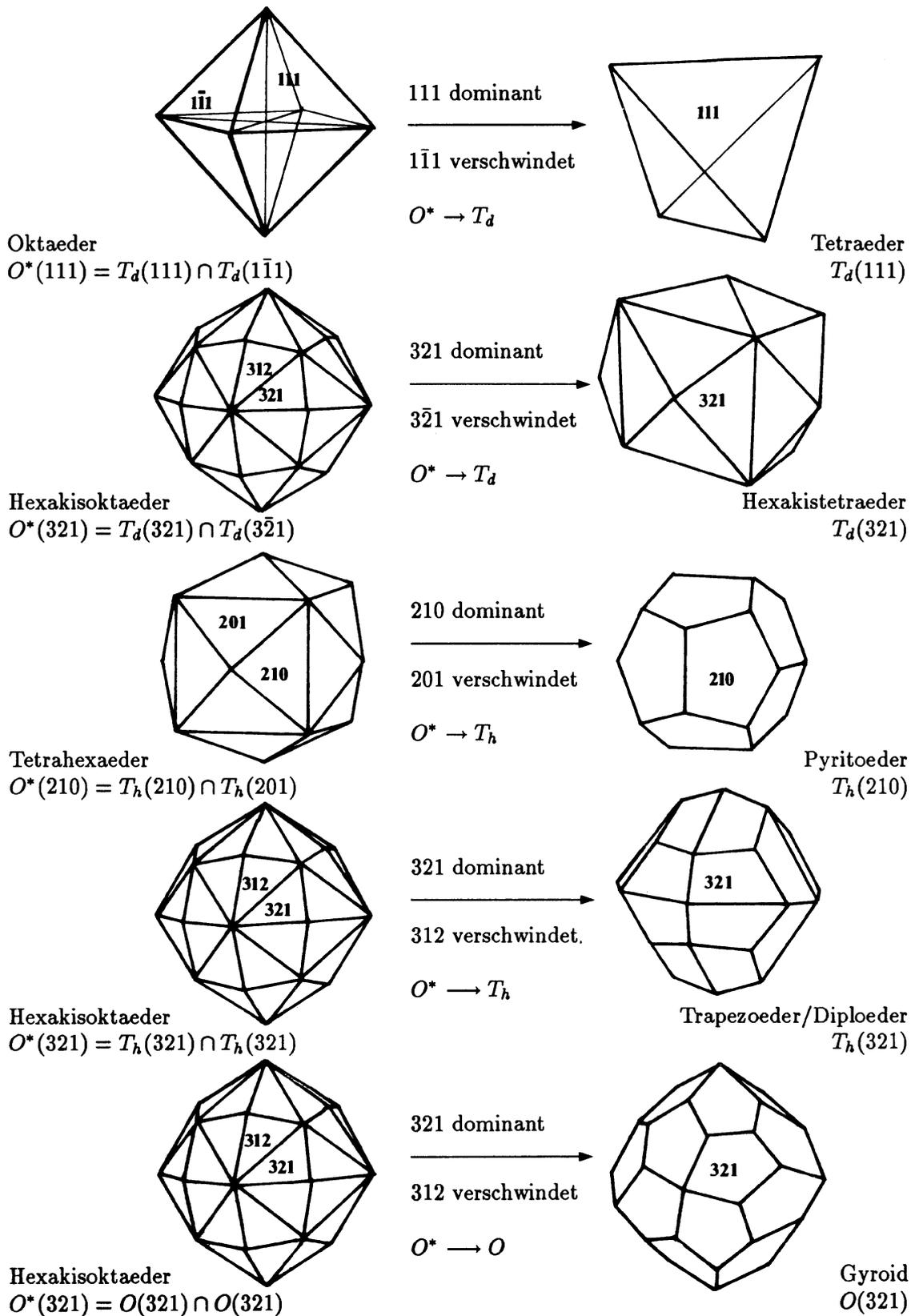


Fig. 4 Ableitung "halbfächiger" Gestalten des isometrischen Systems nach C.S. Weiß (1815)

Einige Jahre später führte er weiter aus, wohin er mit seinem Verweis auf die quadratischen Irrationalitäten an Polyedern des kubischen Systems zielte (Weiß 1819). Er analysierte dort die Verhältnisse der Radien von Berührungskugeln um das Symmetriezentrum an Flächen, Kanten oder Ecken "einer Art" (also eines Orbits der Symmetriegruppe). Das führte ihn auf — teilweise schon in der Antike bekannte — Verhältnisse quadratischer Irrationalitäten. Weiß suchte nun nach *Analogien zu harmonischen Verhältnissen der pythagoreischen Musiktheorie*; und in der Tat ließen sich in einer Reihe von Fällen entweder die Verhältnisse der Radikanden der auftretenden Quadratwurzeln oder deren Kehrwerte als Tonintervalle beziehungsweise Tonserien und Akkorde interpretieren.³⁸ Das erschien ihm als eine so bemerkenswerte Beziehung,³⁹ daß sie ihm — anscheinend in Anlehnung an Spekulationen neoplatonischen Typs⁴⁰ — die ausgezeichnete Rolle einfacher quadratischer Irrationalitäten bei den Achsenverhältnissen der Kristallographie zu stützen schienen.

Kurz nach Abfassung seiner Arbeit über den Feldspat legte Weiß dar, wie die entsprechende Symbolik auf Flächen an beliebigen Kristallen zu übertragen ist (Weiß 1817). Nach einer ausführlichen Diskussion der Mängel an Häüys Methode der Symbolisierung von Kristallgestalten⁴¹ schlug er die Angabe einer Fläche an einem Kristall nach Wahl geeigneter metrischer Parameter a , b , c des Achsensystems durch das Symbol $[ma : nb : pc]$ vor, wobei m , n , p die ganzzahligen oder rationalen Achsenabschnitte der Fläche mit "kleinen" Nennern (einschließlich ∞) sind (1817, 208ff.). Darin war — zunächst stillschweigend als Voraussetzung — das *Rationalitätsprinzip der Kristallographie* enthalten, das Weiß später auch explizit formulierte (ebda., 309).⁴²

Schwierigkeiten bereitete die Einhaltung dieses Prinzips unter Umständen jedoch bei der Weißschen Wahl der Achsensysteme bei Kristallen des "zwei- und zweigliedrigen" oder "zwei- und eingliedrigen" (monoklinen beziehungsweise triklinen) Systems, wenn die Winkel nicht so günstig waren wie im Fall des Feldspats. Diese Schwierigkeiten waren durch Übergang zu einem der Kristallform angepaßten *schiefwinkligen Achsensystem* vermeidbar. In diese Richtung argumentierte zuerst *F. Mohs* (1822) in einer insgesamt jedoch recht unklaren Darstellung.

Mohs hatte das Konzept der Kristallysteme etwa gleichzeitig mit Weiß und unabhängig von ihm entwickelt. Nach seiner späteren Darstellung (Mohs 1823) hatte er eine Unterteilung der Kristallformen in 4 Systeme — "rhomboedrisch, pyramidal, prismatisch und tessular", entsprechend den Weißschen 4 "Abtheilungen" 6-gliedrig, 4-gliedrig, 2-gliedrig und regulär — schon in den Jahren 1812–1814 entwickelt und in Vorlesungen in Graz dargestellt. In den folgenden zwei Jahren (1814–1816) arbeitete er an einem Manuskript, in dem er die Liste auf 7 Systeme erweiterte. Dies machte später wesentliche Teile

seines Buches (1822) aus. Weißens Arbeit (1815) lernte Mohs nach eigenen Angaben erst am Ende des Jahres 1822, nach Drucklegung seines Manuskriptes, kennen (Mohs 1823, 281).

Mohs lehnte die Unterteilung der Abteilungen in Systeme ab; er schlug stattdessen vor, die Systeme als wesentliche Klassifizierungskategorie anzusehen und — wo nötig — neue Systeme einzuführen. Das ermöglichte prinzipiell, die Achsen des späteren monoklinen und des triklinen Systems als geneigt anzunehmen. Allerdings gab Mohs lediglich Andeutungen in diese Richtung (Mohs 1822, 56ff.; 1823, 286); erst sein Schüler C. Naumann (1824) sowie M.L. Frankenheim (1826) und J.G. Graßmann (1829) vollzogen diesen Übergang endgültig [Groth 1926, 84ff.]. Weiß selber hielt dagegen zeitlebens am “Orthogonalitätsdogma” der Kristallachsen fest. Die Ausbildung der 7 Kristallsysteme war so schließlich das Resultat einer Verbindung der Weißschen mit den Mohsschen Gesichtspunkten (Weiß/Mohssche Kristallsysteme).

Weißens Symbolik für kristallographische Flächen wurde zum Ausgangspunkt verschiedener weiterer Beobachtungen. Dazu gehörte etwa die Formulierung des “Zonengesetzes”, einer Einordnung der zugelassenen Flächen in “Zonenverbände”.⁴³ Für den Symmetriebegriff folgenreicher war jedoch sein Versuch, die aus Symmetriegründen des Achsensystems mit einer Fläche gleichzeitig auftretenden weiteren Flächen zu charakterisieren. Weiß beobachtete, daß etwa bei einem Achsensystem mit Achsenlängen a , b , c und $a = b$ die Fläche $[ma : nb : pc]$ (in seiner Notation, s.o.) stets zusammen mit $[na : mb : pc]$ auftritt. *Er begann so mit einer Charakterisierung der Symmetrien am Achsensystem durch Permutationen der Flächenparameter.* Dazu trat die Symbolisierung von Spiegelungen in naheliegender Weise durch Vorzeichenänderung — von Weiß durch Setzung eines Akzentes angedeutet ($m \rightarrow m'$) (Weiß 1817, 313f.). Damit hatte er diejenigen Bausteine zusammengestellt, die für eine vollständige symbolische Repräsentation der Symmetrie der Kristallsysteme erforderlich waren.

Zwar zog Weiß daraus nicht den vollen möglichen Nutzen; er gab jedoch sehr deutlich *Hinweise darauf, wie die holoedrischen Symmetrien der Achsensysteme seiner 4 Abteilungen symbolisch zu repräsentieren sind* (und damit implizit die holoedrischen Kristallklassen 0^* , D_{4h} , D_{2h} , D_{6h}). Er ging nämlich davon aus, daß in jedem Achsensystem zu klären ist, welche Flächen einer gegebenen als “von gleicher Art” zuzuordnen sind. Im kubischen System bedeutete das bei Abkürzung des Weißschen Symbols $[m_1a : m_2b : m_3c]$ durch (m_1, m_2, m_3) für eine gegebene Fläche die Betrachtung der durch Permutationen der Achsenabschnitte und Vorzeichenwechsel hervorgehenden Gesamtheit

$$\{(\pm m_{\sigma_1}, \pm m_{\sigma_2}, \pm m_{\sigma_3}), \quad | \sigma \in \mathcal{S}_3\},$$

Für das “sechsgliedrige”(hexagonale) System wählte er eine Repräsentation durch Achsenabschnitte bezüglich 3 Horizontalachsen im Winkel von

jeweils 120° und gleicher Achsenlänge a sowie eine Vertikalachse der Länge c durch das Symbol

$$\left[\begin{array}{c} qc \\ ma : na : pa \end{array} \right]$$

(1817, 318f.).⁴⁴ Jedoch gab Weiß keine explizite Liste des Orbits einer Fläche in den einzelnen Systemen an; er begnügte sich mit der offen gehaltenen Bemerkung, daß das “*Symbol einer Fläche*” $[ma : nb : pc]$ beziehungsweise

$$\left[\begin{array}{c} nc \\ ma : na : pa \end{array} \right]$$

in zwei Bedeutungen gelesen werden könne, nämlich als Zeichen für eine einzelne Fläche oder dem einer Gesamtheit aller Flächen “derselben Art” (dem Orbit unter der Symmetriegruppe), ohne diese Gesamtheit allgemein weiter zu spezifizieren.⁴⁵

Wenn auch offen bleiben muß, ob Weiß diese Andeutung in allen Fällen hätte richtig konkretisieren können, so zeigt seine bruchstückhafte Diskussion der Einschränkung der Achsensymmetrien im “zwei- und eingliedrigen” System (monoklin, Symmetrie C_{2h}) und bei den tetraedrischen und pyritoe-drischen Halbflächern des kubischen Systems (den hemiedrischen Kristallklassen T_d, T_h),⁴⁶ daß er die vage klingende allgemeine Beschreibung sehr wohl zu präzisieren wußte (wenn auch nicht immer in völlig konsequenter Verwendung der von ihm gewählten Symbolik).

Am vollständigsten war er im Fall der “tetraedrischen Halbflächner” durch die Angaben:

- (*) Es treten stets die Flächen $[a : b : c]$, $[a' : b' : c]$, $[a' : b : c']$, $[a : b' : c']$,
- (**) nicht jedoch die Flächen $[a' : b' : c']$, $[a' : b : c]$, $[a : b' : c]$, $[a : b : c']$ auf (Weiß 1817, 316).

Dies bedarf offenbar einer Erläuterung: Da im kubischen System $a = b = c$ gilt, ist hier zunächst $[a : b : c]$ besser als $[m_1a : m_2a : m_3a]$ oder kürzer (m_1, m_2, m_3) zu notieren. Beim zweiten Hinsehen ist das “Symbol” $[a : b : c]$ offenbar nicht als einzelne Fläche sondern als Gesamtheit von Flächen zu verstehen, die durch die (am kubischen Achsensystem) zulässigen Permutationen entstehen (also alle). $[a : b : c]$ steht demnach hier für

$$\{(m_{\sigma 1}, m_{\sigma 2}, m_{\sigma 3}) \mid \sigma \in \mathcal{S}_3\},$$

analog $[a' : b' : c]$ für

$$\{(-m_{\sigma 1}, -m_{\sigma 2}, m_{\sigma 3}), \mid \sigma \in \mathcal{S}_3\}$$

und so weiter.

Mit dieser (wohlwollenden) Interpretation, die im Einklang mit der sonstigen Argumentation Weißens steht, hatte dieser in (*) tatsächlich den Orbit von T_d und in (**) dessen Komplement zum Orbit von O^* angegeben.

Bei den anderen “halbflächigen” Fällen waren die Weißschen Angaben weniger vollständig; er arbeitete dort nur mit den jeweils zu einer speziellen Fläche gehörenden Flächen “gleicher Art” und deren Komplement zum Orbit der holoeдрischen Symmetrie des Achsensystems.⁴⁷

Und doch änderte das nichts daran, daß in seinem Ansatz die “*hemiedrischen*” (*halbflächigen*) *Formen* (Terminologie in Weiß 1823, 104) *einen systematischen Ort erhielten* und ihre Symmetrieeigenschaften prinzipiell präzise charakterisierbar wurden. Dies war ein wesentlicher und folgenreicher Unterschied zu Häüys Theorie.

Trotz aller beobachteten Schwächen — nichteindeutige Notation, Unvollständigkeit der expliziten Listen “gleichartiger Flächen”, bruchstückhafte Diskussion der reduzierten Symmetrien an den Achsensystemen — hatte Weiß dennoch ohne Zweifel mehr geleistet als die bloße Einführung einer Symbolik zur Charakterisierung der Flächen; er hatte den Weg aufgezeigt, auf dem es prinzipiell möglich war, die vollen und die reduzierten Symmetrien in den einzelnen Kristallsystemen zu präzisieren und halbgebrauchlich zu beschreiben.⁴⁸ Der nächste Schritt in der Analyse der Kristallsymmetrien in dem von Weiß eröffneten dynamistischen Programm der Kristallographie war damit weitgehend vorgezeichnet.

1.5 M.L. Frankenheims Entdeckung der 32 Kristallklassen

Dieser Schritt wurde im Jahre 1826 durch den jungen Berliner Physiker *Moritz Ludwig Frankenheim* (1801–1869) vollzogen, der sich auf Kristallographie zu spezialisieren begann, kurz bevor er 1827 als Professor der Physik nach Breslau berufen wurde.⁴⁹ Frankenheims Auffassung des Materieaufbaus war stark vom Dynamismus beeinflusst; er sah aber keinen Grund, diesen einer atomistischen Auffassung konträr entgegenzustellen, sondern suchte nach einer geeigneten Verbindung der beiden gegensätzlichen Gesichtspunkte und nahm ansatzweise die spätere Bravais'sche Theorie der Kristallstruktur vorweg (vgl. §2.5). Die erste Arbeit Frankenheims zur Kristallstruktur (1826) faßte aber zunächst noch ganz im Sinne von Weiß die Richtungsabhängigkeit physikalischer Eigenschaften (Spaltbarkeit, Härte, Glanz, Polarisation etc.) an Kristallen als Resultat richtungsabhängiger Kohäsionskräfte und als “Spur des Wachstums des Crystals” auf (1826, 497f.).

Frankenheim schloß auch an die Weißsche Symbolik an, änderte sie allerdings dadurch ab, daß er eine Fläche nicht durch die Achsenabschnitte sondern die Koeffizienten der linearen Gleichung (implizit also die Komponenten eines Normalenvektors) charakterisierte, also etwa die Fläche

$$ax + by + cz = f$$

durch $[+a+b+c]$. Ähnlich wie Weiß notierte er eine gewisse Anzahl der durch Achsensymmetrien hieraus ableitbaren Flächen (eine "Flächengruppe") durch $[a : b : c]$. Zunächst war damit die durch die drei Spiegelungen an den Koordinatenebenen des orthogonalen Achsensystems entstehende "Flächengruppe" gemeint, in Frankenheims Symbolik also

$$[a : b : c] = [\pm a \pm b \pm c] \quad (1826, 504).$$

In seiner implizit vektoriellen Notation konnte Frankenheim das *Rationalitätsgesetz* folgendermaßen formulieren:

Ist an einem Kristall eine Fläche durch $[+a+b+c]$ gegeben, so läßt sich jede andere darstellen als $[+\alpha a + \beta b + \gamma c]$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{Q}$.

Deren Gesamtheit nannte er die "*Crystallreihe des Körpers*" als seiner Bezeichnung für den implizit gebildeten dreidimensionalen rationalen Vektorraum.

Mit dieser Formulierung des Rationalitätsgesetzes ausgerüstet, untersuchte er die Bedingungen, die zwei Flächen vom Typ

$$[\alpha a : \beta b : \gamma c] \quad \text{und} \quad [\alpha' a : \beta' b : \gamma' c]$$

erfüllen müssen, damit sie kristallographisch "von gleicher Art" sein können. Er wandte zwei Kriterien an:

a) Winkel der Flächen zur z -Achse gleich. Das führte auf die Bedingung

$$(\alpha^2 - \alpha'^2) a^2 = (\beta'^2 - \beta^2) b^2 ;$$

d.h. die Flächen sind entweder aus derselben "Flächengruppe" im angegebenen Sinn, oder es gilt $b : a = \sqrt{q}$ mit $q \in \mathcal{Q}^+$.

b) Flächen derselben Art schneiden die (x, y) -Ebene "... in einem regulären, oder doch in einem symmetrischen Polygon" (1826, 505).

Mit dieser Bedingung meinte er ein $2n$ -Polygon mit n -facher Rotations-symmetrie; er präziserte sie nämlich durch die Aussage: Die Lote vom Ursprung auf die Polygonseite (beziehungsweise die "Hälfte" der Lote — jedes zweite betrachtet) geben eine reguläre Teilung von 2π . Da für den Winkel ψ zwischen einem Lot der Form $(\pm\alpha a, \pm\beta b)$ und einem anderen der Form $(\pm\alpha' a, \pm\beta' b)$

$$\cos \psi = \frac{\pm\alpha\alpha' a^2 \pm \beta\beta' b^2}{\sqrt{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} \sqrt{\alpha'^2 a^2 + \beta'^2 b^2}}$$

gilt und der Nenner nach dem 1. Kriterium $(\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2)$ ist, gilt $\cos \psi \in \mathcal{Q}$, also $\psi = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ usw., woraus folgt:

“Die Durchschnitte der Seitenflächen der Pyramiden mit der Ebene von x und y bilden daher entweder ein Quadrat oder ein Sechs- oder Dreyeck” (Frankenheim 1826, 506).

Damit hatte Frankenheim die kristallographischen Rotationsymmetrien auf die der Ordnung 6, 4, 3 oder — stillschweigend — 2 eingeschränkt und damit die Annahme glaubwürdig gemacht, wenn auch nicht bewiesen, daß sämtliche möglichen Kristallsymmetrien durch Untersuchung “teilflächiger Systeme” der Symmetrien der vier Weißschen Abteilungen (kubisch, sechsgliedrig, viergliedrig, zweigliedrig) zu erhalten sind.

Zur Durchführung einer solchen Untersuchung gab er in jeder Abteilung die zugehörige vollständige “Flächengruppe” an, formulierte also explizit, was Weiß nur angedeutet hatte. In einem zweiten Schritt suchte er sämtliche darin enthaltenen teilflächigen Systeme und listete sie auf.

Im Fall des *kubischen Systems* charakterisierte er etwa die vollständige “Gruppe” ähnlich wie Weiß durch $[\alpha a : \beta a : \gamma a]$. Damit meinte er nach Umbenennung ($\alpha = m_1, \beta = m_2, \gamma = m_3$ und in vektorieller Notation) die Gesamtheit der Flächen

$$\{(\pm m_{\sigma 1}, \pm m_{\sigma 2}, \pm m_{\sigma 3}), \quad | \sigma \in \mathfrak{S}_3\},$$

also alle 48 Flächen des O^* -Orbits.

Zur Angabe der teilflächigen “Gruppen” führte er eine Notation für vier Flächenuntersysteme der Ordnung 12 ein, etwa $[(\alpha a : \beta a : \gamma a)]^{50}$ für

$$\{(\epsilon_1 m_{\sigma 1}, \epsilon_2 m_{\sigma 2}, \epsilon_1 \epsilon_2 m_{\sigma 3}), \quad | \sigma \text{ zyklisch}, \quad \epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1\} =: U_1,^{51}$$

entsprechend $[-(\alpha a : \beta a : \gamma a)]$ für

$$\{-(\epsilon_1 m_{\sigma 1}, \epsilon_2 m_{\sigma 2}, \epsilon_1 \epsilon_2 m_{\sigma 3}), \quad | \sigma \text{ zyklisch}, \quad \epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1\} =: U_2,$$

sowie $[(\alpha a : \gamma a : \beta a)]$ für

$$\{(\epsilon_1 m_{\sigma 1}, \epsilon_2 m_{\sigma 2}, \epsilon_1 \epsilon_2 m_{\sigma 3}), \quad | \sigma \in \mathfrak{S}_3, \quad \sigma \text{ nichtzyklisch}\} =: U_3,$$

und $[-(\alpha a : \gamma a : \beta a)]$ für

$$\{-(\epsilon_1 m_{\sigma 1}, \epsilon_2 m_{\sigma 2}, \epsilon_1 \epsilon_2 m_{\sigma 3}), \quad | \sigma \text{ nichtzyklisch}\} =: U_4.$$

Damit konnte er die “Hälften” (Halbflächner) angeben zu

- (i) $[(\alpha a : \beta a : \gamma a)] [-(\alpha a : \beta a : \gamma a)]$, das heißt
 $T_d = U_1 \cup U_2$, beziehungsweise genauer formuliert
Orbit $T_d = T_d(m_1, m_2, m_3) = U_1 \cup U_2$;

- (ii) $[(\alpha a : \beta a : \gamma a)] [(\alpha a : \gamma a : \beta a)]$, das heißt $O = U_1 \cup U_3$;
 (iii) $[(\alpha a : \beta a : \gamma a)] [-(\alpha a : \gamma a : \beta a)]$, das heißt
 $T_h = U_1 \cup U_4$;

sowie das "Viertheil" durch

- (iv) $[(\alpha a : \beta a : \gamma a)]$, d.h.
 $T = U_1$ (Frankenheim 1826, 543ff.).

Die anderen vollständigen ("symmetrischen") Flächengruppen gab Frankenheim entsprechend an:

Im "viergliedrigen" (*tetragonalen*) System durch

$$[\alpha a : \beta a : \gamma c] \quad \text{für} \quad \{(\pm m_{\sigma 1}, \pm m_{\sigma 2}, \pm m_3) \mid \sigma \in \mathcal{S}_2\} = D_{4h};$$

im "zweigliedrigen" (*orthorhombischen/monoklinen/triklinen*) System durch $[\pm \alpha a : \pm \beta b : \pm \gamma c]$, dem entspricht $\{(\pm m_1, \pm m_2, \pm m_3)\}$ für D_{2h} .

Im "sechsgliedrigen" (*hexagonalen/trigonalen*) System führte er wie Weiß eine redundante Koordinate ein (x -, y -, t -Achsen alle mit Einheit a im 120° -Winkel in einer Ebene, orthogonal dazu die z -Achse mit Einheit c , Angabe von Punkten durch die Achsenabschnitte der Lote (!) auf die Achsen, Angabe einer Fläche durch die linearen Koeffizienten $\alpha, \beta, \epsilon, \gamma$ (beziehungsweise m_1, m_2, m_3, n) und erklärte die "Flächengruppe" $[\pm(\alpha a : \beta a : \epsilon a) + \gamma c]$ als Symbol für

$$\{(\pm(m_{\sigma 1}, m_{\sigma 2}, m_{\sigma 3}), n) \mid \sigma \in \mathcal{S}_3 \quad \sigma \text{ zyklisch}\}.$$

Damit gab er die holoedrische "Flächengruppe" des Systems (und der Abteilung) an durch

$$[\pm(\alpha a : \beta a : \epsilon a) \pm \gamma c] \quad [\pm(\beta a : \alpha a : \epsilon a) \pm \gamma c]$$

als seiner Notationsform von

$$\{(\pm(m_{\sigma 1}, m_{\sigma 2}, m_{\sigma 3}), \pm n) \mid \sigma \in \mathcal{S}_3\} \quad \text{für } D_{6h}.$$

Durch seine Analyse erhielt Frankenheim eine Liste der Kristallsymmetrien, die die angegebenen 5 "Flächengruppen" in der kubischen, darüberhinaus 7 in der viergliedrigen, 8 in der zweigliedrigen und 12 in der sechsgliedrigen Abteilung umfaßte. Zu jeder diskutierte er auftretende einfache Kristallgestalten. *So erhielt er eine gute, präzise und vollständige Übersicht über die 32 Kristallklassen* (1826, 543–565).⁵²

Seine Arbeit enthielt für die Entwicklung des Symmetriekonzepts der Kristallographie wesentliche Ergebnisse: die Einschränkung auf 2-, 3-, 4-, 6-zählige Symmetrien, eine Liste der damit verträglichen 32 Kristallklassen und eine präzise, wenn auch im Satz nicht immer einwandfrei realisierte Symbolik. Besondere Bedeutung hat in unserem Kontext die Angabe der Kristallsymmetrien durch "Flächengruppen", die Frankenheim durch Koeffizientenpermutationen und Vorzeichenwechsel erhielt. Diese hatten zwar selber nicht unmittelbar die Bedeutung von Operationssystemen, aber waren Resultat von im Symbol angedeuteten Operationen, die den zulässigen Achsensymmetrien entsprachen. *Seine Auffassung und Sprechweise waren der in der zeitgenössischen Permutationslehre analog*; dort waren ja "Gruppen von Permutationen" die Ergebnisse ausgezeichneter Symbolumstellungen, bevor sie als Operationssysteme selber (Gruppen von "Substitutionen") betrachtet wurden [Wußing 1969, 80ff.]. Frankenheims Fortsetzung des Weißschen Ansatzes stellte also schon eine große Nähe zu den Permutationen der zeitgenössischen Algebra her. Seine Arbeit blieb jedoch weitgehend unbeachtet und, von Satzfehlern gerade im Bereich der neu vorgetragenen Symbolik entstellt, in Okens naturphilosophischem Journal vergraben.⁵³

§2 Rationale Vektorräume, Punktsymmetrien und Raumgittertypen im dynamistischen Programm

2.1 J.G. Graßmanns “Geometrische Combinationslehre”

Während Frankenheims grundlegende Arbeit von 1826 unbeachtet blieb, wurden noch im Zeitraum der folgenden fünf Jahre die beiden von ihm entwickelten Ideen zur Präzisierung und Fortführung des Weißschen Programms von zwei Wissenschaftlern neu formuliert und ausgearbeitet. Das geschah unabhängig von Frankenheim und nahezu unabhängig voneinander, in verschiedenen Formen und in unterschiedlichen theoretischen Kontexten. J.G. Graßmann machte die Annäherung eines neuen Typus von Algebra — von ihm “Combinationslehre” genannt — an die kristallographische Gestaltenlehre zum Thema zweier Arbeiten (Graßmann 1829, 1833); J.F.C. Hessel klassifizierte in geometrischer Form die endlichen Punktsymmetriesysteme im euklidischen Raum und hob aus ihnen die 32 Kristallklassen hervor (Hessel 1830).

Justus Günther Graßmann (1779 – 1852) war, wie später sein Sohn Hermann, zeit seines Berufslebens Gymnasiallehrer mit Schwerpunkt Mathematik und beschäftigte sich in der zweiten Hälfte der 1820er Jahre intensiv mit Kristallographie.¹ Dem Professionalisierungsanspruch dieser Periode gemäß² zielte er — bei aller Einschränkung der ihm zur Verfügung stehenden Mittel — auf eigene Forschungsleistungen. Da ihm seine Bedingungen keine bedeutende empirische Arbeit erlaubten, konzentrierte er sich auf theoretische Studien. Selbst diese stießen auf die Einschränkung, daß nicht alle relevante Literatur in Stettin, Graßmanns Wohn- und Arbeitsort, zugänglich war. So gelang es ihm nicht, die ihm nur indirekt bekannten Arbeiten von Weiß einzusehen; er konnte sich lediglich auf die Arbeiten von Haüy, Mohs, Naumann und Marx stützen.³ Das hinderte ihn jedoch nicht, die auch aus den Arbeiten von Mohs, Naumann und der damals gerade erschienen Darstellung von Marx [1825] hervorgehende Einteilung der Kristallgestalten in Systeme nach Weiß/Mohs zu übernehmen und einer mathematischen Analyse zu unterwerfen. Dabei arbeitete er die die Prinzipien der Gestaltbildung und der Symmetrien deutlicher heraus, als das in seinen Vorlagen der Fall war.

Er beschrieb die Flächen durch ihre Normalen⁴ (“*Träger der Fläche*”) und baute darauf einen symbolischen Kalkül auf, der ganzzahlige Linearkombinationen und geeignete Symmetrioperationen handhabbar machte. Diesen Kalkül bezeichnete er in terminologischer Anlehnung an die in Deutschland zu Beginn des 19. Jahrhunderts populäre Hindenburgsche Richtung als “*geo-*

metrische Combinationslehre“, grenzte sich aber gleichzeitig von deren Schematismus ab (Graßmann 1829, 174f.).

Die Grundstruktur der Graßmannschen “Combinationslehre” bestand aus einem von drei Strecken b, c, d , den “*Elementarträgern*”, im Sinne der Streckenrechnung erzeugten \mathbb{Z} -Modul. Diese sollten drei “räumlichen Dimensionen” entsprechen, waren also reell linear unabhängig. Graßmann setzte die Kommutativität der Streckenkomposition — wegen der möglichen Interpretation als Zusammensetzung von Bewegungen mittels Parallelogrammregel von ihm “*phoronomische Combination*” genannt (1829, 8ff.) — als selbstverständlich voraus. Da er des weiteren eine multiplikative Notation verwendete, erschienen ihm die Koeffizienten β, γ, δ der Linearkombination als “*Wiederholungsexponenten*” einer “*Complexion*” $b^\beta c^\gamma d^\delta$, d.h. des zusammengesetzten Trägers.

Die Darstellung der Flächen einer Kristallart durch ihre Träger hatte einen doppelten Vorteil. Sie brachte die dynamistische Idee, daß die Flächen Ausdruck kristallbildender Kräfte sind, sowie den unterstellten systemischen Zusammenhang der bei einer Kristallart auftretenden Kräfte im \mathbb{Z} -Modul mathematisch unmittelbar zum Ausdruck; darüberhinaus ermöglichte sie Graßmann eine Charakterisierung der Weiß/Mohsschen Kristallsysteme durch die holoedrischen Symmetrien in ganz ähnlicher Weise wie Frankenheim (1826).

Dazu wählte er — außer im trigonal/hexagonalen Fall (s.u.) — die “Elementarträger” b, c, d in den Achsen des betreffenden Systems und betrachtete das volle System der Permutationen und Vorzeichenwechsel der Koeffizienten $\beta = m_1, \gamma = m_2, \delta = m_3$, das mit dem jeweils vorliegenden Achsensystem verträglich war:

- im isometrischen System ($|b| = |c| = |d|$, b, c, d paarweise orthogonal) zulässige Operationen $(m_1, m_2, m_3) \rightarrow (\pm m_{\sigma_1}, \pm m_{\sigma_2}, \pm m_{\sigma_3})$, $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ (Graßmann 1829, 67ff.),
- im tetragonalen System (b, c, d paarweise orthogonal, $|b| \neq |c| = |d|$) $(m_1, m_2, m_3) \rightarrow (\pm m_1, \pm m_{\sigma_2}, \pm m_{\sigma_3})$, $\sigma \in \mathfrak{S}_2$ (ebda., 110f.)
- im orthorhombischen System (b, c, d paarweise orthogonal, $|b|, |c|, |d|$ paarweise verschieden) $(m_1, m_2, m_3) \rightarrow (\pm m_1, \pm m_2, \pm m_3)$ (ebda., 104f.),
- im monoklinen System (b orthogonal Spann (c, d) , $|b|, |c|, |d|$ paarweise verschieden) $(m_1, m_2, m_3) \rightarrow \pm(\pm m_1, m_2, m_3)$, (ebda., 110),
- im triklinen System (b, c, d beliebige Winkel, $|b|, |c|, |d|$ paarweise verschieden) $(m_1, m_2, m_3) \rightarrow \pm(m_1, m_2, m_3)$ (ebda., 121).

Das trigonale (“rhomboedrische”) System charakterisierte Graßmann nach dem Mohsschen Vorbild durch 3 “Elementarträger” b, c, d , die einer dreizähligen Rotationssymmetrie genügen (also längs der Kanten durch

Spitze oder Fußpunkt eines Rhomboeders angeordnet sind),

$$\sphericalangle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sphericalangle(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sphericalangle(\mathbf{d}, \mathbf{b}), \quad |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = |\mathbf{d}|,$$

mit den zulässigen Operationen

$$(m_1, m_2, m_3) \rightarrow \pm(m_{\sigma 1}, m_{\sigma 2}, m_{\sigma 3}), \quad \sigma \in \mathfrak{S}_3$$

(ebda., 113ff.).

Das entsprach gerade den Operationen von D_{3d} .⁵ Die spezifisch hexagonalen Symmetrien (D_{6h} , D_6 , C_{6h} , C_{6v} , C_6) wurden bei dieser Darstellung also reduziert — ein Mangel, den Frankenheim bei seiner Verwendung einer redundanten Koordinate vermieden hatte, ohne auf kompliziertere Darstellungsmittel als Permutationen und Vorzeichenwechsel der Koeffizienten, wie etwa Matrizen, zurückgreifen zu müssen.

Die symbolische Darstellung der Symmetrien ermöglichte prinzipiell die Ableitung der einfachen Kristallgestalten als Gesamtheit der Träger aller derjenigen Flächen, die aus einer, etwa (m_1, m_2, m_3) , durch sämtliche Operationen des Systems hervorgehen (implizit also als Orbit von (m_1, m_2, m_3) unter der Symmetriegruppe). Für die tatsächliche Ausführung dieses Prinzips war freilich noch zu klären, welche kombinatorischen Typen von Polyedern bei Variation der Parameter m_1, m_2, m_3 überhaupt auftreten können. Graßmann führte diese Diskussion nicht im einzelnen aus; er teilte jedoch das Resultat für einen vollständigen Satz charakteristischer Werte von m_1, m_2, m_3 mit. So gab er etwa für das isometrische System die 7 einfachen Kristallgestalten in moderner Notation an:

Würfel	100 oder $\beta 00$,
Rhombendodekaeder	110 oder $\beta\beta 0$,
Oktaeder	111 oder $\beta\beta\beta$,
Tetrakishexaeder	320, 210, 310, allgemein $\beta\gamma 0$,
Trisoktaeder	221, 332, allgemein $\beta\beta\gamma$,
Trapezoeder	211, 311, allgemein $\beta\gamma\gamma$,
Hexakisoktaeder	321 etc., allgemein $\beta\gamma\delta$

(Graßmann 1829, 97ff.), und ganz ähnlich für die anderen Systeme.

Graßmann war sich der Analogie zwischen seiner Vorgehensweise sowie Symbolik und den Permutationen der zeitgenössischen Algebra, mit denen der frühe Gruppenbegriff am deutlichsten verbunden war, durchaus bewußt:

“Die (...) Darstellung mittels der Reihenfolge der Wiederholungsexponenten und der Vertauschung der Accente (Vorzeichen, E.S.) an denselben gab uns künstliche Systeme, welche ihren rechten Sinn

aber nur durch die Lage im Raum erhalten, auf welche sie vermöge der ihnen unterlegten Bedeutung sich beziehen, sie sind also eigentlich nichts als räumliche Permutationen” (Graßmann 1829, 58).

Graßmann verband also in seiner “geometrischen Combinationslehre” ein System dreidimensionaler “Complexionen”, d.h. einen geometrisch interpretierten dreidimensionalen \mathbb{Z} -Modul im euklidischen Raum (ein Gitter), mit einem System “räumlicher Permutationen”, also implizit einer endlichen orthogonalen Gruppe. Er war davon überzeugt, daß der eingeschlagene Weg zu einer neuen Art (struktureller) Mathematik führen würde, die sich von der traditionellen “mathematischen Größenlehre”, d.h. einer ausschließlich auf Quantitäten und ihre funktionelle Abhängigkeiten gerichteten Mathematik, in zweierlei Hinsicht vorteilhaft unterschieden würde. Er glaubte nämlich, daß die “Combinationslehre”

“... ohne Zweifel dereinst für die Systematik einer jeden Wissenschaft überhaupt und für die Classification in der Naturgeschichte insbesondere von der grössten Wichtigkeit werden (würde) ...” (1829, 171).

Darüberhinaus hoffte er, daß durch die “Combinationslehre” die mathematische Bildung von einer allein von wenigen beherrschten Spezialbildung zu einer wahren Allgemeinbildung werden könnte, weil die Mathematik

“... durch die wissenschaftlich entwickelte Combinationslehre der Natur und dem Leben genähert (wird), indem sie neue Gesichtspunkte darbietet, die Constructionen der Natur und des Geistes mehr in ihrem grossen Zusammenhange zu betrachten und dadurch vollständiger und leichter aufzufassen” (ebda.).

Graßmann leugnete dabei nicht einen gewissen Einfluß der gegen Ende des 18. Jahrhunderts in Deutschland einflußreichen traditionellen Schule der “Combinationslehre”, die von Karl Friedrich Hindenburg (1741–1808) und anderen vertreten wurde, auf seine Auffassungen. Er kritisierte den traditionellen Standpunkt jedoch mit zwei Argumenten als zu eng, wegen der primär quantitativen Betrachtung der “Combinationsen” als Anzahl gewisser Klassen von Elementen, sowie wegen Hindenburgs “schwerfälliger und zu willkürlichen Bezeichnung”:

“Hierdurch wurde die wahre und tiefere Bedeutung der combinatorischen Synthesis verdunkelt und diese in eine Einseitigkeit hineingezogen, in welcher ihre volle und gesunde Gestalt nicht mehr zu erkennen war” (ebda., 175).

Dem stellte er eine strukturell-operative Auffassung der "Combinationslehre" gegenüber:

"Die Combinationslehre ist aber eben sowohl wie die Arithmetik eine eigenthümliche, von jeder andren mathematischen Disziplin unabhängige Grundwissenschaft, welche auf eine organische Weise in das grosse Ganze eintritt und wenn auch nicht als Wissenschaft entwickelt, doch immer darin gewesen ist" (ebda., 175).

Die von Graßmann in diesem Zusammenhang verwendeten Metaphern zeigen einen deutlichen romantisch-naturphilosophischen Einfluß auf sein Denken. So verglich er die "geometrische Combinationslehre" mit dem "verbindenden Glied der galvanischen Kette, deren Elemente Mathematik und Naturkunde" sind, und er erhoffte sich von der Verbindung von alter und neuer Mathematik ("Größenlehre" und "Combinationslehre") mit der Naturkunde

"... die bewusste Darstellung der Uebereinstimmung von Natur und Geist, die Versöhnung und Einigung der beiden getrennten Sphären, den Erlösungsprocess des menschlichen Geistes von der Folter leerer Abstraction und roher Empirie ..." (ebda., 172).

Graßmann verband also mit seiner Entwicklung eines Stücks strukturell orientierter Algebra, die den Beziehungen der Kristallographie nachgebildet war, die Idee einer weitgehenden Erneuerung der Mathematik einschließlich ihrer Stellung im System der Wissenschaften, die zu einer zumindest ideellen Erneuerung der Beziehung zwischen Menschen und Natur beitragen sollte. Die emphatische Form, in der er sie vortrug, läßt sie eher als philosophisch gewendete Hoffnung auf Erneuerung erscheinen, denn als eine programmatisch präzisierbare Forschungsorientierung innerhalb der Mathematik. Doch besaß sie merkliche Gemeinsamkeiten mit den naturphilosophischen Ideen des Dynamismus, die bei Weiß und seinen Nachfolgern innerhalb der geometrischen Kristallographie forschungsprogramm bildende Gestalt annahmen. Darüber hinaus enthielt die "geometrische Combinationslehre" neben allen Spekulationen und Hoffnungen einen guten Kern kristallographisch relevanter Erkenntnisse.

Graßmanns zweite Arbeit zur Kristallographie beschränkte sich auf eine gestraffte Darstellung eben dieses geometrisch-algebraischen Kerns (1833). Aber auch diese neue, dem disziplinären Verständnis besser angepaßte Einführung in seine Theorie änderte nicht viel an der zögernden Aufnahme seiner Vorschläge.

Ähnlich wie später die Arbeiten seines Sohnes zur "Ausdehnungslehre" im Ausland (Italien) eher bekannt wurden als im deutschsprachigen Raum,

fand J.G. Graßmanns “geometrische Combinationslehre” zunächst über die Arbeiten W.H. Millers (1801–1880) eine partielle Aufnahme in die englischsprachige Kristallographie (Miller 1839, iii). Miller beschränkte jedoch seine Übernahme Graßmannscher Konzepte auf die Permutationssymbolik für die Darstellung äquivalenter Flächen in einem Kristallsystem; die vektorielle Seite des Graßmannschen Kalküls klammerte er dagegen vollständig aus. Auch in Deutschland wurden Graßmanns Vorschläge fast ausschließlich über den Umweg Miller bekannt,⁶ obwohl Hessel in einem historischen Anhang Graßmanns Ansatz schon als “classisch” hingestellt hatte (Hessel 1830, 2, 137). Nicht einmal Hessel hatte sich jedoch an Graßmanns Methode angeschlossen und sie für seine Zwecke einzusetzen versucht. Es blieb daher bei einer insgesamt äußerst schwachen, zunächst indirekten Resonanz auf die Arbeiten des Außenseiters, des forschenden Gymnasialprofessors aus Stettin.

2.2 Rationale Vektorräume in der Kristallographie gegen Ende der 1820er Jahre

Die dynamistische Auffassung ging davon aus, daß die Normale einer Kristallfläche mit der Richtung der Resultante aller an der Flächenbildung beteiligten Kräfte übereinstimmt. Diese Weißsche Idee nahm Franz Neumann (1823) zum Anlaß, eine Fläche auch geometrisch durch ihre “Flächenrichtung”, d.h. ihre Normale zu charakterisieren [Groth 1926, 79]. Die Kräftekomposition nach dem Parallelogrammgesetz war für einzelne Kräfte eine schon seit dem 17. Jahrhundert übliche Konstruktion. Die Hypothese des Kristallaufbaus aus einem System konstituierender Kräfte, das für jede Kristallart spezifische geometrische Eigenschaften aufweist, *lenkte nun im dynamistischen Programm der geometrischen Kristallographie die Aufmerksamkeit auf ganze Systeme von Kräften*, die in weiter zu spezifizierender Weise aus drei Grundkräften abzuleiten waren (die wiederum den Weißschen Achsen korrespondierten). Der angenommene systemische Charakter der Kräfte im Kristall führte gegen Ende der 1820er Jahre zur Betrachtung von Gesamtheiten gerichteter streckenartiger Objekte in der Kristallographie, die nichts anderes waren als *frühe Formen dreidimensionaler Vektorräume bzw. \mathbb{Z} -Moduln*.⁷

J.G. Graßmann war nicht der einzige Autor, der den Charakter der Gesamtheiten potentieller “Träger” von Kristallflächen in dieser Weise mathematisch ausarbeitete. Fast gleichzeitig, in der Publikation nur ein Jahr später als Graßmann, formulierte Johann Friedrich Hessel (1796–1872), Professor der Mineralogie, Technologie und Naturgeschichte in Marburg, der sich schon früh mit Haüys Symmetrieprinzip beschäftigt und dessen Arbeit von 1815 ins Deutsche übersetzt hatte (Haüy 1815/1819), das Konzept eines “gerengesetzlichen Strahlenvereins”, d.h. in unserer Terminologie eines rationalen Vektorraums. Das geschah in einem umfangreichen Artikel für die Neuauflage des “Gehlerschen Physikalischen Wörterbuchs”, dessen Erstellung Hessel zum

Anlaß für eine Grundlagenstudie der Symmetrietypen von Kristallen nahm. In den besagten "Strahlenvereinen" fixierte er die Rahmenstruktur, in der die "Träger" der Flächen einer Kristallart zu liegen haben; die Gesamtheit dieser Flächen wurde ihm dadurch zu einem "gerengesetzlichen Flächenverein".

Als "*gerengesetzliche Verbindung*" zweier oder dreier gerichteter Strahlen oder "Pfeile"⁸ A, B, C bezeichnete Hessel die Komposition nach der Parallelogrammregel (seine Notation für $A + B + C$ war $[A, B, C]$). Diese Operation verallgemeinerte er durch Zulassung ganz oder gebrochen rationaler Koeffizienten p, q, r . Das führte ihn auf die "gerengesetzliche Verbindung mit Maßzählern" $[pA, qB, rC]$, d.h. rationale Linearkombinationen. So erhielt er je nach der Anzahl der Erzeugenden einen "gerengesetzlichen Strahlenverein in zwei bzw. drei Dimensionen" (Hessel 1830, 2, 43ff.), als seiner Sprechweise für zwei- bzw. dreidimensionale Vektorräume.

Hessels Dimensionskonzept war allerdings ähnlich wie Graßmanns geometrisch, nicht linear algebraisch; d.h. er forderte etwa für die Dreidimensionalität eines "Strahlenvereins", daß die drei erzeugenden Strahlen "nicht in einerlei Ebene" fallen (ebda., 48f.). Durch diesen Rückgriff auf vorgeordnete elementare Dimensionskonzepte der euklidischen Geometrie vermied er wie Graßmann die Problematik höherdimensionaler rationaler Vektorräume in einer geometrischen Gerade bzw. Ebene. Auf das Konzept der geometrischen Unabhängigkeit gestützt, zeigte er dann immerhin eine schwache Form des Basissatzes:

Je drei geometrisch unabhängige Strahlen erzeugen den betrachteten "Strahlenverein" durch "gerengesetzliche Verbindung" (ebda., 48).

Das erlaubte Hessel eine mathematisch befriedigende theoretische Fixierung des Rationalitätsgesetzes der Kristallographie. Das Weißsche Prinzip der Achsenwahl im Kristall auf solche Weise, daß die Kristallflächen durch rationale Zahlen (aus "kleinen" ganzen Zahlen) parametrisiert werden, war durch Mohs und Naumanns Korrektur der Achsenwahl auch auf trigonale/hexagonale Kristalle anwendbar geworden. F. Neumann hatte in zwei Arbeiten (1823, 1826) neben anderem nachgewiesen, daß die Rationalität der Parameter nicht so stark, wie vielleicht nach Weiß' Auffassung zu vermuten, von der Achsenwahl abhängig ist, sondern daß die Rationalitätsbedingung der Parameter gewährleistet ist, wenn nur die Achsen (samt Normierung) in drei Kanten eines nichtregulären Tetraeders aus vier kristallographischen Flächen gewählt werden [Groth 1926, 77ff.].

Hessels Formulierung des geometrischen Basissatzes in rationalen Vektorräumen ("gerengesetzlichen Strahlenvereinen") erlaubte nun außer einer Vereinfachung der bei Neumann recht umfangreichen Rechnungen eine Aufdeckung des strukturellen Hintergrunds dieser Beobachtung. So konstatierte Hessel für die Anwendung seines Konzepts in der Kristallographie, daß die

“Vergleichung der bis jetzt bekannten Krystallgestalten” zur Annahme des “Erfahrungssatzes”⁹ führe:

“Die sämtlichen Flächen an einem und demselben Krystalle gehören zu einem und demselben gerengesetzlichen Flächenvereine, so dass also auch deren Träger zu einem gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören und die Kanten des Krystalles parallel liegen mit Strahlen eines gerengesetzlichen Vereins kantenthümlicher Strahlen” (Hessel 1830, 2, 92).

Damit hatte Hessel eine mathematisch befriedigende strukturelle Fixierung des Rationalitätsgesetzes als eines der beiden zentralen Grundprinzipien der geometrischen Kristallographie des 19. Jahrhunderts angegeben. Trotz dieser früh entdeckten Bedeutung des Vektorraumkonzepts für die Kristallographie, die auch bei der Entwicklung der Theorie der “Ausdehnungsgrößen” des jüngeren Graßmann einen gewissen Einfluß hatte (Hermann Graßmann 1844) blieb die Vektorraumtheorie jedoch bekanntlich eine weitgehend periphere Erscheinung in der Mathematik des 19. Jahrhunderts. Ganz anders verhielt es sich dagegen bei der anderen mathematischen Struktur, die der auch von Hessel weitergeführten Analyse des kristallographischen Symmetriegesetzes zugrundelag.

2.3 Hessels Klassifikation der endlichen räumlichen Punktsymmetriesysteme

Hessel schickte der Analyse des kristallographischen Symmetriegesetzes eine allgemeine Studie der Gestalten endlicher Polyeder voraus. Deren Ziel war die Klassifizierung der endlichen konvexen Polyeder im euklidischen Raum unter den sich gegenseitig ergänzenden Gesichtspunkten der Symmetrie und des kombinatorischen Typs eines Polyeders. Hessel leistete so einen Beitrag zu einem von ihm als “Formen-” oder “Gestaltenlehre” bezeichneten Teilgebiet der euklidischen Geometrie. Zur Entwicklung der “Gestaltenlehre” schien ihm eine Präzisierung des Verständnisses der seit Haüy in der Kristallographie in steigendem Maße beachteten Polyedersymmetrien und deren Systematik als notwendig, die Hessel im Anschluß an jene Tradition als “*Lehre von der Gleichwerthigkeit*” bezeichnete:

“Ich habe gesucht, die Lehre von der Gleichwerthigkeit räumlicher Dinge auf rein mathematische Weise begründet durchzuführen und die verschiedenen Arten dieses Gleichwerthigseins schärfer, als (es) bisher geschah, zu untersuchen. ... Dass eine consequente Durchführung dieser Lehren für die Wissenschaft unnöthig sei, wird

niemand behaupten wollen, und daher wird auch niemand es tadeln können, dass nicht bloss die Gestaltensysteme, welche in der Krystallenwelt vorkommen, sondern alle denkbaren Gestaltensysteme auf gebührende Weise sind berücksichtigt worden" (Hessel 1830, 1, 3).

Hessel begann seine Untersuchung mit der Analyse der möglichen Symmetrieverhältnisse ("Axenarten") im euklidischen Raum — eine neue Fragestellung, die vor ihm auch von Mathematikern nicht bearbeitet worden war. Darauf baute er das Studium der möglichen endlichen Systeme von Punktsymmetrien ("Strahlen- und Axensysteme") und der zugehörigen einfachen Gestalten auf, das er bis zu einer vollständigen Liste der endlichen Punktsymmetriesysteme, also einer impliziten Klassifikation der endlichen orthogonalen Gruppen im dreidimensionalen Raum führte. Die allgemeine Theorie rundete er durch Entwicklung einer eigenen algebraischen Symbolik für die einfachen Gestalten ab, bevor er die Spezifizierung auf Kristallklassen und deren einfache Gestalten vornahm.

Das Symmetriekonzept Hessels kannte dem zeitgenössischen Stand des Kongruenzbegriffs in der Geometrie entsprechend *keine globalen Kongruenzabbildungen* (also Abbildungen des ganzen Raumes oder der Ebene). Es war im traditionellen Sinne an vorgegebene Figuren (in der Regel kompakte Polyeder) gebunden, allerdings im Unterschied zur bis in die Antike reichenden Tradition nicht mehr ausschließlich metrisch relational formuliert, sondern unter Verwendung von Bewegungen und Inversionen bzw. Spiegelungen ("räumlichen Substitutionen") der beteiligten Figuren.

Hessels Symmetriebegriff war *prima facie* relational; das heißt er unterschied zunächst für Paare von Figuren (z.B. Polyeder) A, B :

- "ebenbildliche Gleichheit", das heißt eigentliche Kongruenz, symbolisch $A \cong B$,
- und "gegenbildliche Gleichheit", das heißt uneigentliche Kongruenz, symbolisch $A | = | B$.¹⁰

Jedoch griff er bei der feineren Unterscheidung der Relationen ansatzweise zu einer operationalen Charakterisierung, ebenso wie bei der Begründung der naheliegenden spezifischen Transitivitätseigenschaften dieser Relationen.¹¹

Zur Fixierung der Verfeinerung der Symmetrieverhältnisse griff Hessel auf das Weißsche Konzept der "Achse" zurück und abstrahierte daraus ein rein geometrisches Konzept der Charakterisierung von Symmetriebeziehungen an einer Figur. So startete er mit dem Konzept der "*p-gliedrigen Achse*" (1830, 1, 36) als einer Geraden, welche Deckrotationen oder Deckspiegelungen der Ordnung p zuläßt. Dies wurde durch zwei Gruppen voneinander unabhängiger weiterer Symmetriemerkmale ergänzt:

Tabelle 2
Hessels 7 Achsentypen

<i>p</i> -gliedrige Achse	1-fach	2-fach
ungleichendig	C_p	C_{pv}
gleichstellig gleichendig	C_{ph}	D_{ph}
ebenbildlich gleichendig	D_p	D_{pd}
gerenstellig gleichendig	\bar{C}_{2p} ¹³	D_{pd}

- (i) – “*2-fach p-gliedrige*” Achse: zusätzlich zur Rotationssymmetrie gibt es Spiegelungen an Ebenen durch die Achse (internationale kristallographische Notation pm (p ungerade) bzw. pmm (p gerade), Schoenflies Notation C_{pv}). Hessel charakterisierte das allerdings verwickelter: der “Gegenkörper” der Figur (d.h. deren punktinverses Bild bezüglich eines Punktes der Achse) kann nach Rotation um π um eine zur Achse orthogonale Gerade zur Deckung mit der Ausgangsfigur gebracht werden (ebda., 37f.).
- “*1-fach p-gliedrige*” Achse: sonst.
- (ii) – “*ebenbildlich gleichendige*” Achse g : zusätzlich zur p -zähligen Rotationssymmetrie gibt es eine 2-zählige Rotationssymmetrie um eine zu g orthogonale Gerade (internationale krist. Notation $p2$ (p ungerade), $p22$ (p gerade); Schoenflies D_p);
- “*gleichstellig gleichendige (bzw. zweiendige)*” Achse g : zusätzlich zur Rotationssymmetrie Spiegelung an einer Orthogonalebene zu g (int. krist. Not. p/m , Schoenflies C_{ph}) (ebda., 40f.);
- “*gerenstellig gleichendige p-gliedrige*” Achse: Drehspiegelung mit Winkel $2\pi/2p$ (int. krist. Not. $2p$, Schoenflies \bar{C}_{2p}), von Hessel durch die Bedingungen der “gegenbildlichen Gleichheit” der “oberen” und “unteren Körperhälfte” beschrieben, ohne daß jedoch “gleichstellige Gleichendigkeit” vorliege (ebda., 43);
- “*ungleichendige*” Achse: falls keiner der in (ii) sonst vorliegenden Fälle zutrifft.

Da sich bei Kombinationen dieser verfeinerten Symmetriemerkmale bezüglich einer “*p-gliedrigen Axe*” lediglich in zwei Fällen eine Überschneidung ergibt — jede “gerenstellig zweiendige 2-fache” Achse ist auch “ebenbildlich zweiendig 2-fach” (ebda., 43)¹² — erhielt Hessel 7 verschiedene Achsenarten (Tab. 2)¹³.

Eine “Axe” war für Hessel also Ausdruck eines transitiv abgeschlossenen Systems von Symmetriebeziehungen einer Figur. Das gesamte Symmetriesy-

stem einer (kompakten) Figur erschien Hessel konsequenterweise als “*Axen-system*”. Dort treten endlich viele Achsen des oben angegebenen Typs in solcher Art auf, daß die Auswertung der Transitivität von Symmetriebeziehungen wiederum auf eine ausgezeichnete Symmetrierelation führt. In dieser Form arbeitete Hessel implizit mit Verkettungen und abgeschlossenen Systemen der zugrundeliegenden Symmetrierelationen, implizit also mit endlichen (orthogonalen) Gruppen.

Diese Betrachtungsweise kam auch bei der Analyse der möglichen Kombinationen von Achsen in den Symmetrien (endlicher) Figuren deutlich zum Ausdruck. Hessel suchte zunächst sämtliche (nichttrivialen) Achsen der Figur auf und analysierte, welche von ihnen “*gleichwerthig*” sind, d.h. durch Symmetrien ineinander übergehen. Bei Übertragung der so definierten “Gleichwerthigkeit” auf die den Achsen korrelierenden Achsensymmetrien (implizit Untergruppen der vollen Symmetriegruppe vom Typ wie in Tab. 2) entpuppt sich Hessels Charakterisierung als eine indirekte, implizite, dem Sachverhalt aber sehr gut angepaßte Charakterisierung der Konjugationsklassen der Achsensymmetriegruppen in der vollen Symmetriegruppe. Bei Existenz einer Achse ohne “gleichwerthige” zeichnete Hessel diese als “*Hauptaxe*” aus (ebda., 47)¹⁴ und unterschied zwischen Symmetriesystemen *mit* und *ohne* Hauptachse. Aus gruppentheoretischer Sicht entspricht dem die Unterteilung der endlichen orthogonalen Gruppen in solche mit bzw. ohne zyklisch/diedrischen Normalteiler.

Seinem Symmetriebegriff entsprechend fixierte Hessel die Symmetriesysteme geometrisch-konfigurativ, also nicht etwa wie Frankenheim algebraisch-symbolisch (vgl. §1.5) oder gar durch Systeme symbolisch repräsentierter Operationen wie J.G. Graßmann (vgl. §2.1). Er erreichte das durch Diskussion des jeweils zugehörigen “Strahlensystems”, d.h. des Bündels von Halbgeraden durch den “Mittelpunkt des Gleichwerths” (einem Fixpunkt des Symmetriesystems).¹⁵

Zur Charakterisierung eines “Strahlensystems” gab Hessel eine Übersicht, welchem Achsentypp ein beliebiger Strahl zugehört (einschließlich “1-fach 1-gliedriger ungleichendiger” d.h. trivialer Achse) und gab die Zahl der “gleichwerthigen” Strahlen an. Das Resultat war eine vollständige Beschreibung des Symmetriesystems von einem geometrisch-konfigurativen Gesichtspunkt aus.¹⁶ Aus gruppentheoretischer Sicht war dies eine implizite aber deutliche Beschreibung des Orbitdiagramms der Operation endlicher orthogonaler Gruppen auf einer Sphäre mit Angabe des Stabilisators jeden Punktes und der Mächtigkeiten des zugehörigen Orbits. Seinem Kontext gemäß (Studium der möglichen Gestalten endlicher konvexer Polyeder) beschränkte sich Hessel auf “*endliche Strahlensysteme*”, d.h. solche, bei denen nur endlich viele nichttriviale Strahlen (“*k*-fach *p*-gliedrige Strahlen” mit $k = 1, 2, p \in \mathbb{N}, kp > 1$) auftreten. In gruppentheoretischer Sprache bedeutete dies die *Einschränkung der zugelassenen Symmetriesysteme auf endliche*

orthogonale Gruppen (endliche Stabilisatoren/Standgruppen und nur endlich viele nichttriviale Standgruppen, insbesondere endliche Orbits bei Operation auf der Sphäre).

Hessel erhielt in Verfeinerung der Weißschen Symmetriebeschreibung durch Achsensysteme eine reine, das heißt, anders etwa als Haüy, eine von Polyedergestalten absehbende geometrisch-konfigurative Charakterisierung endlicher Symmetriesysteme. So unterschied er ausdrücklich zwischen der (Polyeder-) Gestalt und dem der Gestalt zugeordneten *Symmetriesystem* (*„Strahlensystem“*). Lediglich in einem ersten Schritt wurde

“... die Gestalt als das Gegebene betrachtet und für sie dasjenige körperliche (d.h. räumliche, E.S.) Strahlensystem aufgesucht, welches ihr entspricht, wenn man alles was an ihr möglicher Weise als gleichwerthig betrachtet werden kann, wirklich als gleichwerthig betrachtet” (1830, 1, 68).

War andererseits ein *„Strahlensystem“* vorgegeben, so erhielt Hessel umgekehrt in einer ganz ähnlichen Vorgehensweise, wie sie vom Standpunkt der Gruppendenkweise aus zu erwarten wäre (Flächennormalen als Orbit eines Normalenvektors), eine zugehörige *einfache Gestalt*:

“Man erhält (...) Gestalten, die einem gegebenen Strahlensysteme entsprechen, wenn man Ebenen so um den Mittelpunkt desselben herumlegt, dass, wenn eine solche Ebene einem bestimmten Strahl in einer bestimmten Entfernung vom Strahlenmittelpunkte so schneidet, dass sie auf diesem Strahl senkrecht ist, auch jeder andere, dem erwähnten gleichwerthige, Strahl eben so durch eine Ebene geschnitten wird” (Hessel 1830, 1, 69).

Entsprechend sah Hessel Polyeder, die durch Systeme von Flächen *„verschiedenen Werths“* berandet werden, als *„zusammengesetzte Gestalten“* an. Jedes System von Flächen *„gleichen Werths“* definiert dabei eine der einfachen Gestalten, aus der die betrachtete Gestalt zusammengesetzt ist (ebda., 70).

Darüberhinaus konnte Hessel das vorher lediglich vage wahrnehmbare Phänomen der *Scheinsymmetrie* bei Polyedern vorgegebenen Symmetrietyps klar charakterisieren. Er verwies darauf, daß eine zugehörige Polyedergestalt *„an sich“* durchaus ein größeres Symmetriesystem besitzen kann, als es vom zugrundegelegten *„Strahlensystem“* her eigentlich zu erwarten wäre:

“... denn es ist hier (d.h. bei zugrundegelegtem Symmetriesystem, E.S.) nun nicht mehr bloss die Rede von der Gleichwerthigkeit der Theile eines Körpers an sich, sondern von dieser Gleichwerthigkeit

in Beziehung zu dem bestimmten gegebenen Strahlensysteme, welche letztere Gleichwerthigkeit die erste bei den betreffenden Theilen voraussetzt, während nicht umgekehrt Theile eines Körpers, die an sich gleichwerthig sind, auch sich als gleichwerthig verhalten müssen in Beziehung zu dem gegebenen Strahlensysteme" (ebda., 68f.).

Hessel traf also anders als seine Vorgänger eine sehr klare *Unterscheidung zwischen Symmetrietyt* ("Strahlensystem") eines Polyeders *als Struktureigenschaft* (gegebenfalls kontextbedingt wie etwa bei Vorgabe der Kristallklasse eines Minerals) und *als lediglich zufällig erscheinender Formeigenschaft* der Polyedergestalt. Die geometrisch-konfigurative Charakterisierung des Symmetrietyps erwies sich dieser Art der Fragestellung als sehr gut angepaßt und war Frankenheims bzw. Graßmanns stärker algebraisierenden Ansätzen in keinerlei Weise unterlegen.

Was nun die Klassifikation der "Strahlen-" bzw. "Axensysteme" angeht, so unterschied Hessel zunächst "*hauptaxige*" und "*hauptaxenlose*". Da für die Symmetriesysteme mit Hauptachse weitere Achsen höchstens 2-zählig sind und die letzteren orthogonal zur Hauptachse verlaufen, reduzierte sich die Klassifikation der "hauptaxigen Strahlensysteme" auf eine Diskussion der zu den 7 in Tab. 2 genannten Achsentypen gehörenden Strahlensysteme (Hessels Charakterisierung der Symmetrien der erweiterten zyklischen und diedrischen Gruppen C_p , C_{ph} , C_{pv} , D_p , D_{ph} , D_{pd} , \bar{C}_{2p}) (Hessel 1830, 1, 48ff.).

Für den hauptachsenlosen Fall entwickelte Hessel schrittweise einschränkende Bedingungen, die sich in folgenden Aussagen zusammenfassen lassen:

Lemma 1 (Hessel 1830, 1, 100–105):

In jedem "hauptaxenlosen Strahlensystem" gibt es dreigliedrige Achsen, darüberhinaus jedoch p -gliedrige Achsen höchstens für $p = 4, 5$. Alle treffen sich in einem Punkt.

In die Begründung ging Hessels Annahme der Endlichkeit der Strahlensysteme natürlich entscheidend ein. Er betrachtete für ein angenommenes $p \geq 6$ zwei p -gliedrige Strahlen kleinstmöglichen Winkelabstandes $\alpha > 0$ und zeigte, daß aus der Transitivitätsforderung der Symmetriebeziehungen die Existenz p -gliedriger Strahlen mit Winkelabstand $\alpha' < \alpha$ folgt. So erhielt er $p \leq 5$ (ebda., 101ff.). Daran schloß er eine Analyse der möglichen Anordnungen von 3-, 4-, 5-gliedrigen Strahlen an und erhielt

Lemma 2 (Hessel, ebda., 105 – 108):

- (i) Um einen 4-gliedrigen Strahl ordnen sich vier “ebenbildlich gleiche” 3-gliedrige Strahlen in symmetrischer Lage. 5-gliedrige Strahlen treten in diesem Fall nicht auf.
- (ii) Analog ist ein 5-gliedriger Strahl von fünf 3-gliedrigen Strahlen umgeben (4-gliedrige Strahlen treten hier wiederum nicht auf).
- (iii) Existieren keine 4- oder 5-gliedrigen Strahlen, so gibt es vier “ebenbildlich gleiche” 3-gliedrige Strahlen in einer symmetrischen Raumwinkelkonfiguration.

Damit hatte Hessel gezeigt, daß alle hauptachsenlosen Systeme 3-gliedrige Strahlen enthalten und nach deren Konstellation in 3 Typen zerfallen, die mit der Achsenkonfiguration von Oktaeder, Ikosaeder bzw. Tetraeder übereinstimmen. In einer Verfeinerung der Analyse erhielt er weiter

Lemma 3 (Hessel 1830, 1, 121–131):

Es gibt genau 7 “hauptachsenlose Strahlensysteme”, die sich durch die Konstellation ihrer 3-gliedrigen Achsen voneinander leicht unterscheiden lassen:

- 2-fach 3-gliedrig 8-strahliges System (erweiterte Oktaedergruppe O^*),
- 1-fach 3-gliedrig 8-strahliges System (Oktaedergruppe O),
- 2-fach 3-gliedrig 4-strahliges System (erweiterte Tetraedergruppe T_d),
- 1-fach 3-gliedrig 2×4 -strahliges System (erweiterte Tetraedergruppe T_h),
- 1-fach 3-gliedrig 4-strahliges System (Tetraedergruppe T),
- 2-fach 3-gliedrig 20-strahliges System (erweiterte Ikosaedergruppe I^*),
- 1-fach 3-gliedrig 20-strahliges System (Ikosaedergruppe I).

Zusammen mit seiner Liste der “hauptaxigen Strahlensysteme” war Hessel damit vom Resultat her eine vollständige Klassifikation endlicher Punktsymmetriesysteme gelungen, die sich zusammenfassen läßt in

Theorem 1 (Hessel 1830):

Jedes endliche Punktsymmetriesystem entspricht

- entweder einem aus den 7 Serien “hauptaxiger Strahlensysteme” von Tabelle 2.
- oder einem der 7 “hauptachsenlosen Strahlensystemen” von Lemma 3.

Die Begründung für diese Aussage war weitgehend schlüssig geführt; sie ließ höchstens insofern etwas zu wünschen übrig, als die Begründung dafür, daß wirklich nur diese und keine weiteren Symmetriesysteme existieren, nicht gerade sehr klar herausgearbeitet war. Insbesondere war für den Fall mit Hauptachsen das Argument positiv in Hinsicht auf konstruktive Darstellung des Achsentyps geführt, nicht negativ hinsichtlich des Ausschlusses eventuell angenommener weiterer Fälle. Jedoch wurde durch Hessels Argumentation nahegelegt, daß es sich bei seiner Liste um eine vollständige Klassifikation der endlichen Punktsymmetriesysteme handelte — eine Auffassung, die sich später mit gruppentheoretischen Mitteln bestätigen ließ.

Hessels Analyse blieb allerdings bei dieser Bestimmung der endlichen Punktsymmetriesysteme nicht stehen; letztere bildeten in seinem Programm der “Formenlehre” — auch quantitativ — lediglich einen ersten Schritt (1830, 1, 32–65, 99–131). Darauf aufbauend diskutierte Hessel ausführlich die zugehörigen einfachen Gestalten der “hauptaxigen Strahlensysteme” (ebda., 66–98), sowie die “hauptaxenlosen Gestalten” (ebda., 131–185), verbunden mit der Entwicklung einer Fachterminologie, die sich jedoch nicht durchsetzen konnte. In einem dritten Schritt analysierte er schließlich die charakteristischen Größenverhältnisse an den eingeführten einfachen Gestalten (1830, 2, 3–42), bevor er durch Einführung des Rationalitätspostulats die spezifisch kristallographischen Symmetriesysteme und Gestalten auszeichnen konnte (1830, 2, 43–127).

2.4 Hessels Bestimmung der Kristallklassen

Hessels Arbeit blieb ein gutes halbes Jahrhundert wenig beachtet. Selbst als in den 1880er Jahren nach Herausbildung des geometrischen Gruppenbegriffs begonnen wurde, diesen explizit in die Kristallographie einzuführen (vgl. §5.1), blieb Hessel zunächst unerwähnt.¹⁷ Zwar hatte sich bis dahin das Konzept der Kristallklassen in der Kristallographie breit durchgesetzt, dies jedoch aufgrund der Arbeiten von Bravais (1849a, b, 1851) und Gadolin (1871), die beide anscheinend jeweils ohne Kenntnis der Arbeiten ihrer Vorgänger die Klassifikation neu ausführten (vgl. §§3.2, 5.1). Erst durch L. Sohncke (1891) wurde Hessels Arbeit wieder breiter bekannt gemacht. Bis dahin waren die Kristallklassen vier- bis fünfmal “entdeckt” worden (Frankenheim 1826, Hessel 1830, Bravais 1849–51, Gadolin 1871, Minnigerode 1887).

Hessel baute in seiner Ableitung der Kristallklassen auf das allgemeine Symmetriestudium in seiner “Gestaltenlehre” auf und sortierte mit Hilfe des Rationalitätsgesetzes diejenigen Punktsymmetriesysteme aus, die “mit dem Gerenstrahlgesetz vereinbar” sind, das heißt ein “geometrisch dreidimensionales” injektives Bild von Q^3 in E^3 invariant lassen.

Hierzu führte er zunächst eine charakteristische Anzahl m der “Querdimensionen” einer p -gliedrigen Achse g ein. Dies war im wesentlichen die

kleinste Mächtigkeit eines Orbits aus orthogonalen Geraden zu g in der Orthogonalebene durch den "Mittelpunkt" des Systems (1830, 1, 61ff., 167ff.); d.h. $m = 2p$ im Fall einer Achse vom Typ \bar{C}_{2p} oder D_{pd} und in allen anderen Fällen

$$m = \begin{cases} p & \text{für ungerade } p \\ \frac{p}{2} & \text{für gerade } p \end{cases}$$

Die Verträglichkeit eines Symmetriesystems mit dem Rationalitätsgesetz ist für $m = 1, 2$ offensichtlich. Zur Überprüfung der Verträglichkeit für $m > 2$ legte er zwei Basisvektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} in zwei "Querdimensionenachsen", die den Winkel $2\pi/m$ einschließen. Da in der Winkelhalbierenden noch eine weitere "Querdimensionenachse" liegt (also eine Gerade desselben Orbits), andererseits bei der naheliegenden Normierung der Basisvektoren $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{m} \right)},$$

verlangt Verträglichkeit "mit dem Geradenstrahlgesetz":

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \in \mathcal{Q}, \quad 1 + \cos \frac{2\pi}{m} = \begin{cases} 0 \\ \text{oder} \\ 2^{2k+1}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

So erhielt Hessel

$$\cos \frac{2\pi}{m} = 1, -1, -\frac{1}{2}, \quad \text{bzw.} \quad m = 1, 2, 3$$

und damit

Lemma 4 (Hessel 1830, 2, 52f.):

Ist eine Achse mit m "Querdimensionenachsen" kristallographisch zulässig, so gilt $m = 1, 2$ oder 3 . Umgekehrt sind Punktsymmetriesysteme mit Hauptachse und $m = 1, 2$ oder 3 kristallographisch zulässig (d.h. mit dem Rationalitätsgesetz vereinbar).

Bei den "hauptachsenlosen Strahlensystemen" wurden die beiden Ikosaedersymmetrietypen ("3-gliedrig 20-strahlige Systeme") ausgeschlossen, weil dort Achsen mit $m = 5$ auftreten. Für die anderen Fälle konnte Hessel hingegen nachweisen:

Lemma 5 (Hessel 1830, 2, 53):

Bei geeigneter Normierung bilden die "hauptaxigen 8-strahligen und 4-strahligen Systeme" (d.h. die O^* , O , T_d , T_h , T entsprechenden Punktsymmetriesysteme) jeweils "gerengesetzliche Strahlenvereine". Im Fall der "8-strahligen Systeme" z.B. bei Normierung der 4-gliedrigen, 3-gliedrigen und 2-gliedrigen Strahlen im Verhältnis $\sqrt{3} : 1 : \sqrt{3}/2$.

Damit erhielt Hessel die schon von Frankenheim aufgestellte Liste der 32 Kristallklassen wieder,¹⁸ die sich seinem Zugang gemäß nun folgendermaßen aufgliederte:

Theorem 2 (Hessel 1830, 2, 95–98):

Es gibt 32 kristallographische "Strahlensysteme", die sich wie folgt aufteilen:

- (i) 5 hauptachsenlose (Kristallklassen des isometrischen Systems),
- (ii) außerdem 27 weitere mit Hauptachse und m "Querdimensionsachsen"
 - a) 12 mit $m = 3$ (Kristallklassen des trigonal/hexagonalen Systems),
 - b) 7 mit $m = 2$ (tetragonales System),
 - c) 8 mit $m = 1$ (orthorhombisches, monoklines und triklines System).

Damit hatte Hessel gezeigt, daß seine allgemeine Symmetrie- und Gestaltenlehre mit großer Schlüssigkeit zu einer Fundierung der geometrischen Kristallographie führte. Eine Gegenüberstellung der theoretisch abgeleiteten Formen mit den empirisch beobachteten Kristallformen ließ ihn 17 der 32 Klassen mit Sicherheit in der Natur identifizieren, bei weiteren 4 schien eine Identifizierung zwar wahrscheinlich, aber nicht endgültig sicher. Die übrigen 11 blieben zunächst rein theoretischer Art.

Seine Ableitung erwies sich damit unter zweierlei Gesichtspunkten als fruchtbar: sie war empirisch gehaltvoll, erschöpfte sich aber nicht in einer ex-post Ableitung schon vorher bekannter Formen; sie griff umgekehrt über den Rahmen des Beobachteten hinaus, war aber nicht zu weit von diesem entfernt, um weiteren empirischen Studien als geeigneter theoretischer Rahmen dienen zu können.

Wenn Hessels Resultate dennoch kaum rezipiert wurden und schnell in Vergessenheit gerieten, bis sie durch Sohncke wieder in Erinnerung gerufen wurden, so kann dies nicht auf eine eventuelle Unfruchtbarkeit des Ansatzes zurückgeführt werden. Diese Schwierigkeiten weisen eher auf eine in den 1830er Jahren noch unzureichende wissenschaftliche Kommunikation, schwachen Bekanntheitsgrad des von Hessel gewählten Publikationsmediums ("Gehlers Physikalisches Wörterbuch") und eine wenig ansprechende Darstellungsform hin, die mit einer weitgehend neu erfundenen, daher esoterisch

anmutenden Terminologie und einer Unmenge technischer Details überfrachtet erschien.¹⁹

Daran änderten auch spätere Bemühungen Hessels, die Grundzüge seiner “Gestaltenlehre” publik zu machen, nichts wesentliches. In (Hessel 1853) führte er eine erneute Ableitung der Punktsymmetrietypen (hier sogar unter Einschluß einiger Typen mit kontinuierlichen Drehachsen) und eine neue symbolische Notation vor. Wiederum fast zehn Jahre später nützte er die Gelegenheit des 50-jährigen Doktorjubiläums von C.L. Gerling für eine erneute Diskussion der Symmetrieklassifikation von “Raumdingen” (wiederum unter Einschluß kontinuierlicher Drehachsen) (Hessel 1862) [Burckhardt 1988, 45ff.]. Obwohl Hessel Bravais’ Arbeiten sehr bald nach ihrem Erscheinen zur Kenntnis nahm (Hessel 1853, 29) und zugestehen mußte, daß seine eigene Terminologie “besonders für Ausländer schwierig zu verstehen” sei (1862, 4), blieb er auch in den späteren Arbeiten bei seiner Terminologie und Notationsweise. In Verbindung mit den gewählten Publikationsmedien (1853 Separatdruck bei T. Fischer Verlag, Kassel; 1862 Marburger Festschrift) trug dies nicht gerade zum Erfolg seiner Bemühungen um die weitere Verbreitung seines Ansatzes und seiner Ergebnisse bei.

2.5 Frankenheims Interpretation der “Grundformen” als Ausdruck der Symmetrie von Kristallgittern

Die 1830er Dekade, mit Überschreitungen um einige Jahre nach vorn und hinten, war trotz der relativen Isolation der beteiligten Naturforscher für das von Weiß konstituierte Forschungsprogramm eine fruchtbare Phase. Frankenheim hatte etwa ein halbes Jahrzehnt vor den theoretisch einschneidenden, wenn auch disziplinär wenig erfolgreichen Arbeiten Graßmanns und Hessels seine Entdeckung der 32 Kristallklassen gemacht und publiziert — allerdings ohne jede unmittelbare Wirkung. Ein halbes Jahrzehnt später schlug er eine Verbindung dieses Gesichtspunktes mit dem einer Neuinterpretation der Häüyschen “Grundformen” vor (1835). Wieder einige Jahre später (1842) drang er im Rahmen einer umfangreichen Studie, gestützt auf eigene Beobachtungen und detaillierte Sichtung der Literatur, zu einer systematischen Verbindung der Gliederungsprinzipien der Weiß/ Mohr’schen Kristallsysteme sowie den von ihm selber eingeführten Kristallklassen mit den neugefaßten “Grundformen” vor und baute darauf ein methodisch prägnantes, materialreiches “System der Krystalle” (Titel der Arbeit) auf. Diese Studie erreichte im Unterschied zu den anderen nicht nur Bekanntheit unter den deutschsprachigen Kristallographen, sondern fand auch in Frankreich Beachtung und diente etwa A. Bravais als Anregung bei der von ihm durchgeführten Modernisierung des atomistischen Programms (vgl. §3).

Frankenheim nahm bei aller Neigung zur dynamistischen Theorie des Materieaufbaus²⁰ eine insgesamt eher vorsichtige, “ausgewogene” Stellung im

Atomismus-Dynamismus-Streit ein. Die zeitgenössische atomistische Theorie, deren Hauptvertreter in Frankreich arbeiteten, war in den 1830er Jahren durch die Ablösung des Laplaceschen Programms durch ein komplexeres Netz der entstehenden mathematischen Physik des 19. Jahrhunderts gekennzeichnet [Fox 1970, 1974]. Frankenheim beurteilte dementsprechend die Atomistik als ein System komplizierter Hypothesen, durch die die Phänomene der Gravitation, der Elektrizität, des Lichts und der Wärme nur zum Teil und nicht immer überzeugend erklärt wurden (1835, 2f.). Doch erkannte er ihre weitreichende und vielfältige Mathematisierung im Rahmen der zeitgenössischen rationalen Mechanik, insbesondere der Elastizitätstheorie (vgl. [Fox 1970, 1974; Arnold 1983/84]), umstandslos als Entwicklungsvorsprung gegenüber dem dynamistischen Ansatz an. Er hoffte zwar, selber in gewissem Maße zu einer Mathematisierung innerhalb des vom Dynamismus geprägten Programms beitragen zu können (Kristallklassen), glaubte aber realistischerweise nicht daran, die klaffende Lücke im Handstreich überwinden zu können, und sah daher die Notwendigkeit eines Einbezugs auch atomistischer Konzeptionen in die Theoriebildung.

In seiner Physik der festen Körper akzeptierte er den Erfolg — obwohl nicht die Wahrheit — der atomistischen Hypothese, setzte aber an die Stelle der Häüyschen Auffassung sich berührender polyedrischer Moleküle, an Laplace und Poisson anschließend, die Annahme von Zwischenräumen zwischen den Teilchen. Diese sollten gitterförmig angeordnet sein und durch eine Kombination anziehender und abstoßender Kräfte gebunden werden. Für die geometrische Konfiguration präzierte er:

“In den krystallisierten Körpern liegen die Theilchen völlig symmetrisch neben einander, d.h. wenn man von zwei Theilchen im Innern des Krystalls parallele Linien zieht, so wird, wenn von dem einen ein Theilchen getroffen wird, auch von dem andern ein Theilchen nach einem gleichen Intervall getroffen werden” (1835, 311).

In dieser Weise gab er eine konfigurative Beschreibung eines Kristallgitters, das implizit auf die Translationsinvarianz der Kristallstruktur hinwies.

Diese Idee Frankenheims war nicht völlig neu. Schon gute zehn Jahre vorher hatte der Physiker und Mathematiker, *L.A. Seeber*, ein Gauß-Schüler, diese Konzeption als einen Beitrag zur Modernisierung der “alten” (Häüyschen) Auffassung der atomistischen Kristallstrukturtheorie vorgestellt (Seeber 1824). Auch *Gauß* selber dachte ganz in diesem Sinne, wie seine Besprechung einer Arbeit Seebers mit anderem Thema, nämlich aus der Zahlentheorie, zeigt. Seeber hatte in einer Abhandlung über Reduktionstheorie ternärer, positiv definiter quadratischer Formen (1831) den Gaußschen Ansatz aus den “*Disquisitiones Arithmeticae*” fortgesetzt; und Gauß wies in

seiner Besprechung (Gauß 1831) außer auf das zahlentheoretische Verdienst der Arbeit auf eine — damals — erstaunliche *Beziehung zwischen Zahlentheorie und Kristallographie* hin, die durch die *geometrische Interpretation einer Klasse quadratischer Formen als ein Gitter* (mit verschiedenen Basisdarstellungen) eröffnet wurde. Im Gaußnachlaß finden sich Notizen, in denen diese Idee insbesondere unter dem Gesichtspunkt des Rationalitätsgesetzes ein Stück weiter verfolgt wird. Wie so viele andere der Gaußschen Ideen blieb jedoch auch diese ohne merklichen Einfluß auf die weitere Entwicklung der Kristallographie des 19. Jahrhunderts [Groth 1926, 89ff.].

Während Gauß und Seeber dem atomistischen Programm verbunden gewesen zu sein scheinen, strebte Frankenheim eine Verbindung der dynamischen mit der atomistischen Theorie des Kristallaufbaus an. Den Schlüssel für eine solche Verbindung sah er in der Fortentwicklung der Symmetriekonzepte, die ja in beiden Ansätzen schon eine Rolle spielten. Frankenheim hoffte, die Verbindung durch die Annahme herstellen zu können, daß die jedes Teilchen in gleicher Weise umgebenden Kräftesysteme eine Symmetrie aufweisen, die im Sinne des (erweiterten) Weißschen Programms zu verstehen wären. Konsequenterweise ging er davon aus, daß diese Symmetrie die äußere Gestalt sowie die optischen und elektrischen Eigenschaften des Kristalls determinieren (1835, 293).

Auf der anderen Seite stellte er die Hypothese auf, daß die Spaltungseigenschaften durch die Symmetrie des Gitters bestimmt werden. Diese Hypothese bezog ihre Plausibilität aus der Beobachtung, daß die maximalen Punktsymmetriesysteme der Häüyschen Grundformen — bis auf zwei Ausnahmen— mit einer der holoedrischen Symmetrien der Weiß/Mohsschen Kristallsysteme übereinstimmen, sodaß sie sich in natürlicher Weise den 7 Kristallsystemen²¹ einordnen lassen. Ausnahmen bildeten dabei lediglich das Tetraeder und das schiefe Rechteckprisma (Nr. 3, 14 in der Liste von §1.2); das erste wegen "zu kleiner", lediglich hemiedrischer Symmetrie, das letztere, weil es die Symmetrie des Parallelepipeds aufweist und daher bei Einnahme eines Symmetriegerichtspunktes lediglich als nichtgenerische Form des Parallelepipeds erscheint.

Den Grund für diese Übereinstimmung suchte Frankenheim in den Symmetrieeigenschaften der zugrundeliegenden Kristallgitter. In seiner späteren Arbeit formulierte er das folgendermaßen:

“Man findet aber neben jener bloss auf die Gesetze der Symmetrie gegründeten Eintheilung (in Kristallsysteme/-klassen; E.S.), dass die Theilchen der Krystalle auf fünfzehn verschiedene Arten geordnet sein können, und diese fünfzehn Arten stimmen in allen Beziehungen mit den fünfzehn Grundformen überein, deren Anzahl also durch die Theorie als nothwendig begründet wird. Diese und andere

Resultate ergeben sich aus der einfachen Voraussetzung, dass die Theilchen im Krystall symmetrisch gelagert sind.” (Frankenheim 1842, 483)

Seiner Auffassung nach wirkt sich die Symmetrie des Teilchengitters in der mechanischen “*Structur*”, d.h. den Elastizitäts- und Kohäsionseigenschaften des Kristalls aus (1835, 292, 296). Daher konnte er die Ergebnisse der Häüyschen Spaltungsversuche als empirischen Hinweis auf die Symmetrie der Raumgitter interpretieren. Aus dieser Beziehung — anscheinend nicht aus einer systematischen Untersuchung der Symmetrietypen von Raumgittern — begründete er die Vermutung, daß sich die Gitter in 15 “*Ordnungen*”²² unterteilen, die in direkter Weise den “Grundformen” korrespondieren sollten.

Frankenheim erschien die Ausführung einer theoretischen Begründung dieser Vermutung nicht als Priorität, weil er die atomistische Auffassung nicht als “Wahrheit” sondern lediglich als Gedankenmodell anerkannte. Er zeigte sich jedoch überzeugt davon, daß Anhänger der atomistischen Theorie die von ihm nur angedeuteten Zusammenhänge in nicht zu ferner Zukunft ausführen würden.²³ Und in der Tat bestätigte Bravais’ Analyse keine zwei Jahrzehnte später Frankenheims Vermutung²⁴ im wesentlichen; Bravais stellte lediglich die Identität zweier der 15 “Ordnungen/Grundformen” unter dem Symmetriegesichtspunkt fest (schiefes Rhombenprisma und parallelogrammatische Dipyramide) und reduzierte so die Frankenheimschen “Ordnungen” auf die 14 nach ihm benannten Raumgittertypen (Bravais 1850, 97, Anm. — vgl. §3.3). Eine Zusammenstellung der Frankenheimschen “Ordnungen/Grundformen” und ihre Beziehung zu den “Grundformen” Häüys, sowie zur Bravais’schen und modernen Charakterisierung der Raumgittertypen findet sich in Tab. 3.

Frankenheim war sich darüber im klaren, daß die Einteilung in “Grundformen/Ordnungen” (Raumgittertypen) und in Kristallklassen nicht in einer linearen Klassifikationshierarchie zu erreichen war. Das führte ihn zwischenzeitlich dazu (1835), die Kristallklassen als sekundäres Merkmal anzusehen und die Auszeichnung von Grundform und Kristallsystem hervorzuheben. Diesen Standpunkt differenzierte er jedoch später und entwickelte in seiner umfangreichen Studie (1842) eine *fünfgliedrige Einteilung* in *Kristallfamilien* (bei Frankenheim (1842) “Classe” oder “System”), *Gittertypen* (bei Frankenheim: “Ordnungen” bzw. “Grundformen”), *Kristallklassen* (bei Frankenheim “Familien”), eine rein geometrisch bestimmte Verfeinerung von Gittertypen und Kristallklassen, die er als “*Gattungen*” bezeichnete. Die “Gattungen” waren nun nach Frankenheim wiederum je nach der chemischen Zusammensetzung (entsprechend der Summenformel) in “Arten” zu unterteilen. Frankenheim ging also, anders etwa als Häüy und Werner nicht mehr davon aus, daß aus der Identität der Kristallformen auf die chemische Identität der Mineralsubstanzen zu schließen sei.²⁵ Diese Ausdifferenzierung der morphologischen und der chemischen Konzepte war entscheidend durch E. Mitscherlich

Tabelle 3
Frankenheims "Ordnungen/Grundformen"

Kristallsystem bzw. -familie	Grundform	Bravais Kl./Art	Häuü	Modern Typ	Max. Symm.
Isometrisch ("tesseral")	Würfel	1/1	1	23P	O^*
	Oktaeder	1/2	2	23F	O^*
Tetragonal	Rhombendodekaeder	1/3	4	23I	O^*
	quadratisches Prisma	3/1	10	4P	D_{4h}
	tetragonale Dipyramide	3/2	6	4I	D_{4h}
Hexagonal	hexagonales Prisma	2	17	3P	D_{6h}
	Rhomboeder	4	5	3R	D_{3d}
Orthorhombisch ("isoklin")	Rechteckprisma	5/1	11	222P	D_{2h}
	Rhombenprisma	5/2	12	222C	D_{2h}
	rechteckige Dipyramide	5/3	7	222I	D_{2h}
	rhombische Dipyramide	5/4	8	222F	D_{2h}
Monoklin	parallelogramm. Prisma	6/1	13	2P	C_{2h}
	schiefes Rhombenprisma	6/2	15	2I, 2B etc.	C_{2h}
Triklin	parallelogr. Dipyramide	6/2	9	2I, 2B etc.	C_{2h}
	Parallelepiped	7	16	P	C_i

(vgl. Anhang 2, Tab.10)

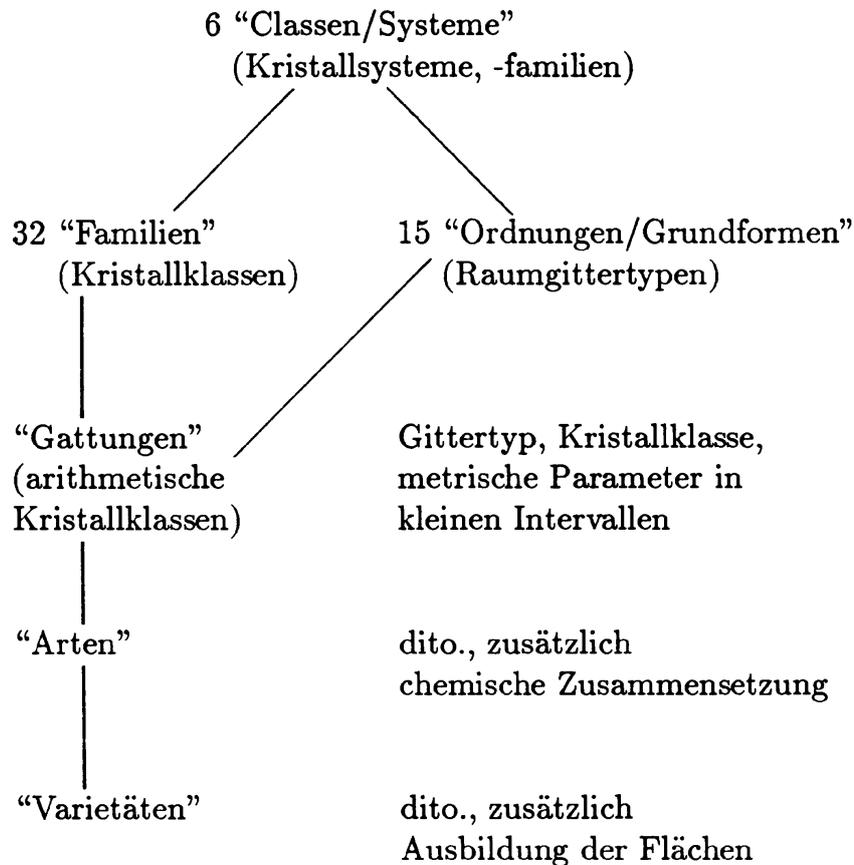


Fig. 5 Kristallklassifikation bei Frankenheim

geprägt worden, der ab 1819 den "Isomorphismus" von Mineralien, d.h. das Auftreten chemisch verschiedener Substanzen in kristallographisch äquivalenten Formen, aus dem Bereich der Anomalien herausgehoben hatte. Mitscherlich sah dies ganz im Gegenteil als ein gesetzmäßig reguliertes Phänomen an und begann, es zur Gewinnung in Einsichten über chemisch analoge Substanzen und Verbindungen zu verwenden [Melhado 1980, Schütt 1984, 138ff.].

Zusätzlich zur "Kristallart" hatte Frankenheim darüberhinaus in (1835) noch die "Kristallvarietät" betrachtet, bei der außer den Angaben zur "Art" (Gittertyp, Kristallklasse, metrische Parameter, chemische Zusammensetzung) die am stärksten ausgebildeten Flächen (einfache/zusammengesetzte Kristallgestalt) anzugeben waren (1835, 295) (vgl. Fig. 5).

Bei der obersten Einteilung in 6 Kristallfamilien ("Classen/Systeme") verwendete Frankenheim in leichter Modifikation die Weißschen Achsensysteme (Frankenheim 1842, 480, 485).²⁶ Er faßte dabei das trigonale und das hexagonale System mit den 12 Kristallklassen D_{6h} , D_6 , C_{6h} , C_{6v} , C_6 , D_{3h} , C_{3h} , D_{3d} , C_{3v} , $\bar{C}_6 = C_{3i}$, D_3 , C_3 und den zwei "Grundformen" hexagonales Prisma und Rhomboeder (entsprechend den Raumgittertypen $3P$ und $3R$) in

seiner "hexagonalen Classe" zusammen (ebda., 517-545). Daß — im Unterschied zu den anderen 5 Kristallfamilien (bzw. Systemen) — hier nicht jede Kristallklasse mit beiden (allen) "Grundformen" sondern nur mit den spezifisch trigonalen (D_{3d} und deren Untergruppen) zu kombinieren ist, erwähnte er nur beiläufig in der Form, daß das Rhomboeder

"... auch als Hemiedrie des hexagonalen Systems aufgefasst werden (kann)" (1840, 518).

Daß in diesem Gesichtspunkt ein zum gewöhnlichen Konzept der Hemiedrien querliegender Aspekt eingeführt wurde, der später die Unterscheidung von Kristallsystemen und Bravaisystemen gerade für die Abgrenzung des hexagonalen Falls vom trigonalen notwendig werden ließ, scheint Frankenheim nicht als ausdrückliches Problem interessiert zu haben. Seine Zusammenfassung des hexagonalen und des trigonalen Systems war eine seinem Präzisierungsniveau der zugrundeliegenden Strukturen adäquate Verarbeitung des Problems, das später zur Zusammenfassung der unterschiedlichen Einteilung der 7 Kristallsysteme und 7 Bravaisysteme in 6 Kristallfamilien führte (Neubüser e.a. 1981) (vgl. Anhang 1).

Nach Frankenheim wurde eine "Kristallgattung" nun im wesentlichen durch die Angabe von "Familie" (heute Kristallklasse) und "Grundform" (heute Raumgittertyp) bestimmt. Darüberhinaus forderte er noch die Angabe der durch Kristallklasse und Grundform noch nicht determinierten metrischen Parameter im Rahmen kleiner Intervalle (Temperaturschwankungen!) (1840, 485). So besaß seine Klassifikation zunächst, d.h. noch vor der Unterscheidung durch freie metrische Parameter, 69 theoretisch mögliche, wesentlich verschiedene "Gattungen", von denen nur eine Teil durch empirisch beobachtete Mineralien besetzt wurde. Stellt man die Redundanz seiner "Grundformen" im monoklinen System in Rechnung (vgl. Tab. 3), so reduziert sich die Anzahl auf $69 - 3 = 66$. Frankenheims Angabe der "Kristallgattungen" stellte bis auf diese kleine Unkorrektheit eine höchst bewundernswerte und konsequente Vorform der Einteilung dar, die im modernen Sinne durch die *arithmetischen Kristallklassen* erzielt wird (vgl. Anhang, insbesondere Tab. 11). Natürlich geschah das ohne Bezug auf die arithmetische Äquivalenz von Raumgruppentypen — gab es für Frankenheim ja nicht einmal einen Anklang an die Idee der Raumgruppentypen — sondern als Ergebnis der Einteilung aller denkbaren Kristallformen und -strukturen nach dem Doppelkriterium der Punktsymmetrie (Kristallklasse) und der Grundform (Raumgittertyp).

Der Entwurf eines Konzepts des Raumsymmetriesystems, das beide Aspekte zu integrieren imstande gewesen wäre, wie wenig später etwa bei Bravais (vgl. §3.4), lag nicht in Frankenheims Reichweite. Und dennoch erreichte er eine erste, suggestive Verbindung der Klassifikationsprinzipien der dynamistischen (deutschen) mit denen der atomistischen (französischen) Strömung

der Kristallographie. Seine Vision, auch auf theoretischer Ebene durch das Symmetriekonzept eine Integration zu erreichen, blieb allerdings zunächst unbewiesen und als uneingeholtes Ziel der weiteren Erforschung überlassen.

2.6 Zur Rolle des dynamistischen Programms bei der Ausarbeitung elementarer Symmetriekonzepte und des Vektorraumbegriffs

Die Entwicklung des vom Dynamismus beeinflussten Forschungsprogramms der Kristallographie von Weiß bis Frankenheim bestätigt und erweitert die in der jüngsten Wissenschaftshistoriographie mehr und mehr anerkannte Beobachtung, daß diese philosophische Strömung in ihrer Hauptwirkungsphase zu Beginn des 19. Jahrhunderts keineswegs einen bloß retardierenden Einfluß auf die Entfaltung naturwissenschaftlicher Forschung gehabt hat. Dies wurde insbesondere für Elektrochemie, Elektromagnetismus und Teile der Biologie von verschiedenen Autoren nachgewiesen;²⁷ für die Kristallographie anerkennt Burke [1966] generell einen (positiven) Einfluß der Schellingschen Philosophie auf Weiß, während Fischer [1962, 1963] zwar anhand der Beziehung Fichte–Weiß die weltanschauliche Aufgeschlossenheit des jungen Weiß demonstriert, jedoch die Stärke des Mineralogen Weiß in dessen späterer relativer Distanzierung von der Naturphilosophie begründet sieht.

Soweit das möglicherweise für die empirische Seite von dessen Arbeiten gelten mag, sowenig wird eine solche Bewertung den theoretisch orientierten Forschungsbeiträgen von Weiß, insbesondere in Richtung Symmetrie und vektorieller Charakterisierung der Kräftesysteme, gerecht. Zwar wurde das "Symmetriegesetz" noch von Haüy in die Geometrie der atomistischen Kristalltheorie eingeführt, es besaß dort aber durch die morphologische Bindung an die Polyedergestalten der "Kerne" kaum die Möglichkeit für eine eigenständige Entfaltung zu einem geometrisch-mathematischen Grundbegriff der Kristallstruktur. Eine Änderung erfolgte mit der von der dynamistischen Auffassung geprägten Einführung der Achsensysteme in die Kristallographie durch Weiß. Diese wurden zum Schlüsselkonzept bei der Ausarbeitung der strukturellen Charakterisierung der Kristallformen sowohl vom Standpunkt der Punktsymmetrie aus (Kristallsysteme, Kristallklassen) als auch von dem des Rationalitätsprinzips (rationale Vektorräume). *Die dynamistische Philosophie hatte demnach einen bedeutenden Einfluß auf die Herausbildung derjenigen Hintergrundkonzepte und Fragestellungen der Kristallographie, die die Klärung des (Punkt-) Symmetriegesichtspunkts und des Rationalitätsprinzips möglich machten.* Sie wurde so zu einer wesentlichen Bedingung für die Ausarbeitung der Konzepte der Kristallsysteme (Weiß), der Kristallklassen (Frankenheim, Hessel), einem ersten Ansatz der Algebraisierung der Kristallsymmetrien (Frankenheim, J.G. Graßmann), der allgemeinen endlichen Punktsymmetriesysteme (Hessel) und des rationalen Vektorraums (J.G. Graßmann, Hessel) also einer ganzen Reihe geometrisch-struktureller Konzepte, die sich

auf längere Sicht als von besonderer mathematischer Bedeutung erweisen sollten.

Die Bedeutung der dynamistischen Philosophie blieb aber nicht auf diese unmittelbare Wirkung auf eines der beiden miteinander konkurrierenden Forschungsprogramme der Kristallographie beschränkt. Ähnlich wie das atomistische Programm auf Konstituierung und Weiterentwicklung des dynamistischen Einfluß nahm — besonders deutlich bei Weiß und Frankenheim — blieben die im letzteren ausgearbeiteten Konzepte, insbesondere die Verfeinerung des Symmetriebegriffs, nicht ohne Einwirkung auf das erstere (vgl. §3). Die so bewirkte Vertiefung des Symmetriestudiums in der Kristallographie förderte dann wiederum die explizite Einführung des Gruppenkonzepts in die Geometrie (vgl. §4). Insofern stellt sich der weiterwirkende Einfluß der dynamistischen Naturphilosophie auf die Konzeptbildung der geometrischen Kristallographie als Vermittlungsglied einer indirekten Wirkung auch auf die Mathematik dar.

Auch bei der Herausbildung des Vektorraumkonzeptes wurde der Einfluß der dynamistischen Kristallographie auf die Mathematik mehrfach gebrochen. Selbst wenn wir annehmen dürfen, daß die "geometrische Kombinationslehre" des Justus Günther Graßmann neben seinen äußeren Produkten im euklidischen Raum ein wesentlicher Ausgangspunkt für Hermann Graßmanns "Ausdehnungslehre" war, so blieb bekanntlich sogar die Rezeption der letzteren während des 19. Jahrhunderts äußerst schwach. Die Übernahme in den Kernbestand der Mathematik erfolgte erst nach einer breiteren Aufnahme in weitere Zweige der Naturwissenschaften (Elektromagnetismus, Mechanik), als sich im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts aktive mathematische Forschungszweige, insbesondere die Funktionalanalysis, herausbildeten, die sich dieses Konzept fruchtbringend aneignen konnten. Das führt auf eine andere Geschichte, die an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden kann;²⁸ festzuhalten bleibt hier jedoch, daß die vektoriellen Ideen der dynamistischen Kristallographie lediglich indirekt, zeitlich verzögert und abgeschwächt in die Mathematik hineinwirkten.

§3 Punkt- und Raumgittersymmetrien im atomistischen Programm der Jahrhundertmitte (A. Bravais)

3.1 Modernisierung des atomistischen Programms

Bis um die Jahrhundertmitte stand die französische Kristallographie unter dem dominierenden Einfluß der korpuskularen Theorie Haüys. Die Neigung der deutschen Kristallographen zu dynamistischen Hypothesen und die damit verbundene Kritik an Haüy wurde mehrere Jahrzehnte lang als unklar und wenig seriös angesehen. Besondere Kritik richtete sich dabei natürlich auf C. S. Weiß.¹ Die überwältigende Dominanz Haüys führte nach dessen Tode bis zu Beginn der 1840er Jahre zu einer relativen Stagnation der theoretischen Kristallographie in Frankreich, also gerade während jener Zeit, in der im deutschsprachigen Raum unter dem Einfluß dynamistischer Vorstellungen vektorielle und Punktsymmetriekonzepte erarbeitet wurden.² Ab etwa 1820 bis zu Beginn der 1840er Jahre veränderten sich unter dem Einfluß der Chemie auch die Auffassungen des Molekularaufbaus der kristallinen Materie, sodaß schließlich eine Anpassung der Haüyschen Theorie an die neueren Erkenntnisse der Chemie und der geometrischen Kristallographie erforderlich wurde [Melhado 1980; Mauskopf 1976; Schütt 1984].

Ein wichtiger Vertreter dieser Modernisierungsbestrebungen war *G. Delafosse* (1796–1878).³ In einem der Académie des Sciences vorgelegten Bericht schloß er sich zwar der Haüyschen Vorgehensweise an, von der äußeren Gestalt und den einschlägigen physikalischen Eigenschaften der Kristalle auf die innere Struktur des molekularen Aufbaus zurückzuschließen, aber er hielt Haüys Annahme der “molécules intégrantes” für eine “falsche Hypothese” (Delafosse 1840, 395), da sie ihm mit den zeitgenössischen chemischen Erkenntnissen über die Zusammensetzung der Moleküle aus Atomen unvereinbar erschien. Delafosse schlug stattdessen die abstrakte Konzeption einer gitterförmigen Anordnung der Moleküle vor, wie vor ihm schon Gauß und Frankenheim. Die Haüyschen “molécules soustractives” repräsentierten seiner Ansicht nach lediglich die *parallelepipedischen Konfigurationen*, aus denen die Kristallgitter aufgebaut sind (1840, 397; 1843, 649f.), die Grundformen Haüys die verschiedenen Typen von Gitterkonfigurationen (ebda., 396f.).

Da Haüys “Symmetriegesetz” durch Bezug auf die Grundformen (bzw. die “hypothetischen Kerne”) formuliert war und deren volle Symmetrie mit den Holoedrien der Weiß/Mohsschen Kristallsysteme übereinstimmten (vgl. §2.5 und §3.2), mußten die im Weißschen Programm als “Halb-” oder “Viertelflächner” identifizierten Kristalle im Haüyschen Programm als Anomalien erscheinen: sie stellten gegenüber dem allgemeinen Gesetz Ausnahmen mit

reduzierter Symmetrie dar. Delafosse wies auf ebensolche "Anomalien" (in dieser Bezeichnungsweise) etwa anlässlich der Beispiele Pyrit, Borazit, Turmalin und Quarz hin (Kristallklassen T_h , T_d , C_{3v} , D_3) (1840, 397ff.).

Delafosse stellte sich also ausdrücklich dem Problem der Hemiedrien, mit dem sich die dynamistischen Kristallographen in den vergangenen Jahrzehnten so erfolgreich beschäftigt hatten.⁴ Ihm erschien jedoch die dynamistische Konzeption, wie sie insbesondere von Weiß vertreten worden war, so unverständlich, daß er schlichtweg behauptete, die "deutschen Theorien (théories allemandes)" handelten nur von den äußeren Formen der Kristalle und enthielten keine Strukturtheorie (Delafosse 1843, 645, 659).⁵ Er war dagegen davon überzeugt, daß die atomistische Theorie so überarbeitet werden konnte, daß sie den scheinbaren Anomalien Rechnung trägt. Man müsse dazu nur das Häüysche "Symmetriegesetz" verfeinern, indem kongruente Teile der geometrischen Struktur des Kristallbaus ("*parties, déjà semblables de forme*") als nicht notwendig physikalisch äquivalent ("*physiquement identiques*") angesehen werden (ebda., 653f.). Diese Annahme führte ihn zur Hypothese eines Aufbaus der "integrierenden Moleküle" Häüys aus "physikalischen Molekülen (molécules physiques)", die der Gesamtkonfiguration eine Symmetriereduktion aufprägen können.

So versuchte er aus den erscheinenden Kristallformen einer Kristallart und ihren physikalischen Eigenschaften auf die "Symmetrie der ihr Molekül konstituierenden Gruppe von Atomen (symétrie du groupe atomique qui constitue sa molécule)" zu schließen (ebda., 399). Diese determiniere umgekehrt die Symmetrie der erscheinenden Gestalten, sowie — bei entsprechender Konstellation — die der physikalischen Eigenschaften des Kristalls, wie etwa die Pyroelektrizität.⁶

Bei der Anwendung dieses Prinzips einer gegenseitigen Ergänzung von Gitterkonfiguration und Molekülsymmetrie bei der Erklärung der verschiedenen Kristalleigenschaften (Spaltungsformen einerseits, erscheinende Kristallformen, elektrische und optische Eigenschaften andererseits) scheute er vor der Bildung prägnanter ad-hoc Hypothesen nicht zurück. So erklärte er etwa die sich in der "polaren" Eigenschaft der Pyroelektrizität äußernde "Anomalie" des Borazits (Kristallklasse T_d) dadurch, daß die physikalischen Moleküle reguläre Tetraeder mit gleicher Ausrichtung von Basis zu Spitze bilden (1840, 400); beim Quarz (Kristallklasse D_3) habe das rhomboedrische Molekül eine Verformung quer zu seiner Achse erlitten ("*a subi une sorte de distorsion ... perpendiculairement à son axe*"; ebda.) usw.

Bei aller Neigung zur ad-hoc Hypostasierung konkreter Polyederkonfigurationen für die physikalischen Moleküle enthielt Delafosses Beitrag einen sehr fruchtbaren Ansatz für eine Fortentwicklung der atomistischen Kristalltheorie über Häüy hinaus, ohne sich von diesem prinzipiell zu distanzieren. Er enthielt Ideen für eine Behebung der Anomalien des Häüyschen Symmetriegesetzes und paßte die Grundkonzepte der atomistischen Theorie an den

Stand der zeitgenössischen Chemie an. Für eine konsequentere Durchführung der von Delafosse vorgeschlagenen *Modernisierung des atomistischen Programms*, die eine allzu schnelle Bindung an Hypothesen über die konkreten Atomkonfigurationen in den physikalischen Molekülen vermied, war allerdings die Klärung dreier grundlegender Problematiken notwendig:

- die Präzisierung der überhaupt möglichen Symmetrietypen der Moleküle ohne Bindung an spezielle Polyederkonfigurationen (also die Klassifikation der Punktsymmetriesysteme),
- eine genauere Analyse des Zusammenhangs zwischen Gitterkonfigurationen und zugehörigen Grundformen
- und schließlich die Herausarbeitung der Prinzipien, nach denen Molekülsymmetrien und Gitterkonfigurationen bei der Bildung der Kristallstruktur zusammenwirken.

Alle drei Fragenkomplexe wurden von A. Bravais in drei aufeinander aufbauenden Arbeiten behandelt (1849b, 1850, 1851).

Auguste Bravais (1811–1863) studierte an der Ecole Polytechnique, wurde danach Marineoffizier, Teilnehmer an verschiedenen geographischen Expeditionen, Astronomiedozent und ab 1845 schließlich Professor der Physik an der Ecole Polytechnique [Birembaut 1970]. Gegen Ende der 1840er Jahre befaßte er sich mit Kristallographie und studierte dazu auch die zeitgenössischen deutsch- und englischsprachigen Arbeiten. Er kannte und zitierte Ergebnisse u.a. von Weiß, Miller und Frankenheim.⁷ Das unterschied ihn von Delafosse, der den Arbeiten der dynamistischen Strömung, insbesondere denen von Weiß selbst, mit großer Skepsis und deutlicher Ablehnung gegenüberstand und diese bestenfalls von ihren phänomenologischen Ergebnissen her zu akzeptieren bereit war (Delafosse 1843, 644f., 659). Bravais konnte so wesentliche Impulse aus dem Symmetriestudium der dynamistischen Richtung aufnehmen und erfolgreich in der Modernisierung der atomistischen Kristalltheorie einsetzen.

In der Tat gelang es Bravais, die ersten beiden dieser drei Problemfelder weitgehend aufzuklären. Die Bearbeitung des dritten führte ihn auf die Formulierung einer Theorie, die in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts eine mindestens vergleichbare, vielleicht sogar größere Bedeutung bekam als die Häüys in der ersten Hälfte. Bravais' Theorie trat darüberhinaus in eine äußerst fruchtbare Wechselbeziehung mit der zeitgenössischen Mathematik.

3.2 Bravais' Klassifikation der Punktsymmetrien

Bravais' erste größere Arbeit in diesem Kontext, sein "*Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique*" (1849b) war rein geometrischen Inhalts (wie auch die zweite — vgl. §3.3). So stellte er ähnlich wie Hessel — dessen Arbeit er allem Anschein nach nicht kannte⁸ — das allgemeine Symmetriestudium

der Entwicklung der eigentlichen kristallographischen Theorie voran. Gegenstand der Abhandlung war ein systematisches Studium der Symmetrien endlicher räumlicher Punktsysteme. Dabei faßte er ein solches Punktsystem als Eckenkonfiguration eines Polyeders auf und bezeichnete es dementsprechend als (abstraktes) "Polyeder" ((1849b, 21).

Auf solche verallgemeinerte "Polyeder" bezogen, erklärte er verschiedene Typen von Symmetrien durch Diskussion folgender *Symmetrieelemente* (1849b, 21ff.):

- Symmetriezentrum ("centre de symétrie" C) bei Punktinversion,
- Symmetrieachse ("ligne de symétrie" L , L' bzw. Λ) bei Rotationssymmetrie,
- Symmetrieebene ("plan de symétrie" P , P' oder Π) bei Spiegelungssymmetrie.

Die Notwendigkeit der Einführung von *Drehspiegelungen* bzw. zugehöriger eigener Symmetrieelemente *entging Bravais*.

Er charakterisierte die Symmetrieelemente durch geometrische Konstruktionsvorschriften für die Gewinnung des symmetrischen Bildes jeder der endlich vielen Ecken des Polyeders. Insofern arbeitete er explizit mit Abbildungen endlicher Punktmengen. Durch die allgemeine Angabe der Konstruktionsvorschrift war jedoch prinzipiell die Abbildung jedes beliebigen Punktes, beliebiger Raunteile und — in der Konsequenz — sogar des euklidischen Raumes selbst angedeutet. Ein Stück weit realisierte Bravais später diese Potentialität selber bei der Übertragung der Polyedersymmetrien auf die Raumgitter (1850). *Insofern enthielt die Angabe eines Symmetrieelementes bei Bravais die Andeutung einer zugehörigen Isometrie des euklidischen Raumes, bzw. bestimmter endlicher oder unendlicher Teilmengen, ohne diese jedoch als Abbildungen explizit zu thematisieren.*

Zur Beantwortung der Fragen nach sämtlichen Symmetrieelementen eines Polyeders entwickelte Bravais Ansätze eines systematischen Studiums des geometrisch-logischen Zusammenhangs verschiedener Symmetrieelemente untereinander. Insbesondere legte er dar, daß aus der Existenz zweier Symmetrieelemente in der Regel ein weiteres notwendig folgt und analysierte die Art dieser Verbindungen (Tab. 4). Sein Argument lief dabei in naheliegender Weise durch *Verkettung der beiden zugeordneten Symmetrieelemente* für die Eckpunkte des Polyeders und Nachweis der geometrischen Äquivalenz zur Operation, die einem (dritten) Symmetrieelement zugeordnet ist. In dieser Hinsicht war in seiner Argumentation der operationale Kern — und damit das implizit enthaltene Gruppendenken — wesentlich deutlicher herausgebildet als bei Hessel.

Ähnlich wie Hessel betrachtete Bravais die zu einem Symmetrieelement gehörenden Symmetrien, implizit also Untergruppen des betrachteten Punktsymmetriesystems; und in ähnlicher Weise verwies er bei der Diskussion von

Tabelle 4
Kombination von Symmetrieelementen bei Bravais

2 Symmetrieelemente	führen auf	(1849b, Satz)
P, C (auf P)	L durch C (orth. P)	4
P, P'	L im Schnitt von P, P' und falls $P \not\perp P'$ weitere P'', ...	5 7
P, L	L' und P', P'' ...,	8 9
L, L'	weitere L'', L''', ...	10

Symmetrieelementen “*derselben Art (de la même espèce)*” implizit auf Konjugationsklassen von Untergruppen. Eine “*Hauptachse (axe principale)*” führte er jedoch von der Methode her weniger “gruppentheoretisch” als Hessel ein (jedoch mit demselben Resultat), nämlich als Achse, die zu allen anderen Achsen und Symmetrieebenen orthogonal ist (1849b, 24). Da er den Achsenbegriff enger faßte als Hessel (Rotationsachse), gab es bei Bravais nicht-triviale Symmetrietypen ohne Achse, sodaß er eine Grobeinteilung der endlichen Punktsymmetrien in drei Typen erhielt: achsenlose, mit Hauptachse, “sphäroedrische” (mit Achsen aber ohne Hauptachse, d.h. Symmetriesysteme von regulären Polyedern).

In der weiteren Analyse ermittelte Bravais für jeden Symmetrietyp die Anzahl und geometrische Konfiguration konjugierter Symmetrieelemente. Er führte zu ihrer Angabe eine abkürzende Notation ein:

- L^k, Λ^k Achse, bzw. Hauptachse der Ordnung k ,
- C Inversionszentrum,
- P^k, Π^k Spiegelungsebene orthogonal zu einer Achse L^k bzw. Hauptachse Λ^k ,
- $qL^k, qL'^k, qP^k, qP'^k, \dots$ Konjugationsklassen von je q Symmetrieelementen des angegebenen Typs.

Damit gelang ihm eine Repräsentation eines Punktsymmetriesystems durch das “*Symbol der Polyedersymmetrie (symbole de la symétrie du polyèdre)*”, das die abkürzende Zusammenstellung aller Konjugationsklassen von Symmetrieelementen enthielt. Bei zyklischen und diedrischen Symmetrien mit Hauptachse gerader bzw. ungerader Ordnung aber desselben Schoenflies-Typs waren Bravais’ “Symbole” daher verschieden.

Beispiel: Diedersymmetrien

D_{2qh} symbolisiert durch $[\Lambda^{2q}, qL^2, qL'^2, C, \Pi, qP^2, qP'^2]$

D_{2q+1h} symbolisiert durch $[\Lambda^{2q+1}, (2q+1)L^2, \Pi, (2q+1)P]$

Durch die getrennte Aufzählung der 3 "achsenlosen" Symmetriesysteme

C_1	Bravaissymbol	$[0L, 0C, 0P]$
C_i	"	$[0L, C, 0P]$
$C_s = C_{1v} = C_{1h}$	"	$[0L, 0C, P]$

und die Aufspaltung der 7 Serien mit Hauptachse in je zwei hätte Bravais zusammen mit den 7 "sphäroedrischen" Systemen prinzipiell insgesamt $24(= 2 \times 7 + 7 + 3)$ "Klassen symmetrischer Polyeder (classes des polyèdres symétriques)" erhalten können. Ein Problem entstand jedoch bei der Schoenflies-Serie \tilde{C}_{2n} , da Bravais keine Drehspiegelungen als Symmetrieelemente eingeführt hatte. Lediglich für den Fall $n = 2q + 1$ gab es in Bravais' Zugang eine Darstellung, da hier eine Punktinversion auftritt und die Gruppe durch eine Inversionserweiterung aus einer zyklischen Gruppe ungerader Ordnung erzeugt werden kann ($\tilde{C}_{4q+2} = [\Lambda^{2q+1}, 0L^2, C, 0P]$). Ähnliches gilt jedoch nicht für den Fall $n = 2q$, d.h. die Teilserie \tilde{C}_{4q} ⁹

Das führte Bravais auf die nicht ganz vollständige Klassifikation der "symmetrischen Polyeder" in einer Liste, die zusammengefaßt die *unrichtige* Aussage ergibt von

"Theorem" 1 (Bravais 1849b, 61):

Es gibt 23 (!) "Klassen symmetrischer Polyeder", davon drei achsenlose, 13 mit Hauptachse (!), 7 sphäroedrische. Deren "Symbole" sind in Tab. 5 angegeben.

In dieser Form der "Klassen symmetrischer Polyeder" *erreichte Bravais eine fast vollständige implizite Klassifikation der endlichen orthogonalen Gruppen* im euklidischen Raum. Durch seine Charakterisierung der Symmetrieelemente durch Ansätze konstruktiv definierter Abbildungen von Punktsystemen, die Komposition von Symmetrieelementen, den Systemcharakter der Symmetriekonfiguration und durch seine Analyse "gleichartiger" (konjugierter) Symmetrieelemente trat die *Gruppenstruktur schon recht deutlich obwohl weiterhin implizit* in seiner Arbeit auf.

Die Frage nach den verschiedenen eckentransitiven Polyedertypen einer "Klasse" diskutierte er in der Form der minimalen Eckenzahl (implizit Mächtigkeit von Punktorbits) lediglich am Rande. In dieser Hinsicht hatte Hessel die Analyse der Beziehung zwischen Symmetrie und Gestalt im Sinne einer Klassifizierung der einfachen Gestalten (also der flächentransitiven Polyeder)

Tabelle 5
Bravais' 23 Klassen "symmetrischer Polyeder"

Klasse	Symbol der Symmetrie	entspricht	Minimalzahl Ecken			
			1.Orbit	2.Orbit	3.	4.
1	$0L, 0C, 0P$	C_1	1	1	1	1
2	$0L, C, 0P$	C_2	2	2	2	
3	$0L, 0C, P$	C_3	1	1	1	
4	$\Lambda^{2q}, 0L^2, 0C, 0P$	C_{2q}	$2q$	$2q$		
5	$\Lambda^{2q}, 0L^2, C, \pi$	$C_{2q,h}$	$2q$	$2q$		
6	$\Lambda^{2q}, qL^2, qL'^2, 0C, 0P$	D_{2q}	$4q$			
7	$\Lambda^{2q}, 0L^2, 0C, qP, qP'$	$C_{2q,v}$	$2q$	1		
8	$\Lambda^{2q}, qL^2, qL'^2, C, \pi, qP^2, qP'^2$	$D_{2q,h}$	$2q$	$0, 2q^*$		
9	$\Lambda^{2q}, 2qL^2, 0C, 2qP$	$D_{2q,d}$	$4q$			
10	$\Lambda^{2q+1}, 0L^2, 0C, 0P$	C_{2q+1}	$2q+1$	$2q+1$		
11	$\Lambda^{2q+1}, 0L^2, C, 0P$	C_{4q+2}	$4q+2$	$4q+2$		
12	$\Lambda^{2q+1}, 0L^2, 0C, \pi$	$C_{2q+1,h}$	$2q+1$	$2q+1$		
13	$\Lambda^{2q+1}, (2q+1)L^2, 0C, 0P$	D_{2q+1}	$4q+2$	$2q+1$		
14	$\Lambda^{2q+1}, 0L^2, 0C, (2q+1)P$	$C_{2q+1,v}$	$2q+1$	1		
15	$\Lambda^{2q+1}, (2q+1)L^2, C, (2q+1)P^2$	$D_{2q+1,d}$	$4q+2$	$4q+2$		
16	$\Lambda^{2q+1}, (2q+1)L^2, 0C, \pi, (2q+1)P$	$D_{2q+1,h}$	$2q+1$	$2q+1$		
17	$4L^3, 3L^2, 0C, 0P$	T	12			
18	$4L^3, 3L^2, C, 3P^2$	T_h	12			
19	$4L^3, 3L^2, 0C, 6P$	T_d	4			
20	$3L^4, 4L^3, 6L^2, 0C, 0P$	O	24			
21	$3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2$	O^*	6			
22	$6L^5, 10L^3, 15L^2, 0C, 0P$	I	60			
23	$6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15P^2$	I^*	12			

$$* \begin{cases} 2q & \text{für } q = 1 \\ 0 & \text{für } q > 1 \end{cases}$$

weitergeführt. Auf der anderen Seite war Bravais' Arbeit der Hesselschen in der Herausarbeitung der intensionalen Struktur des impliziten Gruppenkonzepts klar überlegen. Die Unvollständigkeit seiner klassifizierenden Liste tat dem kaum Abbruch.

3.3 Bravaisysteme, Raumgittertypen und ihre Isometrien.

Bravais' Analyse der "Polyedersymmetrien" war lediglich Voraussetzung und Ausgangspunkt für ein systematisches Studium ebener und räumlicher Gitter unter Symmetriegesichtspunkten, dessen Ergebnisse er schon Ende 1848 der Académie des Sciences vorgelegt hatte.¹⁰ Die Publikation erfolgte jedoch erst etwas später in Liouvilles Journal (Bravais 1850).

Er begann diese Arbeit mit einer geometrischen Beschreibung äquidistanter Punktreihen, von Netzen (2-dimensionalen Gittern) und räumlichen Gittern ("rangées, réseaux, assemblages de points"). Dabei diskutierte er die Möglichkeiten, ein Gitter auf verschiedenen Wegen zu erzeugen (äquidistante Punktreihe — durch Parallelverschiebung erzeugtes Netz — Raumgitter) und zeichnete Elementarzellen ("parallélogramme/parallélépipède générateur") und die durch Halbierung entstehenden Elementarsimplizes aus ("triangle/tetraèdre élémentaire") (1850, 7, 22, 54).

Die Punktreihen längs der durch den Ursprung gehenden Kanten eines Elementarsimplexes bezeichnete er als "konjugierte Punktreihen (rangées conjuguées)" (ebda., 7). Das war ein geometrischer Zugang zu den verschiedenen möglichen Basisdarstellungen eines Gitters, den er durch einen Nachweis der Konstanz des Flächeninhalts/Volumens der Elementarzellen ergänzte (ebda., 19ff., 42ff.). In naheliegender Weise¹¹ zeichnete er analog eine *Minimalbasis* ("triangle/tetraèdre principal") aus (ebda., 22, 54).

Die Wahl der Koordinatenachsen in "konjugierten Punktreihen" führte ihn auf die algebraische Beschreibung eines Gitters durch Koordinaten in \mathbb{Z}^2 bzw. \mathbb{Z}^3 (ebda., 8f., 36f.) und Koordinatenwechsel bezüglich verschiedenen Elementarzellen auf Matrizen aus $GL(3, \mathbb{Z})$ (ebda., 51f.). So näherte er sich von seiner Seite der von Gauß (1831) angedeuteten Beziehung zwischen der arithmetischen Reduktionstheorie quadratischer Formen und den geometrischen Gittern, indem er den Abstand zwischen zwei Gitterpunkten durch den Wert der quadratischen Form $\Theta(x, y, z)$ ausdrückte

$$d^2(P, P') = \Phi(x, y, z)$$

(x, y, z) Koordinatendifferenz von P, P' ¹²

Insbesondere stellte er die Beobachtung an, daß $\det\Theta = \text{Volumen einer Elementarzelle}$ und für $(m, n, l) \in \mathbb{Z}^3$, $\text{ggT}(m, n, l) = 1$

$$\Phi(m, n, l) = \text{Flächeninhalt der Elementarzelle einer Netzebene}^{13} \text{ orthogonal zu } l$$

(ebda., 110ff.).

Bravais verfolgte die Beziehung zwischen der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen bzw. Gitter und seiner geometrischen Theorie der Punktgitter selbst allerdings nicht weiter. Er ergänzte die genannten Bemerkungen lediglich noch um einen Hinweis auf Seeber (1831), der schon die "einzigartige Analogie (l' analogie singulière)" zwischen beiden Gesichtspunkten bemerkt habe (Bravais 1850, 113). Bravais zitierte dabei allerdings nur die Gaußsche Besprechung der Seeberschen Arbeit (Gauß 1831), in der dieser Aspekt hervorgehoben worden war.

Zentraler für den Zweck seiner Untersuchung war die Symmetrieanalyse ebener und räumlicher Gitter. Dabei entwickelte Bravais ein Konzept der Gittersymmetrien, das mit geometrischen Abbildungen zumindest der Gitterpunkte arbeitete. Er konzentrierte sich völlig auf den *geometrischen* Gesichtspunkt der (euklidischen) Isometrien eines Gitters. Die naheliegende Beschreibung der Punktsymmetrien eines Gitters durch ganzzahlige Matrizen nach dem Vorbild der an anderer Stelle von ihm gegebenen arithmetischen Darstellung von Koordinatenwechseln erwähnte er nicht einmal am Rande; eine arithmetische Betrachtung der Gittersymmetrien tauchte also bei ihm nicht ansatzweise auf.

Den geometrischen Gesichtspunkt der Selbstabbildungen eines Gitters arbeitete er dagegen deutlich heraus. Er verdoppelte ideell das Gitter zu zwei zunächst übereinanderliegenden Punktgittern Γ , Γ' und betrachtete dann Bewegungen von Γ' , bei festem Γ , bei denen Γ' wieder mit Γ zur Deckung kommt:

"Nous supposons (...), que dans le Réseau donné, existent deux Réseaux égaux, superposés Sommets sur Sommets, de manière à figurer un Réseau unique. L'un de deux Réseaux sera considéré comme invariable de position; mais l'autre pourra se mouvoir tout d'une pièce, soit par translation, soit par rotation." (Bravais 1850, 32)

Ähnlich argumentierte er unter Einschluß von Spiegelungen und Punkt-inversionen¹⁴ für räumliche Gitter (ebda., 57ff.). Bravais betrachtete dabei also ausdrücklich Operationen auf unendlichen, unbeschränkten Punktmen-gen. Die in der allgemeinen Konstruktionsbeschreibung potentiell enthaltene Abbildung des ganzen Raumes (bzw. der Ebene) war durch die Betrachtung

des Punktgitters andeutungsweise realisiert und lag nahezu greifbar vor Augen — explizit arbeitete Bravais jedoch lediglich mit einer Abbildung der Gitterpunkte selbst.

Bravais fixierte die Gittersymmetrien analog der Vorgehensweise bei den endlichen Polyedern durch Angabe von Symmetrieelementen. Dabei verwies er als weiteren wesentlichen Unterschied zu (1849a, b) auf das Auftreten unendlich vieler Symmetrieelemente, wie sie durch Konjugation mit Gittertranslationen entstehen:

“La symétrie du Réseau, suivant une direction déterminée, n’est jamais caractérisée par une axe unique, mais bien par un système d’axes parallèles, formant un système complet de Rangées parallèles entre elles, embrassant tous les Sommets du Réseau.” (Bravais 1850, 28)

Darüberhinaus registrierte er die Existenz von Symmetrieelementen, die nicht durch Gitterpunkte gehen und von ihm als *“Zwischenachsen, Zwischenebenen bzw. Zwischenzentren (axes, planes, centres intermédiaires)”* (ebda., 60ff.) bezeichnet wurden. Doch analysierte er deren Konstellation nicht im einzelnen. Das erschien ihm möglich wegen

Lemma 1 (Bravais 1850, 60ff., 94):

Zu jedem Symmetrieelement eines Gitters gibt es ein solches gleichen Typs (Drehachse, Spiegelungsebene, Inversionszentrum) in jedem Gitterpunkt.

Obwohl Bravais also die Gesamtheiten der Symmetrien eines Gitters betrachtete — und damit implizit die Isometriegruppen räumlicher Gitter, also spezielle Typen von Raumgruppen — konnte er auf deren extensionale Fixierung verzichten und sich auf eine Charakterisierung durch die Symmetrieelemente in Gitterpunkten konzentrieren. Im Ergebnis kam er so zu einer Betrachtung der Isometrien der Gitter unter dem Gesichtspunkt der Punktsymmetriesysteme:

“Si, par l’un des Sommets d’un Assemblage, on fait passer tous les axes et plans de symétrie qui lui sont propres, on pourra considérer l’Assemblage comme un polyèdre dont le centre est au Sommet que l’ont a choisi.” (ebda., 92; Hervorh. E.S.)

Das war eine anschauliche, abgeschwächte Formulierung der zugrundeliegenden gruppentheoretischen Bestimmung des orthogonalen Anteils K einer Raumgruppe G mit Translationsgitter Γ

$$G/\Gamma \cong K < O(3, \mathbb{R})$$

die ja auch für allgemeinere Raumgruppen als die von Bravais betrachteten möglich ist. Natürlich soll das nicht etwa heißen, daß Bravais explizit mit Isometriegruppen der Gitter arbeitete. Durch seine Charakterisierung der unendlichen Systeme von Symmetrieelementen eines Gitters kam er aber einer Fixierung der zugehörigen Gruppe in dieser Situation ähnlich nahe wie im Fall der Punktsymmetriesysteme (vgl. §3.2).

Ein wichtiger Baustein für die Analyse der Raumgitter war eine Symmetrieklassifikation der ebenen Netze. Dazu beobachtete Bravais zunächst, daß Spiegelachsen durch Netzpunkte wegen der stets vorhandenen Punktinversion immer in orthogonalen Paaren auftreten (ebda., 28). Daraus erhielt er leicht, daß "Hauptdreiecke" (Minimalbasen) von Netzen mit Spiegelsymmetrie rechtwinklig oder gleichschenkelig sind, und als Konsequenz weiter, daß an ebenen Gittern nur 2-, 4-, und 6-zählige Drehsymmetrien auftreten. Da in den beiden letzten Fällen stets Spiegelungen vorhanden sind, ergeben sich vom Standpunkt des Punktsymmetrietyps nur die 4 ebenen (Bravais-) *Gittersysteme* ("classes"), charakterisiert durch die Symmetrien C_2 , D_2 , D_4 , D_6 (eben monoklin, orthogonal, tetragonal und hexagonal).¹⁵

Darüberhinaus unterschied Bravais im orthogonalen System (Symmetrie D_2) zwei (durch "Zentrieren" auseinander hervorgehende) Unterfälle, je nachdem die Spiegelungsachse längs der Kante oder der Diagonale der zugehörigen Elementarzelle verläuft. Diese zwei *Typen* ("modes") des ebenen orthogonalen Systems ("classe") sind durch rechteckige bzw. rhombische Elementarzelle charakterisiert. Ohne die Unterscheidung zwischen System ("classe") und Typ ("mode") der Gitter hier näher zu beleuchten — das holte Bravais bei der Diskussion des räumlichen Falles nach, wo die Unterschiede markanter hervortreten — erhielt er so eine zweistufige Klassifikation der ebenen Punktgitter.

Lemma 2 (Bravais 1850, 29ff.):

- a) Bei den ebenen Gittern sind unter dem Gesichtspunkt der auftretenden Punktsymmetrien 4 Gittersysteme ("classes") zu unterscheiden: das monokline (C_2), das orthogonale (D_2), das tetragonale (D_4) und das hexagonale (D_6).
- b) Bei Berücksichtigung der Lage der Spiegelachsen im Gitter sind des weiteren im orthogonalen System zwei Gittertypen zu unterscheiden (Rechteck- und Rhombustyp), in den drei anderen Systemen gibt es jeweils nur einen Gittertyp (vgl. Tab. 6).

Beim Studium der Raumgitter erhielt Bravais zunächst eine Einschränkung der zulässigen Rotationssymmetrien, aus der Betrachtung der Basisparallelogramme einer Minimalbasis. Im allgemeinen führt die Ergänzung der 3

Tabelle 6
Bravais' Symmetrietypen ebener Netze

Hauptdreieck	Anzahl Spiegel-Achsen	minimale Elementarzelle	Symmetrie	Krist. Bez.
1 generisch	–	Parallelogramm	C_2	P
2 rechtwinklig ungleichschenkl.	2	Rechteck	D_2	R
3 gleichschenkl., ungleichseitig	2	Rhombus	D_2	D
4 rechtwinklig, gleichschenkl.	4	Quadrat	D_4	S
5 gleichseitig	6	$60^\circ/120^\circ$ -Rhombus	D_6	H

Gitterpunkte P, P', P'' , die aus P durch wiederholte Rotation um den Winkel β um eine Achse durch den Gitterpunkt O hervorgehen, zum Parallelogramm $PP'P''P'''$ auf einen Punkt P''' mit $d(O, P''') < d(O, P)$, was zur Minimalität von $d(O, P)$ im Widerspruch steht. Lediglich für 4 Werte von β ist das nicht der Fall. Diese Übertragung führte Bravais auf

Lemma 3 (Bravais 1850, 59f.):

Deckrotationen eines räumlichen Gitters sind nur zu den Ordnungen $q = 2, 3, 4, 6$ möglich.

Damit hatte er eine Einschränkung für die orthogonalen Symmetrien der Raumgitter erhalten, die mit Hessels Analyse der einschränkenden Wirkung des Rationalitätsprinzips für die kristallographisch zulässigen Systeme vom Resultat her übereinstimmte.

Für die weitere Untersuchung wertete Bravais die schon im ebenen Fall gemachte Beobachtung aus, daß das Auftreten gewisser Gittersymmetrien wiederum andere nach sich zieht; so besitzt etwa ein Gitter mit Drehachse gerader Ordnung stets eine dazu orthogonale Spiegelungsebene, aus der Existenz zweier Achsen der Ordnung 3 ("ternäre Achsen") folgt stets die Existenz zweier weiterer in Tetraederkonstellation und darüberhinaus sogar aller Symmetrieelemente des Würfels (Holoedrie O^*) usw. Eine Analyse der Konsequenzen, die das Auftreten einer der zulässigen Rotationssymmetrien bzw.

Tabelle 7
Die 7 Bravais'schen Gittersysteme

Name	Bravais		Modern	
	Minimal- symmetrie	Symmetriesymbol	Min.	Hol.
1 Terquaternär (isometrisch)	$[2L^3]$	$[3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2]$	T	O^*
2 Senär (hexagonal)	$[\Lambda^6]$	$[\Lambda^6, 3L^2, 3L'^2, C, \pi, 3P^2, 3P'^2]$	C_6	D_{6h}
3 Quaternär (tetragonal)	$[\Lambda^4]$	$[\Lambda^4, 2L^2, 2L'^2, C, \pi, 2P^2, 2P'^2]$	C_4	D_{4h}
4 Ternär (trigonal)	$[\Lambda^3]$	$[\Lambda^3, 3L^2, C, 3P^2]$	C_3	D_{3d}
5 Terbinär (orthorhombisch)	$[\Lambda^2, L^2, L'^2]$	$[\Lambda^2, L^2, L'^2, C, \pi, P^2, P'^2]$	D_2	D_{2h}
6 Binär (monoklin)	$[\Lambda^2]$	$[\Lambda^2, C, \pi]$	C_2	C_{2h}
7 Asymmetrisch (triklin)	$[0L]$	$[0L, C, 0P]$	C_1	C_i

(vgl. Anhang 2, Tab. 10)

zulässiger Kombinationen von ihnen (*Minimalsymmetrie*) für das betrachtete Gitter hat, führte Bravais auf die Einteilung der Raumgitter in 7 *Systeme*, oder wie er sich ausdrückte "Klassen (classes)" der Symmetrie.

Theorem 2 (Bravais 1850, 65ff.):

Die Raumgitter unterteilen sich nach dem Punktsymmetriegesichtspunkt wie in Tab. 7 angegeben in 7 Gittersysteme ("classes"). Das heißt, jedes Raumgitter besitzt eine der dort angegebenen holoedrischen Punktsymmetriesysteme ("Symmetriesymbole"). Zu jedem Gittersystem gibt es eine charakteristische Minimalsymmetrie, bei deren Vorliegen ein Gitter schon sämtliche Symmetrien der zugehörigen Holoedrie besitzt.

Die holoedrischen Punktsymmetrien (die Gruppen der orthogonalen Decktransformationen) der Bravais'schen Gittersysteme stehen in erstaunlich treffender Übereinstimmung mit den Symmetrien der Weiß/Mohsschen Kristallsysteme. Bravais konnte darin eine Bestätigung der Fruchtbarkeit des Modernisierungsansatzes der atomistischen Kristalltheorie sehen, auf die er in seinen "Etudes Cristallographiques" (1851) weiter aufbaute (vgl. §3.4).

Er ließ es allerdings nicht bei der Grobklassifikation der Gitter nach ihrem Punktsymmetrietyp bewenden, sondern führte analog dem zweidimen-

sionalen Fall, aber genauer als dort, den *Raumgittertyp* oder, in seiner Terminologie, die “Art der Symmetrie (mode de symétrie)” als verfeinertes Äquivalenzkonzept ein:

“Deux Assemblages de la même classe appartiennent à des modes distincts de symétrie, lorsqu’en faisant varier d’une manière continue les espacements des Sommets de l’un des Assemblages, sans qu’il perde un seul instant ses axes de symétrie, on ne peut, malgré cela, le rendre que partiellement superposable avec l’autre Assemblage. Tel sont, par exemple, l’Assemblage dérivant du cube, et celui dérivant du cube centré (Bravais 1850, 95).”

Er arbeitete also mit folgender

Definition:

Zwei Raumgitter Γ , Γ' desselben Gittersystems, also derselben (maximalen) orthogonalen Symmetrie $H < O(3, \mathbb{R})$, gehören genau dann *demselben Raumgittertyp* an, wenn es eine stetige 1-Parameterschar von Gittern $\Gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, mit zugehöriger Schar der orthogonalen Symmetrien $H(t)$ gibt, sodaß $\Gamma(0) = \Gamma$, $\Gamma(1) = \Gamma'$, $H(t) = H$ für alle $0 \leq t \leq 1$.

Diese Idee der Deformierbarkeit zweier Gitter ineinander, ohne dabei die Bedingung konstanter orthogonaler Holoedrie zu verletzen, erlaubte Bravais, die ihm wohl bekannte (1850, 94) Frankenheimsche Andeutung einer Unterordnung der “Grundformen” unter den Symmetriegesichtspunkt zu präzisieren. Durch eine Analyse, auf welche Weise in jedem Gittersystem (“classe de symétrie”) Raumgitter durch Übereinanderanordnung ebener Netze gebildet werden können, und unter Berücksichtigung möglicher Äquivalenz im Sinne des Raumgittertyps (“mode de symétrie”) erhielt er:

Theorem 3 (Bravais 1850, 65ff.):

Es gibt 14 Raumgittertypen, wie in Tab. 8 aufgelistet.

Bravais’ Ziel der Klassifikation der Raumgitter unter Symmetriegesichtspunkten war damit erreicht.

Zwar war für Bravais’ Einteilung der Gitter in 7 Systeme (“classes”) das Symmetriekonzept endlicher Polyeder ausschlaggebend, d.h. Bravais’ implizite Charakterisierung endlicher orthogonaler Gruppen; und doch war ihm, wie wir schon sahen, völlig klar, daß die Symmetrien der Gitter ein wesentlich umfangreicheres, tatsächlich sogar unendliches, System bilden (s.o.). So

Tabelle 8
Bravais' "Arten der Symmetrie" von Gittern (Gittertypen)

Bravaissystem	char. Gitterzelle	int. Not.	
1/1	Terquaternär	Würfel	23P
1/2		innenzentrierter Würfel	23I
1/3		flächenzentrierter Würfel	23F
2	Senär	(60°/120°) rhombisches Prisma	3P
3/1	Quaternär	quadratisches Prisma	4P
3/2		innenzentr. quadr. Prisma	4I
4	Ternär	(60°/120°) rhombisches Prisma mit doppelt zentrierter Diagonale	3R
5/1	Terbinär	rechteckiges Prisma	222P
5/2		innenzentr. Prisma	222I
5/3		rhombisches Prisma	222C
5/4		innenzentr. rhomb. Prisma	222F
6/1	Binär	parallelogrammatisches Prisma	2P
6/2		innenzentriertes parallelogrammatisches Prisma	2I, 2B etc.
7	Asymmetrisch	generisches Parallelepipiped	P

(vgl. auch Tab. 3 und Anhang 2, Tab. 10)

erweiterte er die Bedeutung der zunächst für die endlichen Polyeder eingeführten "Symmetriesymbole" anlässlich der Angabe der Gittersymmetrien:

"Il importe de remarquer qu'ici les lettres C, A, L, II, P, ... (Kontext von Tab. 7; E.S.), représentent non pas un seul point, ou une seule ligne, ou un seul plan, comme cela a lieu dans les polyèdres à nombre limité de sommets, mais bien un système de points, ou un système d'axes tous parallèles, ou un système de plans pareillement tous parallèles entre eux." (Bravais 1850, 94)

Zusammen mit seinen Andeutungen über Deckbewegungen der Gitter, Inversionszentren und Spiegelungsebenen lag darin nun unter dem Gesichtspunkt der verfeinerten Klassifikation der Gitter in 14 Raumgittertypen ("espèce de symétrie") eine *implizite Charakterisierung der 14 Isometriegrup-*

pen der Raumgittertypen, als den im gewissen Sinne einfachsten und auffälligsten der kristallographischen Raumgruppentypen

$$G_i = \text{Isom}(\Gamma_i), \quad 1 \leq i \leq 14,$$

mit $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{14}$ (Repräsentanten der) Raumgittertypen.

Bei orthogonaler Holoedrie $H(\Gamma_i)$ von Γ_i also

$$G_i \cong \Gamma_i * H(\Gamma_i) \quad \text{semidirekt.}^{16}$$

$$\text{speziell also: } G_1 \cong \mathbb{Z}(23P) * O^*$$

$$G_2 \cong \mathbb{Z}(23I) * O^*$$

...

$$G_{14} \cong \mathbb{Z}(P) * C_1$$

Bravais' Integration des Symmetriegesichtspunktes mit dem der Gitterstruktur der Kristalle begann also, zu einem bis dahin noch nicht beachteten Typ impliziter geometrischer Gruppen hinzuführen.

3.4 Bravais' kristallographische Theorie und die implizite

Verwendung von 71 der 73 symmorphen Raumgruppentypen

In der abschließenden Arbeit seiner kristallographischen "Trilogie", den "*Etudes Cristallographiques*" von 1851 arbeitete Bravais eine auf die mathematischen Studien der ersten beiden Arbeiten (1849b, 1850) aufbauende systematische *Kristallstrukturtheorie* aus, die die von der dynamistischen Tradition entwickelten Symmetriekonzepte mit dem atomistisch interpretierten Gitterkonzept verband und das Delafossesche Programm weitgehend ausfüllte. Darüberhinaus führte ihn diese Theoriebildung auch auf die Fortentwicklung seiner Symmetriebetrachtungen, d.h. zu einer Erweiterung seines in (1850) begonnenen impliziten Studiums kristallographischer Gruppen.

Bravais' kristallographische Grundannahmen stimmten weitgehend mit denen von Delafosse überein. Die chemische Isomerie, also die Existenz chemisch unterschiedlicher Verbindungen derselben Summenformel, sah er als Beleg für einen räumlichen Aufbau der Moleküle aus den Atomen in wohlbestimmten Polyederkonfigurationen an ("*polyèdres moléculaires*") (1851, 102); und mit Delafosse ging er davon aus, daß sich die Moleküle bei der Kristallisation so anordnen, daß die *Schwerpunkte ein räumliches Punktgitter* bilden (ebda., 102f.). Dabei schloß er aus der Hypothese des polyedrischen Aufbaus der Moleküle, daß die gitterbildenden Molekularkräfte kein isotropes System bilden und sich ein Molekül daher nur in bestimmten Lagen an eine schon gebildete Grenzfläche anschließen kann (ebda., 194f.). Eine Schlüsselfrage seiner

Kristallstrukturtheorie war daher die nach der Art der *Beziehung zwischen den Symmetrien des Moleklpolyeders und des zugehörigen Raumgitters*. Erst als ein Resultat dieser Beziehung trat bei ihm das Konzept der Kristallklasse auf.

Bravais sah nämlich keinen Grund für die Annahme, daß die Symmetrie der Molekülpolyeder in jedem Falle schon mit der des Raumgitters verträglich sein muß (d.h. in dessen Isometriegruppe enthalten ist). Seine Theorie ließ stattdessen Molekülpolyeder beliebiger Symmetrie zu, etwa vom "Symbol" S_p — Bravais' Charakterisierung einer endlichen orthogonalen Gruppe. Die Auswahl der Raumgitterkonfigurationen, in denen Moleküle der Symmetrie S_p kristallisieren können, regulierte Bravais in seiner Theorie durch zwei Hypothesen:

Postulat 1 (Bravais 1851, 206):

Kristallisierende Moleküle einer gegebenen Substanz werden von den sieben Gittersystemen dasjenige annehmen, dessen Symmetrie eine maximale Anzahl gemeinsamer Symmetrieelemente mit der Eigensymmetrie ihres Moleklpolyeders besitzt.

Postulat 2 (ebda., 208ff.):

Im Falle nicht eindeutiger Auswahl durch Postulat 1 zwischen Gittersystemen mit verschiedenen Anzahlen freier metrischer Parameter wird ein System höchster Parameterzahl angenommen.¹⁷

Postulat 2 stellte sicher, daß ein Molekül gegebener Symmetrie (um ein Beispiel zu nennen, etwa C_2) nicht in einem Gitter "zu hoher" Symmetrie kristallisiert (im Beispiel isometrisch, tetragonal, orthorhombisch), sondern in einem Gitter der höchstmöglichen, mit der Molekülsymmetrie verträglichen Allgemeinheit (im Beispiel monoklin). Postulat 2 definierte also in der Form einer *Generizitätsannahme*, was bei Kombination von Molekülsymmetrien und Gitter bei letzterem gegebenenfalls als Scheinsymmetrie anzusehen ist (im Beispiel wäre das etwa der Fall, wenn die Parameter des monoklinen Gitters zufällig solche Werte annähmen, daß sich eine kubische Elementarzelle ergäbe).

Unter Verwendung der Notation S_a für das "Symmetriesymbol" des Gitters ("assemblage") und S_c für die *gemeinsamen Symmetrieelemente* von S_p und S_a ("commun") interpretierte Bravais S_c als Symbol eines unter dem Gesichtspunkt der Kristallbildung dem Molekülpolyeder "*äquivalenten Polyeders (polyèdre équivalent)*" (ebda., 216). Ausführlich analysierte er für sämtliche seiner 23 "Klassen" von Polyedersymmetrien, in welchem Gittersystem die Kristallisation nach seiner Hypothese erfolgen müsse und was jeweils das

“äquivalente Polyeder” der gemeinsamen Symmetrie S_c ist (ebda., 209–217, Tableau VIII, 272ff.).

Diese “äquivalenten Polyeder” repräsentierten nun die *Kristallklassen* der dynamistischen Theorie — oder genauer 31 von ihnen. Die sphenoidale Klasse \bar{C}_4 war von Bravais ja in dieser Weise nicht darstellbar (vgl. §3.2), trat also in (1851, Tab. VIII) nicht auf. Lediglich im Vorbeigehen wurde sie von Bravais als eine Anomalie unter dem “Symbol” $[\Lambda^2, 0C, 0P]^4$ erwähnt, deren Existenz dieser sehr wahrscheinlich Frankenheims Liste der Kristallklassen entnommen hatte, ohne ihr aber eine größere Bedeutung beizumessen.¹⁸

Die ältere und bedeutendere “Anomalie” der älteren atomistischen Theorie, das Auftreten *hemiedrischer Kristallsymmetrien*, konnte von Bravais dagegen leicht durch die Konstellation $S_c < S_a$ erklärt und damit behoben werden (ebda., 218, 220). Auch konnte er nun problemlos die Frankenheim-Graßmannsche Permutationssymbolik an die atomistische Theorie assimilieren.

So gab Bravais für jedes seiner Systeme — unter explizitem Hinweis auf (Frankenheim 1842) — Permutationstabellen zur Darstellung der Flächenäquivalenz bezüglich jedes Symmetrieelements an, das im “Symbol” des betreffenden Systems auftritt (Bravais 1851, 223ff., 275ff.).¹⁹ Dadurch waren die Permutationstabellen zu jeder Kristallklasse des Systems und damit die Flächenorbits bestimmbar. Das lieferte eine Grundlage für die Bestimmung der einfachen Kristallgestalten, bei der allerdings noch zusätzlich geometrisch-kombinatorische Gesichtspunkte einzubeziehen sind. Bravais stützte sich dabei auf entsprechende Angaben von Frankenheim (ebda., 235ff.).²⁰ Zum Abschluß der Arbeit gab er Beispiele in der Natur auftretender Kristalle für 11 sicher identifizierte meriedrische Kristallklassen an, sowie einige weitere unter Vorbehalten.²¹

Konnte schon für den zeitgenössischen mathematischen Leser die Parallele zwischen den Permutationsgruppen der Algebra und den Kristallklassen (den Symmetrien der “äquivalenten Polyeder”) durch die Verwendung der Frankenheim-Graßmannschen Permutationstabellen offensichtlich werden, so stellt sich Bravais’ Vorgehen im Nachhinein als ein schönes Stück werdender, impliziter Gruppentheorie dar. Die Frage nach den zulässigen Kombinationen der Molekülpolyeder mit den Raumgitterstrukturen erweist sich nach der Art ihrer Beantwortung durch Symmetriegesichtspunkte als eine *in geometrische Konfigurationsanalyse gekleidete implizite Frage nach der semidirekten Erweiterbarkeit räumlicher Gittergruppen durch endliche orthogonale Gruppen*. Sie führte Bravais auf die Raumsymmetriesysteme vom Typ der symmorphen Gruppen der Kristallographie (vgl. Anhang).

In der Reduktion eines beliebigen Molekülpolyeders auf das “äquivalente Polyeder” (d.h. beim Übergang von einer beliebigen endlichen orthogonalen

Gruppe auf eine maximale Untergruppe vom Typ der Kristallklassen) enthielt Bravais' Vorgehensweise einen Hinweis darauf, daß nicht alle endlichen orthogonalen Gruppen sondern nur die 32 Kristallklassen für die Erweiterung von Translationsgittern in Frage kommen. Die Generalisierungsannahme von Postulat 2 lieferte Bravais darüberhinaus die Möglichkeit eventuell vorhandene überschüssige Symmetrien des Gitters zu identifizieren und auszuschließen. Sie lieferte ihm ein Kriterium zur Erkennung möglicher Scheinsymmetrien des Gitteranteils eines Raumsymmetriesystems und vermied eventuelle Doppelzählungen (vom Standpunkt affiner Äquivalenz).

Dagegen erzwang Postulat 2 keine eindeutige Zuordnung von Kristallklassen zu Gittersystemen. Wie vom Standpunkt der Erweiterungstheorie zu erwarten, ließ Bravais die Zuordnung der Molekülsymmetrien $S_c = C_3, C_{3i}, C_{3v}, D_3, D_{3d}$ sowohl zu Gittern des trigonalen als auch des hexagonalen Systems zu (1851, 273ff.). Er listete so in einer resumierenden Tabelle explizit 36 zulässige Zuordnungen von Kristallklassen zu Gittersystemen auf; eine fehlte ihm aus den bekannten Gründen ($S_4 = \bar{C}_4$ im tetragonalen System) (1851, Tafel VIII, 272–274).

Liest man die Tafel auf dem Hintergrund der verfeinerten Einteilung der Gitter in Raumgittertypen von (1850), so enthält sie einen deutlichen, wenn auch nicht in sämtliche Einzelfälle ausdrücklich aufgefächerten, impliziten Hinweis auf die möglichen semidirekten Erweiterungen von Raumgittern durch orthogonale Gruppen, oder — in Bravais' Sprache — einer Übersicht, welche Kristallklassen auf welche Raumgittertypen "bezogen" werden können ("se rapportent").

Auf diese Weise deuteten Bravais' Arbeiten (1850, 1851) *71 von 73 symmorphen Raumgruppentypen* an, die in natürlicher Weise als semidirekte Erweiterungen von Raumgittern durch endliche orthogonale Gruppen entstehen (mit Ausnahme der zwei mit \bar{C}_4).²² Eine Fortsetzung seiner Analyse in Richtung einer Vertiefung und Präzisierung dieses Hinweises lag Bravais jedoch fern; dazu fehlte ihm der geeignete begriffliche Hintergrund, der symbolische Apparat und das wissenschaftliche Motiv. Für die von ihm unmittelbar verfolgten Zwecke war seine Symbolik und die von ihm erreichte Mathematisierungstiefe der auftretenden Symmetrien völlig ausreichend.

Für die Kristallographie lieferte Bravais' Theorie eine großartige Integration von Symmetriegesichtspunkten in das modernisierte atomistische Programm. Die Einteilung der Kristalle nach Kristallklassen und ehemaligen "Grundformen", nunmehr Raumgittertypen, fand eine markante theoretische Fundierung. Gleichzeitig verschob seine Theorie die Bedeutung der Einteilung in "Systeme" von einer Grobklassifizierung der Kristallklassen (dem Standpunkt des Weißschen Programms) zu einer Grobklassifizierung nach der Gittersymmetrie; d.h. in unserer Terminologie, sie *ersetzte die Einteilung nach Kristallsystemen durch die Einteilung nach Gittersystemen* [Brown e.a. 1978, 16f.].

Daß diese Verschiebung gewisse, wenn auch nur geringe Konsequenzen auf der extensionalen Ebene der klassifizierten Symmetriekonstellationen nach sich zog, hätte sich prinzipiell für Bravais an denjenigen Fällen zeigen können, in denen seine Postulate 1, 2 keine eindeutige Zuordnung eines "äquivalenten Polyeders" zu einem Gittersystem lieferten. Das waren gerade die Fälle der Kristallklassen des trigonalen Systems (C_3 , D_3 , C_{3i} , C_{3v} , D_{3d}). Deren zugehörige "Molekülpolyeder" konnten nach Bravais' Hypothese sowohl im trigonalen, als auch im hexagonalen Gittersystem kristallisieren (Bravais 1851, Tab. VIII).²³

Es gibt jedoch keinen Hinweis darauf, daß Bravais dieser Konsequenz der doppelten Zuordnung in irgendeiner Weise seine Aufmerksamkeit gewidmet hätte. Dazu gab es für ihn kaum einen Anlaß, waren ja große Teile des von Weiß ausgehenden Programms, beziehungsweise von dessen Ergebnissen, in seine Theorie integriert. Das Festhalten an einer Einteilung in Kristallsysteme jener Tradition wäre Bravais vermutlich als Beharren auf einzelnen Elementen eines weitgehend integrierten und damit überholten Programms erschienen.

Bravais' Arbeiten (1849b, 1850, 1851) markierten einen bedeutenden Einschnitt innerhalb der mathematischen Kristallstrukturtheorie des 19. Jahrhunderts. Aufgrund ihrer Klarheit und guten Zugänglichkeit — insbesondere im Vergleich zu (Frankenheim 1826, Hessel 1830) — sowie der Tiefe ihrer weiterführenden Ergebnisse regten sie andere Wissenschaftler zur Fortführung des mathematischen Symmetriestudiums an.

So wurde etwa *A. F. Möbius* (1790–1868), der sich zunächst mit den Symmetrien der Weißschen Kristallsysteme (1849) beschäftigt und eine an Permutationen orientierte Notation zum Studium von Punktsymmetriekonfigurationen entwickelt hatte, von Bravais (1849b) zu einer Untersuchung symmetrischer Figuren angeregt (Möbius 1851). Umfangreiche nachgelassene Manuskripte — zum größten Teil aus den Jahren 1848 bis Anfang 1852 — belegen, daß Möbius zunächst an einen Ausbau seines Ansatzes zu einer auf Permutationssymbolik gestützten "Theorie der symmetrischen Figuren" dachte (Möbius 1886a). Aus verschiedenen Gründen erreichten seine Studien aber trotz verschiedener Anläufe einer Bearbeitung in der 1850er Jahren (genauer Anfang 1852 und 1857) und späterer Ergänzungen zu Anfang der 1860er Jahre keine Publikationsreife [Reinhardt 1886, 188]. Sie könnten jedoch dazu beigetragen haben, daß F. Klein als Herausgeber von Möbius' Gesammelten Werken, Band 2ff., sich in der Mitte der 1880er Jahre wieder für die mathematische Kristallographie zu interessieren begann und A. Schoenflies auf diese Problematik orientierte (vgl. §§4.3, 5.3).

Allerdings war der Möbiussche Ansatz zu diesem Zeitpunkt durch die zwischenzeitlich erfolgte Einführung des geometrischen Gruppenbegriffs schon methodisch überholt. Bravais' Arbeiten hatten durch ihre anregende Wirkung auf Jordan dazu beigetragen, daß um die Wende von den 1860er zu den 1870er Jahren der Gruppenbegriff in der Geometrie explizit gemacht wurde.

§ 4 Die Einführung des Gruppenbegriffs in die Geometrie

4.1 Gruppen vor und in den 1860er Jahren

Bekanntlich entstand der allgemeine Gruppenbegriff im Laufe des 19. Jahrhunderts aus der gegenseitigen Anregung und Verbindung dreier verschiedener großer Strömungen: dem Studium von Permutationssystemen in der Algebra, den implizit gruppentheoretischen Ansätzen der Zahlentheorie und aus der Betrachtung abgeschlossener Transformationssysteme der Geometrie. Wir können dazu auf die ausführliche Studie H. Wußings [1969] verweisen und uns hier bezüglich der ersten beiden Punkte auf ein kurzes Resümee beschränken; der dritte wird hingegen, dem Thema der vorliegenden Arbeit gemäß, eingehender diskutiert werden müssen.

Die Verwendung von Permutationen reichte bis weit in das 17. und 18. Jahrhundert zurück — wenn man die chinesische Mathematik mit einbezieht, sogar noch weiter. Sie dienten zunächst lediglich als symbolisches Hilfsmittel bei der Lösung linearer und algebraischer Gleichungssysteme und später bei den Versuchen der Resolventenkonstruktion für algebraische Gleichungen vom Grad > 3 . Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts wurden sie hingegen selber nicht Gegenstand algebraischer Untersuchungen, die über kombinatorische Fragen hinausgingen, obwohl durchaus — insbesondere in den Studien Lagranges (1772/1773) — ein gutes Stück implizites Gruppendenken entwickelt wurde. Erst in den Arbeiten Ruffinis (1799), Abels (1829) und Galois' (1830, 1831, 1832) trat der Systemcharakter der Komposition von Permutationen hervor und wurde zum Schlüssel der Analyse der Auflösbarkeitbedingungen von Gleichungen [Wußing 1969, 58ff., 69ff., 73ff.]. Konzeptionell hatte das zur Folge, daß die auftretenden Systeme von Permutationen nicht als abstrakte Permutationsgruppen behandelt wurden, sondern in einer strukturreichen Kontextbindung standen, in der sie *durch Vertauschung von Wurzeln einer algebraischen Gleichung und die induzierten Operationen auf den daraus gebildeten rationalen Termen implizit schon als Automorphismengruppen algebraischer Körpererweiterungen auftraten.*

Permutationen wurden erst mit einer Serie von Arbeiten Cauchys in den 1840er Jahren, eröffnet von dessen Mémoire (1844), als n -Tupel (“arrangements”) und Abbildungen (“permutations/substitutions”) zu eigenständigen, kontextunabhängigen Objekten mathematischen Studiums. In Verbindung mit der expliziten Betrachtung unter Komposition abgeschlossener Gesamtheiten (“système de substitutions conjuguées”) bildete sich nunmehr ein kleines Forschungsprogramm zu diesem Thema heraus [Wußing 1969, 62ff.]. *Das*

Studium von Permutationsgruppen wurde an Ausbreitung und Tiefe durch die mit Beginn der 1850er Jahre langsam einsetzende Aufnahme und Ausarbeitung der Ideen Galois' gefördert, die durch die Publikation wichtiger nachgelassener Schriften (Galois 1831 u.a.) im Jahre 1846 ermöglicht wurde — international insbesondere in Italien und Deutschland (Betti 1852; Kronecker 1853, 1856; Dedekind 1856) und natürlich auch in Frankreich (Liouville, Hermite, Bertrand, Serret u.a.), wo etwa zehn Jahre später auch die ersten ausführlichen Publikationen zu diesem Thema erschienen (Serret 1866; Jordan 1865, 1867 u.a.). In diesem Rahmen wurde nun ausdrücklich auch das kontextunabhängige Studium der Permutationsgruppen weitergeführt, das dennoch gleichzeitig an die Galoistheorie als einen bedeutenden, sich entfaltenden Teilzweig der zeitgenössischen Algebra angebunden blieb [Wußing 1969, 87ff.; Scharlau 1981].

Auch in der Zahlentheorie waren gruppentheoretische Denkweisen bis zu diesem Zeitpunkt zur Explizitheit herangereift. Ansätze dieser Art gingen schon auf Euler zurück, der in seiner Theorie der Potenzreste (1758/59) implizit die Ordnung von Untergruppen der multiplikativen Gruppe der Restklassen mod p betrachtet hatte [Weil 1983, 189ff.]. Gauß führte diese Untersuchung in Richtung einer Bestimmung der Erzeugenden einer zyklischen Gruppe weiter [Wußing 1969, 34ff.]. Darüberhinaus argumentierte er auch bei der Untersuchung der Kreisteilungsgleichung und bei der Komposition binärer quadratischer Formen implizit gruppentheoretisch (Gauß 1801).

Die Komposition von Äquivalenzklassen quadratischer Formen war einer der ersten Fälle einer deutlichen, obgleich noch impliziten, gruppentheoretischen Argumentation mit endlichen, nicht durch Permutationen dargestellten, unter Komposition abgeschlossenen Systemen. Als Kummer in (1845) deren formale Analogie mit der Komposition "idealer komplexer Zahlen" (Idealklassen) herausstellte, wurde die gruppentheoretische Natur dieser Komposition (als abelsche Gruppe) weiter hervorgehoben, sodaß Dedekind (1856, 63) auf die weiter greifende Analogie zwischen (kommutativen) Permutationsgruppen und der Komposition von Klassen binärer quadratischer Formen hinweisen konnte. Es erscheint so vielleicht nicht als verwunderlich, daß der erste erfolgreiche Axiomatisierungsschritt zur Fixierung des Begriffs einer endlichen abelschen Gruppe durch Kronecker (1879) schließlich aus diesem Kontext heraus erfolgen sollte [Wußing 1969, 45f.].

Zwar hatte Cayley schon in (1854) einen Vorstoß zu einer abstrakten Definition einer Gruppe als endliche oder abzählbare "Menge von Symbolen (sets of symbols)" samt assoziativer Komposition mit Einselement gemacht, bei der die Multiplikation mit jedem Element eine Bijektion der Gesamtheit liefert. Dabei hatte er die strukturelle Parallele der Operation in Permutationsgruppen mit der Matrizen- und Quaternionenmultiplikation im Auge. Obwohl man um die Jahrhundertmitte herum auch beim Studium der linearen Substitutionen in n Veränderlichen von verschiedenen Seiten auf Systeme

gruppentheoretischer Natur stieß — etwa bei der Transformation homogener Formen (Eisenstein 1844) oder den Monodromietransformationen von Lösungen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten (Riemann 1857/1876) — lag Cayleys Vorstoß von den substantiellen Beobachtungen und Problemen wichtiger Forschungsprogramme der Mathematik noch zu weit entfernt und war zu sehr dem Konzept der britischen “symbolischen Algebra” der ersten Jahrhunderthälfte verbunden, als daß er Chancen auf eine zügige allgemeine Aufnahme unter den zeitgenössischen Mathematikern gehabt hätte.¹

Schließlich trat ab den 1840er Jahren auch in der Geometrie an verschiedenen Stellen verstärkt implizites Gruppendenken auf: bei der Fixierung unterschiedlicher Abstraktionsstufen der Geometrie durch Auszeichnung eines bestimmten Typs von Transformationen (“Verwandtschaften”), darüber hinaus in der mathematischen Kinematik und in den Symmetriestudien der Kristallographie.

In der projektiven Geometrie hatte Poncelet (1822) den Gesichtspunkt der Invarianz geometrischer Eigenschaften unter Perspektivitäten (“homothétie”) herausgestellt. Das bedeutete allerdings noch keineswegs die implizite Ausarbeitung von Gruppenmethoden; er hatte es nicht einmal als nötig erachtet, die hier vom Standpunkt der Äquivalenz eigentlich naheliegende Invarianzforderung auch ausdrücklich auf allgemeine projektive Kollineationen als Komposition mehrerer Perspektivitäten zu verallgemeinern. Das geschah erst im Rahmen der weiteren Systematisierung der projektiven Geometrie durch Möbius (1827), Steiner (1832) u.a., wobei Möbius gleich eine ganze Hierarchie von “Verwandtschaftsbeziehungen” — implizit durch Auszeichnung von Transformationsgruppen definiert — zur Charakterisierung der verschiedenen Zweige der Geometrie hinzufügte [Wußing 1969, 26ff.].

Dazu trat in der euklidischen Geometrie der Beginn einer systematischen Charakterisierung von Bewegungen durch Zusammensetzung von Drehungen und Translationen (Chasles 1830, Rodrigues 1840, Poincaré 1851). Schon Euler hatte gezeigt (1758, §2; 1765, §690), daß sich jede euklidische Bewegung aus einer Rotation und einer Translation zusammensetzen läßt; aber erst Rodrigues entwickelte daraus die Charakterisierung der Gruppe der eigentlichen euklidischen Isometrien [Gray 1980]. Diese wurde von Poincaré (1851) so weit vereinfacht, daß die Struktur von $\text{Isom}^+(E^3)$ als semidirektes Produkt aus Rotationen und Translationen in geometrischer Form implizit, aber deutlich hervortrat. Daneben gab es Bestrebungen zur Entwicklung eines angepaßten algebraischen Kalküls zur Behandlung der Komposition von Rotationen des euklidischen Raumes, um die langwierigen Rechnungen mit Eulerschen Winkeln zu vereinfachen. Das führte Cayley (1845) und Hamilton (1847) schon Mitte der 1840er Jahre zur Spindarstellung der euklidischen Rotationen durch Einheitsquaternionen.

Dazu kamen die in der Kristallographie betrachteten Symmetriesysteme, also der 32 Kristallklassen, deren Studium bis zu einer impliziten Charakterisierung aller endlichen Untergruppen von $O(3, \mathbb{R})$ geführt hatte, sowie von 71 eigentlich diskontinuierlichen Untergruppen von $\text{Isom}^+(\mathbb{E}^3)$. J.G. Graßmann (1829, 1833) und M.L. Frankenheim (1826, 1842) hatten dabei sogar schon 6 holoedrische beziehungsweise alle 32 Kristallklassen mittels erweiterter Permutationssysteme, also im zeitgenössischen Sinne algebraisch, dargestellt (siehe §§2, 3).

Insgesamt waren also in der Geometrie um die Jahrhundertmitte implizit verschiedene Transformationsgruppen im Gebrauch ($SO(3, \mathbb{R})$, $\text{Isom}^+(\mathbb{E}^3)$, $GL(n, K)$ und $\text{PSL}(n, K)$ mit $n = 2, 3$ und $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) oder angedeutet worden ($\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$, $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ mit $n = 2, 3$), und daneben in der mathematischen Kristallographie verschiedene endliche orthogonale und andeutungsweise sogar einige (symmorphe) kristallographische Raumgruppen. Darüberhinaus waren aus den verschiedensten Richtungen herkommend auch die strukturellen Analogien zwischen den impliziten Gruppen in der Geometrie und denen der Algebra/Zahlentheorie kurz nach der Jahrhundertmitte recht vielfältig und stellenweise so eng, daß ihre explizite Herausarbeitung uns nachträglich nur noch als eine Frage der Zeit, des Anlasses und — natürlich — einer geeigneten Ausführung erscheinen kann.

Die Symmetriesysteme der Kristallographie waren als Anlaß und Formulierungshilfe dafür besonders geeignet, da ihr bekannterer Teil aus endlichen Gruppen bestand, die sogar schon durch Permutationssymbolik dargestellt worden waren. Der andere Teil, die Bravais'schen Symmetriesysteme räumlicher Gitter, konnten aufgrund endlicher Erzeugung gewissermaßen als Brücke dienen, um die zunächst recht groß erscheinende begriffliche Distanz zwischen den endlichen Gruppen der Permutationslehre und den unendlichen, kontinuierlichen Transformationsgruppen der Geometrie zu überwinden. Sie wurden Auslöser einer Arbeit C. Jordans über Bewegungsgruppen, in der der Gruppenbegriff zum erstenmal *expressis verbis* in die Geometrie eingeführt wurde.

4.2 Jordans Klassifizierung der Bewegungsgruppen des euklidischen Raumes

Camille Jordan (1838–1921) hatte an der Ecole Polytechnique und der Ecole des Mines studiert und war zunächst wie die Mehrzahl der Polytechniciens als Ingenieur im Staatsdienst tätig geworden, bevor er sich durch seine ersten Arbeiten zur Galoistheorie (1865, 1867) und zur Flächentopologie (1866a, b) als erstrangiger forschender Mathematiker hatte ausweisen können und — zunächst weiter als Staatsingenieur angestellt — nach Paris versetzt wurde.² In den 1860er Jahren lag sein Arbeitsschwerpunkt in der Ausarbeitung der Galoisschen Ideen und der zugrundeliegenden Theorie der Permutations- und (linearen) Substitutionsgruppen.

Als ehemaligem Studenten der Ecole des Mines war ihm Bravais' kristallographische Theorie bekannt. So fiel ihm bei seiner Beschäftigung mit der Galoisschen Theorie die Analogie zwischen Galois' Charakterisierung der Auflösbarkeitsbedingungen algebraischer Gleichungen durch Permutationsgruppen und Bravais' Charakterisierung der Struktur kristallographischer Molekülsysteme durch ihre Symmetrien auf. Um diese herauszuarbeiten, übertrug Jordan den bis dahin in seiner expliziten Verwendung auf Permutationen/Substitutionen eingeschränkten Gruppenbegriff in die Geometrie und formulierte das Konzept der (euklidischen) Bewegungsgruppe. Dies war das Thema seines "Mémoire sur les groupes des mouvements" (1869), in dem Jordan sich zum Ziel setzte, alle Typen von Bewegungsgruppen des euklidischen Raumes bis auf affine Konjugation zu klassifizieren, seien sie nun kontinuierlich wie im allgemeinen in der Kinematik oder diskontinuierlich wie in der Kristallographie.

Schon bei der Formulierung seines Problems verwies Jordan auf die Bedeutung der Kristallographie als Ausgangspunkt seiner Arbeit. Er beschrieb es nämlich außer in Gruppenterminologie auch als Klassifikationsproblem aller möglichen Lagesysteme, die ein Molekül mit gegebener Ausgangsstellung und "Orientierung" durch Operation der Gruppe annehmen kann. So gab er die in seiner Arbeit behandelte Fragestellung in zwei Varianten an:

1. *Former tous les groupes possibles des mouvements.*
2. *Former toutes les manières possibles des systèmes de molécules superposables à eux mêmes dans diverses positions.*" (Jordan 1869, 232)

Und er *verwies ausdrücklich auf Bravais' Arbeiten*, die er hier zu verallgemeinern dachte:

"C'est sous le second point de vue que Mr. Bravais a étudié cette question: les cas particuliers qu'il a traité et dont il a fait une remarquable application à la cristallographie sont les plus importantes." (ebda.)

Trotz dieser hohen Bewertung von Bravais' Erfolgen fuhr Jordan fort:

"Je crois néanmoins qu'il y a aujourd'hui quelque intérêt à traiter le problème dans toute sa généralité." (ebda.)

Jordans Zurückhaltung hinsichtlich einer eventuellen kristallographischen Relevanz seiner Studie war verständlich, lag doch sein *Augenmerk hauptsächlich auf mathematischen Fragestellungen*:

- einer expliziten Fassung des Begriffs der Bewegungsgruppe,
- einer Unterscheidung kontinuierlicher und diskontinuierlicher Gruppen sowie einer Grobklassifikation der Bewegungsgruppen in “Kategorien” gemäß ihrem rotativen Anteil,
- einer gruppentheoretischen Auswertung des kinematischen Konzepts der Schraubenbewegung durch Bildung von Gruppenerweiterungen von Translationsgruppen durch Rotationsgruppen mit — implizit — nicht-trivialem Faktorensystem
- und schließlich der Angabe von 174 “Arten (espèces)” von Bewegungsgruppen.

Unter Rückgriff auf das der Algebra entlehnte Gruppenkonzept integrierte er also in seiner Arbeit Rodrigues’ und Poinsofs Analyse der räumlichen Bewegungen als Schraubungen und deren Komposition mit den Ergebnissen des Symmetriestudiums der Kristallographie.

Jordans *explizite Forderung an eine Bewegungsgruppe* war, daß es sich um eine Gesamtheit von Bewegungen (Schraubungen) des euklidischen Raumes handelt, die unter Komposition abgeschlossen ist (1869, 231). Er forderte also lediglich die Eigenschaften einer Halbgruppe, setzte aber darüberhinaus stillschweigend auch die Existenz der Eins sowie des Inversen (“mouvement égal et contraire”) zu jeder Bewegung voraus; die Assoziativität war durch die Natur der Operationen gesichert.³ Er nahm den Standpunkt der Erzeugung einer Bewegungsgruppe aus endlich vielen Bewegungen ein, ließ dabei aber auch “unendlich kleine” Bewegungen zu. Stillschweigend ging er darüberhin aus von folgender strikter Alternative aus:

- entweder besitzt eine Bewegungsgruppe infinitesimale Erzeugende
- oder nicht; dann besitzt sie in jeder 1-Parameteruntergruppe ein erzeugendes Element von minimalem Translationsbetrag bzw. Rotationswinkel (1869, 235f., 238 etc.).

Auf diese Weise schloß er Gruppen, die weder kontinuierlich (d.h. Liegruppen) noch diskret sind (als Untergruppen von $\text{Isom}^+(\mathbb{E})$) — wie etwa Translationsgruppen isomorph \mathbb{Q} oder Rotationsgruppen isomorph \mathbb{Z} — aus und erzwang eine *strikte Dichotomie kontinuierlich-diskret* der von ihm betrachteten Bewegungsgruppen.

Jordan berechnete die Komposition zweier Schraubenbewegungen $A_{r,t}$ und $A'_{r',t'}$ längs der Geraden A, A' mit Rotationen um die Winkel r, r' und Translationen vom Betrag t, t' im Stile Poinsofs unter impliziter Ausnutzung der semidirekten Produktstruktur von $\text{Isom}^+(\mathbb{E}^3)$.⁴ Daraus entwickelte er verschiedene gruppentheoretische Gesichtspunkte. So formulierte er

Lemma 1 (Jordan 1869, 235):

Bei Konjugation einer Schraubenbewegung mit einer anderen ergibt sich eine "ähnliche" Schraubenbewegung. Genauer:

$$A'_{r',t'} \cdot A_{r,t} \cdot A'^{-1}_{r',t'} = A''_{r,t}$$

mit $A'' = A'_{r',t'}(A)$.

Und er zeigte sich erfreut über die Analogie dieser Beobachtung zum Verhalten von Permutationen, wo die Konjugation auf "ähnliche" Zykeldarstellungen führt.⁵

Aus der Kompositionsregel für Schraubenbewegungen las er ab, daß sich die rotativen Anteile der Schraubungen unabhängig von der Lage der Achsen A, A' und den Translationsanteilen zusammensetzen (1869, 234). Diese Beobachtung war eine geometrische Formulierung für den mit der semidirekten Produktstruktur verbundenen Homomorphismus

$$\text{Isom}^+(E^3) \xrightarrow{\psi} SO(3, R)$$

$$A_{r,t} \longmapsto B_{r,0} \quad \text{mit } B \parallel A \text{ durch einen festen Punkt } 0$$

Jordan nützte dies zu einer Grobklassifikation der Bewegungsgruppen gemäß ihres rotativen Anteils und teilte die Gruppen G je nach $\text{Bild}(\psi)$ in 6 "Kategorien (*catégories*)" ein (1869, 246f.).⁶

Seine Feinklassifikation erfolgte in 174 "Arten (*espèces*)" wobei eine "Art" sowohl die *Äquivalenzklassenbildung durch affine Konjugation* (entsprechend dem Übergang zum Raumgruppentyp) umfaßte als auch naheliegende *Serienbildung* einschloß. So bildeten z.B. alle zyklischen Rotationsgruppen C_n ($n \in \mathbb{N}$) die "10. Art", die Diedergruppen D_n die "12. Art", die aus einer endlichen Translation $A_{0,t}$ ($=: \tau$) und Drehung um dieselbe Achse $A_{(2\pi/n),0}$ erzeugten Gruppen $(\mathbb{Z}(\tau) \oplus C_n, n \in \mathbb{N})$ die "20. Art" usw. Aufgrund seiner Dichotomie kontinuierlich-diskret konnte Jordan die reinen Translationsgruppen nun nach der Anzahl k ($0 \leq k \leq 3$) der unabhängigen infinitesimalen, sowie der Anzahl m ($0 \leq m \leq 3 - k$) der unabhängigen endlichen Erzeugenden klassifizieren. So erhielt er 9 "Arten" von Translationsgruppen (1869, 235–237).⁷ Auf ähnliche Weise erhielt er 8 "Arten" reiner Rotationsgruppen.⁸

Der größte Teil seiner Arbeit bestand dann in der *Analyse, welche Translationsgruppen durch welche Rotationsgruppen zu erweitern sind*. Das war die gruppentheoretisch mathematisierte und verallgemeinerte Form von Bravais' Untersuchung, welche Molekülpolyeder zu welchen Gittertypen "passen". Jordan konnte also auf Bravais' Ergebnisse über Symmetriekonfigurationen von Netzen und Gittern sowie die Bestimmung der Gittertypen zurückgreifen,

ohne noch einmal die gesamten Bravaisschen Überlegungen ausführen zu müssen. Dadurch wurde seine Klassifikation der Gruppen mit 2 oder 3 endlichen Translationserzeugenden überhaupt erst möglich.

Er ging aber in der betrachteten Art der Erweiterung entscheidend über Bravais hinaus, der ja — implizit — lediglich mit *semidirekten* Produkten von Gitter und Rotationsgruppe gearbeitet hatte (vgl. §§3.3, 3.4). Jordan ließ nämlich als Repräsentanten des rotativen Anteils in der Bewegungsgruppe G nicht allein reine Rotationen zu, sondern auch solche Schraubenbewegungen, die mit der betrachteten Translationsgruppe Γ verträglich sind, d.h. diese bei Konjugation in sich überführen.

Das war ein völlig neuer Aspekt in Jordans Arbeit, der über die historisch äußerst bedeutsame, mathematisch aber zu diesem Zeitpunkt recht naheliegende explizite Übertragung des Gruppenbegriffs in die Geometrie merklich hinausging. *Jordan zeigte nämlich eine implizite, in geometrischer Form ausgesprochene Einsicht in die Struktur von Gruppenerweiterungen.* Seine Realisierung des rotativen Anteils einer Bewegungsgruppe durch Schraubenbewegungen entsprach implizit einer Diskussion von Erweiterungen der Translationsgruppe Γ durch eine Untergruppe G_o von $SO(3, \mathbb{R})$ mit nichttrivialem Faktorensystem — eine Problematik, die erst etwa 60 Jahre später von Otto Schreier (1926, 1928) allgemein und explizit geklärt wurde (vgl. auch Anhang).

Die für die Erweiterung notwendige Angabe eines Homomorphismus $\varphi : G_o \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$ war wie im Fall der semidirekten Erweiterungen durch die Verträglichkeitsforderung für G_o mit Γ in natürlicher Weise gesichert. Die Angabe von Schraubenbewegungen $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_k$ für Erzeugende ρ_1, \dots, ρ_k von G_o (im Fall endlicher Erzeugender) entsprach der Konstruktion einer Erweiterung der Translationsgruppe Γ durch G_o mit nichttrivialem Faktorensystem. In der Jordanschen geometrischen Formulierung äußerte sich das dadurch, daß Relationen zwischen den Erzeugenden

$$R(\rho_1, \dots, \rho_k) = 1$$

bei den zugeordneten Schraubenbewegungen auf eine Translation $R(\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_k)$ aus Γ führen.⁹

*Jordans Einsicht in die Struktur der auftretenden Erweiterungsbedingungen zeigte sich darin, daß er Art und Anordnung der Schraubenbewegungen in streckenweise verwickelten Falldiskussionen so bestimmte, daß diese Bedingungen stets erfüllt waren.*¹⁰

Sein Ergebnis war eine Liste von 174 "Arten" von Bewegungsgruppen, darunter über 50 kontinuierliche, 5 endliche¹¹ und 59 eigentlich diskontinuierliche mit relativ kompaktem Fundamentalbereich (also kristallographische). Die übrigen "Arten" listeten diskontinuierliche Gruppen ohne rela-

tiv kompakten Fundamentalbereich auf. Darunter befanden sich unter anderem 16 Gruppen, die bei Einschränkung ihres Operationsbereiches auf eine Ebene diskontinuierlich und mit beschränktem Fundamentalbereich operieren, also 16 der 17 ebenen Ornamentgruppen. Lediglich eine der beiden \mathbb{Z}^2 -Erweiterungen von D_3 , in moderner Notation $P3m1$, war Jordan entgangen (vgl. §5.4, Anm. 43).

Hinzu traten in der Liste verschiedene Doppelnennungen,¹² deren Auftreten bei der von Jordan geleisteten Pionierarbeit kaum verwunderlich erscheint. Ebensowenig kann überraschen, daß Jordans Liste nicht ganz vollständig war. So fehlten 6 von den insgesamt 65 eigentlichen Bewegungsgruppentypen der Kristallographie.¹³ Die anderen 59 traten jedoch — teilweise in verschiedenen Erzeugungsweisen mehrfach angegeben — explizit auf.

Jordans Arbeit beinhaltete in zweifacher Hinsicht einen begrifflichen Durchbruch für das Symmetriestudium der Kristallographie. Die bei Bravais nur implizit angedeuteten *Raumsymmetriesysteme der Kristallographie wurden durch den Gruppenbegriff operationalisiert und präzisiert*. Allerdings galt das durch Jordans Einschränkung auf die eigentlichen Bewegungen zunächst nur für 23 der bei Bravais implizit auftretenden 71 semidirekten Produkte.¹⁴ Hinzu trat die *Entdeckung von 39 Produkten mit nichttrivialem Faktorensystem, also völlig neuen "verwickelten" Symmetrietypen*, die Bravais aufgrund der Verwendung eines vom mathematischen Standpunkt aus zu einfachen Modells einer Überlagerung von Molekül- und Gittersymmetrien nicht einmal hatte erahnen können.

Jedoch blieb die unmittelbare Bedeutung der Jordanschen Arbeit für die Kristallographie zunächst gering. Der größere Teil ihres Inhalts war ausschließlich von mathematischem Interesse; und Jordan hatte sich nicht einmal die Mühe gemacht, die kristallographisch relevanten Gruppen in irgendeiner Weise gegenüber den anderen hervorzuheben. Ganz im Gegenteil nivellierte seine großzügige Beschreibung der Aufgabenstellung der Arbeit durch Angabe von "Lagesystemen von Molekülen" (auch für den kontinuierlichen Fall!) den grundlegenden Unterschied zwischen den kristallographischen und nichtkristallographischen, insbesondere kontinuierlichen, Bewegungsgruppen scheinbar hinweg. Welcher Anhänger einer atomistischen Materieauffassung aber hätte bereit sein können, etwa den Orbit eines Pfeils unter einer kontinuierlichen Gruppe ernsthaft als Mathematisierung eines "Molekülsystems" zu akzeptieren?

Die kristallographische Bedeutung der Jordanschen Bewegungsgruppenklassifikation konnte daher lediglich indirekt, nach einem Ausbau des Raumgruppengesichtspunkts mit ausdrücklicher Orientierung auf die Spezifika der Kristallographie, hervortreten (vgl. §5). Mathematische Auswirkungen stellten sich dagegen wesentlich schneller ein, da die explizite Übertragung des Gruppenbegriffs in die Geometrie auf gut vorbereiteten Boden fiel.

4.3 Zum Einfluß des Jordanschen Mémoires bei der Herausbildung des Transformationsgruppenkonzepts durch S. Lie und F. Klein

Etwa zur Zeit, als Jordans Mémoire (1869) erschien, begann *Sophus Lie* (1842–1899) in enger Kooperation mit *Felix Klein* (1849–1925) bei der Untersuchung von Fragen der projektiven Geometrie Gruppengesichtspunkte zu berücksichtigen. Lie und Klein hatten seit ihrer ersten Begegnung im Weierstraßschen Seminar in Berlin während des Wintersemesters 1869/70 eine enge Zusammenarbeit entwickelt, die über die Zeit ihres gemeinsamen Aufenthalts in Paris (April bis Mitte Juli 1870), später über briefliche Korrespondenz und weitere Treffen in Düsseldorf (Dezember 1870) und Göttingen/Erlangen (September/Oktober 1872) anhielt.

In dieser Zeit formulierten sie das allgemeine Konzept einer geometrischen Transformationsgruppe und entwickelten verschiedene, sich gegenseitig ergänzende programmatische Ideen zu deren Untersuchung (Lies Klassifikation kontinuierlicher Transformationsgruppen) oder zur Verwendung als strukturelle Leitidee der Geometrie (Kleins "Erlanger Programm"). Nach Kleins Antritt der Erlanger Professur im Oktober 1872 schlugen Lie und Klein in ihrer wissenschaftlichen Entwicklung jedoch unterschiedliche Richtungen ein (Klein Ms XXII G)¹⁵.

Im Austausch Lie-Klein war Lie häufig der Lieferant neuer Ideen, während Klein seinen Anteil später selber wesentlich darin sah, zu deren Formulierung und Einordnung in die geometrischen Forschungsprogramme Plückers oder Clebschs beigetragen zu haben (ebda.).¹⁶ Auch die Herausbildung des Konzepts der Transformationsgruppe verlief zwischen den beiden jungen Mathematikern in einer Weise, die diesem — von Klein selber geteilten¹⁷ — Bild entspricht. In unserem Zusammenhang ist dabei insbesondere von Interesse, ob beziehungsweise in welcher Weise Jordans Mémoire (1869) für die beiden Protagonisten des Transformationsgruppenkonzepts Bedeutung gewann.

Lies erste implizite, aber schon deutliche Verwendung des Transformationsgruppengesichtspunktes stammt aus einer in Berlin verfaßten, von F. Klein endformulierten¹⁸ Arbeit über den "Reyeschen Linienkomplex" (Lie 1870). Lie betrachtete hier in der Plückermannigfaltigkeit $M_4^{(2)} \subset P(5, \mathcal{C})$ von Geraden des projektiven Raums $P(3, \mathcal{C})$ ¹⁹ den durch Schnitt mit einer weiteren Quadrik ausgezeichneten "Reyeschen Linienkomplex" $R = M_3^{(2,2)} \subset M_4^{(2)}$ samt allen Kollineationen, die R invariant lassen,

$$\begin{aligned} G_R &:= \text{Koll}(P(5, \mathcal{C}); R) \\ &:= \{\psi \mid \psi \in \text{Koll}(P(5, \mathcal{C})), \psi(R) = R\} \\ &\subseteq \text{Koll}(P(5, \mathcal{C})) = \text{PGL}(5, \mathcal{C}) \end{aligned}$$

Er beobachtete, daß G_R aus einer "dreifach unendlichen Anzahl homographischer (projektiver; E.S.) Transformationen" besteht und — in Gruppenterminologie übersetzt — G_R transitiv frei auf R operiert. Nun zeichnete

er gewisse Kurven C_R in R aus ("Komplexkurven"), auf deren Gesamtheit G_R wiederum frei operiert. Seine Idee war dann, einen Orbit $G_R(C_R)$ — eine "Gattung von Komplexkurven" in seiner Terminologie — als eine weitere Darstellung des "Reyeschen Komplexes" aufzufassen, d.h. zu einer neuen Art von Elementen des Raumes, eben "Komplexkurven", überzugehen.

Wie F. Klein bemerkte,²⁰ gibt es in R andererseits auch Kurven, die durch eine "einfach unendliche Anzahl" von Transformationen aus G_R in sich überführt werden. Daran knüpfte eine während des Juni 1870 in Paris gemeinsam geschriebene Arbeit (Klein/Lie 1870) an, die Kurven beziehungsweise Flächen mit "une infinité de transformations" beziehungsweise "un nombre doublement infini de transformations linéaires" in sich betrachtete — also in späterer Formulierung Kurven beziehungsweise Flächen mit kontinuierlichen Transformationsgruppen der Dimension 1 beziehungsweise 2. Lie und Klein benützten die hier studierte transitive Gruppenoperation auf einer Kurve (oder Fläche) zur Auszeichnung invarianter Eigenschaften unter den beteiligten Transformationen, eventuell in Relation zu einem anderen geometrischen Objekt oder einer ganzen Klasse von Objekten (Klein/Lie 1870, 422ff.). Darin deutete sich einer der Grundgedanken des späteren "Erlanger Programms" an.

In ihrer zweiten gemeinsamen Arbeit, die im Winter 1870/71 einige Monate nach ihrem Paris-Aufenthalt entstand, kamen sie noch einmal auf dasselbe Thema zurück und vertieften es (Klein/Lie 1871). Unter Bezug auf (Serret 1866) und (Jordan 1870) wiesen sie nun ausdrücklich auf die Abgeschlossenheit der von ihnen betrachteten "Systeme von Transformationen" unter Komposition und die Parallele zu den Substitutionsgruppen der Algebra hin (Klein/Lie 1871, 430 Anm.). So stand diese Arbeit am Beginn eines Übergangs zu einem expliziten Transformationsgruppenkonzept, allerdings noch ohne Herausbildung einer charakteristischen Fachterminologie und noch ganz im speziellen Kontext.

Klein verwendete neben der Sprechweise "System von Transformationen" bis weit in das Jahr 1871 hinein synonym wahlweise auch "Schar linearer Transformationen", "Zyklus von Transformationen" oder einfach "Transformationszyklus" (Klein 1871, 1872a);²¹ und auch Lie verwendete bis kurz vor Ende seiner im Winter 1870/71 und im Frühjahr 1871 erstellten, in zwei Teilen publizierten Doktordissertation (Lie 1871a, b) noch keine Gruppenterminologie.

Wir wollen uns im folgenden etwas näher mit den Umständen befassen, unter denen Lie beziehungsweise Klein die Gruppenterminologie schließlich übernahmen und dabei insbesondere die Frage im Auge behalten, ob und in welcher Weise Jordans Mémoire (1869) dabei eine Rolle spielte. Lie nahm, wie schon angedeutet, die Gruppenterminologie erst in seiner Doktorarbeit auf — allerdings *nicht* im Hauptteil der Arbeit, sondern in einem an die eigentliche Arbeit angehängten letzten Paragraphen der Dissertation.²² Erst dort *führte*

er im nachhinein die neue Terminologie der Transformationsgruppe ein. Dabei nahm er ausdrücklich auf Jordans Mémoire Bezug und schlug vor, dessen Fragestellung der Klassifikation von euklidischen Isosometriegruppen auf projektive Gruppen zu verallgemeinern:

“Es läßt sich eine Aufgabe stellen, alle Gruppen linearer Transformationen anzugeben. Ich sage dabei, dass eine kontinuierliche oder diskontinuierliche Schar von Transformationen eine Gruppe bildet, wenn die Kombination einiger dieser Transformationen jedesmal mit einer Transformation der gegebenen Schar äquivalent ist. Herr Jordan hat insbesondere alle Gruppen von Bewegungen bestimmt.”
(Lie 1871b, 208f.)

Lie fuhr dann mit einer Bemerkung fort, daß (und warum) das hier angedeutete Programm einer Klassifikation aller Transformationsgruppen der projektiven Räume die Jordansche Klassifikation als Spezialfall umfassen würde.

Diese Stelle ist in zweifacher Hinsicht bemerkenswert. Zum einen enthält sie die erste Andeutung des später von Lie verfolgten Programms einer Klassifikation der Transformationsgruppen, das dieser erst in (1874) ausführlicher formulierte und dann — auf kontinuierliche eingeschränkt — zum Gegenstand einer Serie wichtiger Arbeiten aus den 1870/1880er Jahren machte (Lie 1874, 1876a, b, 1878a, b, 1880 u.a.).²³ Zum anderen stellt die hier von Lie verwendete Sprechweise von “Gruppen” einen terminologischen Ausreißer dar, der jedoch allem Anschein nach einen systematischen Hintergrund besaß.

Lie ging nämlich keineswegs, wie man nun vielleicht annehmen könnte, ab Frühjahr 1871 zur Verwendung der Gruppenterminologie über, sondern blieb zunächst bei einer unspezifischen Sprechweise, so etwa in seiner am 15.11.1871 vorgelegten Notiz zur Kugelgeometrie im \mathbb{R}^n (Lie 1871d), wo er wieder von “Schar” oder “System von Transformationen” anstelle von “Transformationsgruppen” sprach. *Erst mit seiner Arbeit an der Klassifikation der kontinuierlichen Transformationsgruppen*, also dem an der eben genannten Stelle schon angesprochenen verallgemeinerten Jordanschen Programm, *ging er zur systematischen Verwendung der Gruppenterminologie über*. Die Übernahme der Terminologie von Jordan und die Verallgemeinerung von dessen Klassifikationsprogramm bildeten, hiernach zu schließen, eine Einheit. Diese stand den von Lie selbst entwickelten Auffassungen zwar nahe, bildete darin aber zunächst gewissermaßen eine programmatische Enklave, die erst mit der tatsächlichen Bearbeitung des Programms in Lies übrige Denkweise und Terminologie integriert wurde und diese bleibend beeinflusste.

Das spricht stark für die Annahme, daß Jordans Mémoire (1869) mehr als nur Gegenstand eines beiläufigen Verweises war.²⁴ Darüber weit hinausgehend scheint sie Lie den Anlaß gegeben zu haben, *die bis dahin stets in konkreten, projektiv-geometrischen Untersuchungen verwendeten Transformationsgruppen aus diesem Kontext zu lösen und sein allgemeines Klassifikationsprogramm zu formulieren*. Das konnte er dann allerdings erst nach

seinem Studium der Integration von Differentialgleichungen in Angriff nehmen, nachdem einige dazu erforderliche Hilfsmittel bereitgestellt waren [Hawkins 1982]. Jordans Arbeit scheint demnach eine größere Bedeutung bei der expliziten Formulierung des Gruppenbegriffs innerhalb der Geometrie gehabt zu haben, als ihr gemeinhin — auch in [Wußing 1969] — zugemessen wird. Es bleibt allerdings noch zu prüfen, ob sich ähnliche Indizien für einen Einfluß auch auf Lies engsten Freund und Kooperationspartner dieser Zeit, Felix Klein, ergeben.

Vor einer eingehenderen Diskussion dieser Frage ist zunächst einmal auf Kleins integrative Arbeitsweise hinzuweisen.²⁵ Diese machte sich schon in Kleins früherer Arbeitsphase bemerkbar, etwa wenn die verschiedenen Einflüsse charakterisiert werden, die Klein beim Entwurf des “Erlanger Programms” verarbeitete.²⁶ Auf seinen Kernbestand reduziert enthielt das “Erlanger Programm” drei Grundgedanken, die sich in folgende Thesen fassen lassen:

- (i) Träger einer geometrischen Theorie ist eine “ n -dimensionale Mannigfaltigkeit” M .
- (ii) Eine geometrische Methode — moderner ausgedrückt Struktur — besteht aus der Auszeichnung einer auf M operierenden Gruppe G , der “Hauptgruppe”, und zugehörigen invarianten oder kovarianten Objekten.
- (iii) Wesentliche Teile des Systems der geometrischen Disziplinen lassen sich nach dem strukturellen Gesichtspunkt von (i), (ii) ordnen; d.h. die wichtigsten Geometrien sind Theorien von durch Hauptgruppen und invariante/kovariante Objekte strukturierten Mannigfaltigkeiten.

In unserem Zusammenhang geht es nun weder um die Haltbarkeit/Rechtfertigung bzw. Kritik an diesen Thesen,²⁷ noch um ihre historische Aufnahme und Wirkung,²⁸ sondern um ihre Herkunft und ihren Hintergrund im Kleinschen Denken selbst.

These (i) war stark durch Riemanns Auffassung der Geometrie beeinflusst, die Klein durch Clebsch kennengelernt hatte. Er konnte das Mannigfaltigkeitskonzept sehr gut mit dem Plückerschen Standpunkt höherer Raumelemente verbinden; dabei unterlief Klein allerdings zunächst eine Reduzierung der intensionalen Komplexität des Riemannschen Mannigfaltigkeitsbegriffs, die er erst im Laufe späterer Arbeiten stillschweigend rückgängig machte [Scholz 1980, 131ff.].

Den Hintergrund von These (ii) bildeten neben dem allgemeinen Transformationsgesichtspunkt der projektiven Geometrie spezifische Ansätze in dieser Richtung in Kleins eigener Arbeit vor 1872. So schien Klein die 1869/70 zusammen mit Lie erarbeitete Auffassung einer Charakterisierung der Geometrie in Kurven oder Flächen mit transitiver Transformationsgruppe (Klein/Lie 1870 — s.o.) als geeignet, seine schon Ende 1869 entworfene Ideen über eine projektive Modellierung der euklidischen und der nichteuklidischen Geometrien durch einen neuen methodischen Gesichtspunkt zu unterstützen

und präzisierbar zu machen. Und in der Tat gelang es ihm im Sommer 1871, in die von ihm schon fast zwei Jahre vorher vermutete Beziehung zwischen projektiver (Cayley-) Metrik und Differentialgeometrie konstanter Krümmung den Transformationsgesichtspunkt einzuarbeiten. Als Ergebnis erhielt er die später weithin bekannt gewordene bemerkenswerte Charakterisierung der euklidischen bzw. nichteuklidischen Isometrien durch Einschränkung der Operation bestimmter Untergruppen der Gruppe der projektiven Kollineationen (Klein 1871, 281ff.) [Russo 1968].²⁹

Die Bedeutung der Automorphismengruppe für die strukturelle Charakterisierung der "Geometrie" eines Raumes konnte Klein wenig später in der im Oktober 1871 fertiggestellten Arbeit (1872a) auch für die Plückermannigfaltigkeit der Geraden im projektiven Raum herausarbeiten. Ausgehend von deren auf Plücker zurückgehende Beschreibung als Quadrik $M_{n-1}^{(2)}$ im $P(n, \mathcal{C})$ mit Automorphismengruppe $\text{Koll}((P(n, \mathcal{C}); M_{n-1}^{(2)}))$ — also den Kollineationen, die $M_{n-1}^{(2)}$ invariant lassen — gab Klein eine Bijektion

$$\psi : M_{n-1}^{(2)} \longrightarrow P(n-1, \mathcal{C})$$

und eine mit einer Hyperebene geschnittene Quadrik $M_{n-3}^{(1,2)}$ im $P(n-1, \mathcal{C})$ an, sodaß die Automorphismen der Plückermannigfaltigkeit gerade durch $\text{Koll}(P(n-1, \mathcal{C}); M_{n-3}^{(1,2)})$ dargestellt wurden.

Aus der ex-post Perspektive scheint damit die Verallgemeinerung im "Erlanger Programm" schon recht deutlich vorgezeichnet gewesen zu sein. Jedoch reagierte Lie auf einen ersten Vorstoß zu einer solchen Verallgemeinerung, den Klein in einem ihm gegen Ende 1871 zugesandten Manuskript über die "Methoden der Geometrie" machte, zunächst mit Zurückhaltung oder sogar Unverständnis (Klein Ms XXII G). Das zeigt deutlich, daß die von Klein vorgeschlagene *Verallgemeinerung selbst auf dem von Klein und Lie geteilten gemeinsamen Wissenshintergrund über geometrische Transformationsgruppen keineswegs naheliegend* war.³⁰ Der von Klein geleistete Übergang zwischen seinen Arbeiten über nichteuklidische Geometrie (1871) sowie Liniengeometrie (1872a) und seinem Metaprogramm der Geometrie³¹ (1872b, 1873) erklärt sich also nicht aus sich heraus, sondern bedarf weiterer Aufklärung.

Es liegt nahe, einen Hinweis in diese Richtung in seinem "Zweiten Aufsatz zur nichteuklidischen Geometrie" (Klein 1873) zu suchen, der in der ersten Jahreshälfte 1872 verfaßt, aber erst im folgenden Jahr publiziert wurde. In dieser Arbeit arbeitete Klein den Gesichtspunkt der Einteilung der euklidisch/nichteuklidischen Geometrien nach Transformationsgesichtspunkten viel stärker als in der ersten Arbeit (1871) und so deutlich heraus, daß sie als Vorläuferin des Erlanger Programms gewertet werden muß und möglicherweise Schlüsselhinweise zu dessen Entstehung zu geben vermag.

Bei Prüfung der Arbeit unter dem Gesichtspunkt möglicher weiterer Einflüsse, die Klein in Richtung "Erlanger Programm" weiter brachten, fällt zunächst auf, daß Klein hier zum erstenmal von "Transformationsgruppen" sprach und von diesem Zeitpunkt an (Juni 1872) die vorher schwankende, offen gehaltene Terminologie durch die neugebildete ersetzte. Noch bei Fertigstellung der liniengeometrischen Arbeit (1872a) hatte er im Oktober 1871 dagegen von "Transformationszyklus", "Gesamtheit der Transformationen" etc. gesprochen.

Darüberhinaus, oder besser in direktem Zusammenhang damit, verwies Klein in seinem "Zweiten Aufsatz über nichteuklidische Geometrie" im Juni 1872 zum erstenmal in seinen Arbeiten auf Jordans Mémoire über Bewegungsgruppen (Klein 1873, 317). Dieses Zusammentreffen kann kaum als Zufall gewertet werden; es erscheint vielmehr als Beleg dafür, daß Klein — ähnlich wie Lie, aber unabhängig von ihm — die Transformationsgruppen-terminologie von Jordans "groupes des mouvements" adaptierte. Daraus ergibt sich aber auch, daß Felix Klein die Jordansche Arbeit (1869) erst im Zeitraum zwischen Oktober 1871 und Juni 1872 ernsthaft zur Kenntnis genommen haben kann,³² also genau in dem Zeitraum, in dem sich die zum Erlanger Programm führenden Ideen verdichteten.

Nun gibt es eine bemerkenswerte inhaltliche Parallele zwischen Jordans mathematischer Reinterpretation der Bravaisschen Kristallstrukturtheorie und dem "Erlanger Programm", die sehr gut Träger eines weitergehenden Einflusses von Jordans Mémoire (1869) auf Klein gewesen sein kann. Bravais' kristallographische Theorie charakterisierte ja die Struktur einer Kristallart durch deren System von Symmetrien, implizit, aber recht deutlich also durch deren Isometriegruppe. Dieser Gedanke war von Jordan zu Beginn seines Mémoires in der doppelten Formulierung der Fragestellung seiner Arbeit als einer Charakterisierung sämtlicher denkbarer Strukturen von Molekülsystemen und sämtlicher Typen euklidischer Bewegungsgruppen aufgenommen und zugespitzt worden. Für Felix Klein, der ab 1871 in verschiedenen Zweigen der Geometrie mit der Idee umging, unterschiedliche Eigenschaften verschiedener Räume durch zugehörige Transformationsgruppen zu charakterisieren, war in dieser Formulierung der mathematischen Charakterisierung der Struktur von Molekülsystemen durch eine Bewegungsgruppe die Analogie zu seinen eigenen Beobachtungen in den Grundlagen der Geometrie und der Liniengeometrie kaum zu übersehen.

Eine solche methodische Analogie zwischen recht weit auseinanderliegenden Gebieten ist aber ohne Zweifel eine gut geeignete Bedingung für die Auslösung, Förderung oder Sicherung einer ersten, noch unsicheren Verallgemeinerung. Nach den vorliegenden Evidenzen liegt es daher nahe anzunehmen, daß Jordans "Mémoire sur les groupes de mouvements" eine stützende heuristische Rolle bei der Herausbildung der Grundgedanken des "Erlanger Programms" spielte. Mit voller Sicherheit ist dies nach den uns zur Verfügung stehenden Quellen allerdings nicht nachweisbar.

Zusammenfassend können wir festhalten, daß Lie und Klein Jordans Mémoire (1869) während der Zeit eingehender zur Kenntnis nahmen, als sie die Grundideen ihrer unterschiedlichen, aber jeweils mit Transformationsgruppen befaßten Programme entwickelten (Lie im Frühjahr 1871, Klein vor dem Juli 1872, wahrscheinlich Ende 1871). Dies wirkte vereinheitlichend auf die Terminologie und lieferte die Vorlage für Lies Klassifikationsprogramm der kontinuierlichen Gruppen. Sicher festzustellen ist eine weitere terminologische Spur, die das kristallographische Symmetriestudium in der frühen Gruppentheorie hinterließ: durch Jordan — und später Klein — wurde die Sprechweise von “*holoedrischem bzw. meriedrischem Isomorphismus (isomorphisme holoédrique/mériédrique)*” für Isomorphismen bzw. Homomorphismen (mit nichttrivialem Kern) in die Gruppentheorie des ausgehenden 19. Jahrhunderts eingeführt.³³

Wahrscheinlich enthielt darüberhinaus Jordans überspitzter Hinweis auf die Möglichkeit der Mathematisierung der Bravais'schen Kristallstrukturtheorie in der Sprache der Bewegungsgruppen eine methodische Anregung für Felix Kleins Formulierung der allgemeinen Ideen des “Erlanger Programms”. Ähnlich wie bei Lie der terminologische Einfluß von Jordans Mémoire (1869) mit einer programmatischen Anregung verbunden war (Klassifikation der Bewegungsgruppen — Klassifikation der kontinuierlichen Transformationsgruppen), ging dessen Einfluß auch auf Felix Klein wohl deutlich über bloß terminologische Aspekte hinaus. Nehmen wir diesen — zugegebenermaßen nur auf der Basis von Indizien rekonstruierten — Einfluß ernst, *müssen wir von der Wirkung eines indirekten, aber nicht unwichtigen Einflusses der Kristallstrukturtheorie auf die Bildung eines bedeutenden Metaprogramms*³⁴ der Geometrie des ausgehenden 19. Jahrhunderts ausgehen und damit von einem Beitrag zur Schaffung der Bedingungen, durch die der Gruppenbegriff gegen Jahrhundertende seine große strukturierende Bedeutung innerhalb der Mathematik erst gewinnen konnte.

Über alle Unsicherheiten des Indizienargumentes hinweg ist als gesichert festzuhalten, daß die erste Aufnahme des expliziten Gruppenbegriffs innerhalb der Geometrie durch Jordan auf Anregung und Ergebnisse der Bravais'schen Kristallstrukturtheorie zurückgriff. In diesem Sinne beeinflusste das Symmetriestudium der Kristallographie die Aufnahme des Gruppenkonzeptes in die Geometrie direkt; indirekt kam es bis zu den Arbeiten Schoenflies' in der zweiten Hälfte der 1880er Jahre so weit zur Geltung, wie die Wirkungen des Jordanschen Mémoires über Bewegungsgruppen reichten — wie immer man diese einschätzen mag.

§5 Gruppen in der Kristallographie — die Entdeckung der 230 Raumgruppentypen

5.1 Erste Nutzbarmachung des Jordanschen Mémoires für die Kristallographie: L. Sohncke und B. Minnigerode

Die Übernahme des Gruppenbegriffs in die Kristallographie erfolgte langsam und über verschiedene Wege. Der wohl bedeutsamste wurde durch *Leonhard Sohncke* (1842–1897), einen Schüler F. Neumanns, Physiker in Karlsruhe (1871–1883), später in Jena und München (1886–1897), eingeschlagen, der in der Mitte der 1870er Jahre mit einer Auswertung des Jordanschen Mémoires (1869) für die Kristallographie begann (Sohncke 1876a, 1879). Er blieb allerdings mit seinen Anstrengungen unter den Kristallographen mit wenigen Ausnahmen — unter ihnen jedoch keine geringeren als P. Curie und E.S. Fedorov — zunächst allein.¹

Selbst für den einfachen Fall der Kristallklassen blieb der Gruppenbegriff noch bis gegen Ende der 1880er Jahre praktisch ungenutzt. So argumentierte etwa A. Gadolin in einer unter Kristallographen stark beachteten und häufig als wichtigste Quelle für die systematische Ableitung der Kristallklassen angegebenen Arbeit (1871) ohne Verwendung von Konzepten der Gruppentheorie.² Ein offensichtlicher Grund dafür war, daß seine Arbeit vor Abfassung des Jordanschen Mémoires geschrieben und der Finnischen Gesellschaft der Wissenschaften schon am 19.3.1867 vorgelegt worden war. Bevor diese sich zur Publikation entschied, war im übrigen durch die St. Petersburger Mineralogischen Gesellschaft schon eine russische Fassung der Abhandlung veröffentlicht worden (Gadolin 1869). Gadolin knüpfte an Arbeiten der Mohs-Schule (F. Naumann u.a.) an; Frankenheim, Hessel und sogar Bravais waren ihm anscheinend unbekannt. Er gab — eingeschränkt durch das Rationalitätsgesetz — eine erneute Ableitung der Symmetriekonfigurationen der 32 Kristallklassen und teilte diese in 6 Systeme ein. Von dieser Grundlage aus konnte er Redundanzen der in der Mohs-Tradition entstandenen Symmetriebeschreibungen von Kristallen kritisieren³ und glaubte einige "neue" Kristallklassen (D_{2d} , C_{4v} , C_4 , C_3 , D_3 , C_s , C_1) abgeleitet zu haben (Gadolin 1871, 60f.).

Selbst nach der Publikation des Jordanschen Mémoires dauerte es noch fast 20 Jahre, bis auch in der Kristallographie die Kristallklassen explizit vom Standpunkt endlicher orthogonaler Gruppen eingeführt wurden. Sogar noch Anfang der 1880er Jahre, als *Pierre Curie* (1859–1906) aufgrund der Unvollständigkeit der Bravais'schen Liste der Kristallklassen (\bar{C}_4) und deren Herleitung (fehlende Drehspiegelung) eine erneute, nunmehr vollständige

Deduktion der Punktsymmetriesysteme in Hinsicht auf die Kristallographie angab (1884), unterblieb die Aufnahme des mittlerweile in der Mathematik weit verbreiteten geometrischen Gruppenbegriffs. Erst kurz vor Ende des Jahrzehnts wurde dieser vom Greifswalder Mathematiker *B. Minnigerode* in einem Artikel im "Neuen Jahrbuch für Mineralogie" in die Behandlung der Kristallklassen eingeführt (1887). Minnigerode stellte seinem Artikel eine kurze Diskussion der endlichen Untergruppen von $SO(3, \mathbb{R})$ und deren mögliche Erweiterung durch orientierungsumkehrende Isometrien voraus. Er gab für jede Kristallklasse G Erzeugende ρ_1, \dots, ρ_k und für jedes Element einen Term $P_i(\rho_1, \dots, \rho_k)$ ($1 \leq i \leq |G|$) aus den Erzeugenden an. Zusätzlich stellte er jedes Element als lineare Abbildung dar, die nach geeigneter Koordinatenwahl im Frankenheimschen Stil durch eine erweiterte Permutation repräsentiert wurde.

Eine explizite Angabe der definierenden Relationen zwischen den Erzeugenden, wie sie nach W. Dycks Arbeiten über endliche Präsentation von Gruppen (Dyck 1882, 1883) vielleicht zu erwarten gewesen wäre, unterließ Minnigerode.⁴ Seine Arbeit war also nicht unbedingt auf dem neuesten mathematischen Stand; sie bildete aber den Ausgangspunkt einer Übernahme expliziter Methoden der elementaren Gruppentheorie in die Kristallographie. Zu diesem Zeitpunkt arbeitete allerdings auch schon Schoenflies an seinen Studien der kristallographischen Raumgruppen. Deren Ergebnisse sollten Minnigerodes Beitrag wenig später an Bedeutung weit übertreffen und ihn gänzlich in den Schatten stellen (§§5.3, 5.5).

Sohnckes Bemühungen um eine Nutzbarmachung der Jordanschen Klassifizierung der Bewegungsgruppen waren all dem vorhergegangen. Er hatte auf Anregung seines Lehrers F. Neumann die Bravaisschen Arbeiten gründlich studiert und in den 1860er Jahren eine ganz auf die kristallographischen Aspekte zugeschnittene, an Bravais orientierte Herleitung der 7 Bravaissysteme und 14 Raumgittertypen gegeben (Sohncke 1867). Bravais' Hypothese der symmetrischen Molekülpolyeder war Sohncke allerdings zu restriktiv erschienen, sodaß er, noch ehe ihm Jordans Mémoire (1869) zu Gesicht kam, mit einer geometrisch-konfigurativen Analyse der unendlichen ebenen Symmetriesysteme begann. Die Symmetrien studierte er schon in (1874) aus der Sicht "*regelmäßiger ebener Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung*", von denen er annahm:

"... dass die Punktvertheilung (...) um jeden (...) Punkt dieselbe ist wie um jeden anderen" (Sohncke 1879, 23).

Sohncke machte also nicht den Versuch, Systeme von Symmetrien der euklidischen Ebene "an sich" zu betrachten, sondern studierte sie nur so weit, wie sie als Symmetrien regulärer Punktmuster (d.h. solcher mit transitiver Symmetriegruppe) auftreten. Vom Standpunkt des Gruppenbegriffs

aus gelesen, könnte man sagen, daß Sohncke nicht die ebenen Symmetriesysteme selbst, sondern deren Orbits klassifizierte. Das hatte notwendigerweise zur Folge, daß Sohncke gewissermaßen nur solche Symmetriesysteme sehen konnte, die als volle Symmetriegruppe eines Punktmusters auftreten.⁵ Nun läßt jedes ebene, reguläre 2-fach periodische Punktmuster (Netz) Punktinversionen bzw. Drehungen der Ordnung 2 zu. Sohncke konnte daher aus seiner Perspektive Symmetriesysteme mit orthogonalem Anteil ohne 2-zählige Drehungen (d.h. der orthogonalen Klassen C_1 oder C_2) nicht identifizieren. Von den 17 ebenen Ornamentgruppen entfallen dann aber 4 (P_1 , P_m , C_m , P_g); die anderen 13 ebenen Symmetriesysteme wurden von Sohncke unter seinem Gesichtspunkt der regulären Punktmuster vollständig aufgezählt.

Als Sohncke kurz nach Abfassung der Arbeit (1874) im Juli 1873 von Jordans Mémoire erfuhr, erkannte er schnell dessen potentielle Bedeutung für die Kristallographie. Er analysierte es im Jahre 1875 unter kristallographischem Gesichtspunkt, sortierte die Gruppen mit infinitesimalen Erzeugenden oder ohne relativ kompakten Fundamentalbereich aus — immer vom Standpunkt der zweiten Jordanschen Problembeschreibung der “Lagesysteme von Molekülen”,⁶ und füllte die Lücken in Jordans unvollständiger Liste der kristallographischen Raumgruppen aus eigentlichen Bewegungen⁷ (Sohncke 1876a). Das Ergebnis seiner Analyse stellte er Ende der 1870er Jahre ausführlich in seinem Buch “Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur” (Sohncke 1879) dar. Dabei gab er eine Liste von 66 (!) “Punktsystemen” an, einem mehr, als von der Anzahl kristallographischer Raumgruppen des \mathbb{E}^3 her möglich erscheint. Zwei seiner Systeme der Kristallklasse D_2 waren, anders als er meinte, von demselben Symmetriotyp.⁸

Sohnckes Kristallstrukturtheorie gründete sich auf die Hypothese, daß die Schwerpunkte von “Krystallelementen” eines Kristalls ein “regelmäßiges Punktsystem” bilden. Dabei ließ er offen, wie die genannten “Krystallelemente” zu interpretieren sind, ob als chemische Moleküle oder Molekülgruppen und ob diese sich gegenseitig berühren oder räumlich getrennt um die im “Punktsystem” fixierten Mittellagen oszillieren (1879, 27).

Diskretheit des Punktsystems erreichte Sohncke durch die ausdrückliche Forderung der Existenz einer positiven unteren Schranke der Punktabstände. Die *Regelmäßigkeit* erklärte er zunächst folgendermaßen:

“Ein regelmässiges Punktsystem ist ein solches, in welchem die von jedem Systempunkt nach allen übrigen Systempunkten gezogenen Linienbündel untereinander kongruent sind.” (Sohncke 1879, 28; vgl. 1876, 3).

Diese Definition hat — in unserer Terminologie gesprochen — die Transitivität der Symmetriegruppe des “regelmäßigen Punktsystems” zur Folge; damit kann das Punktesystem also auch als Orbit einer diskontinuierlichen

Untergruppe von $\text{Isom}(\mathbf{E}^3)$ aufgefaßt werden. Sohncke reflektierte diesen Sachverhalt dadurch, daß er ausdrücklich Deckbewegungsgesamtheiten seiner Punktsysteme untersuchte.⁹

Wir gehen daher in Anlehnung an Sohncke im weiteren aus von

Definition 1:

Eine Punktmenge P im \mathbf{E}^2 oder \mathbf{E}^3 heißt genau dann *reguläres Punktesystem*, wenn $\inf_{A, B \in P} (\text{dist}(A, B)) > 0$ gilt und die Symmetriegruppe von P auf P transitiv operiert.

Nach einem auf diskrete Punktsysteme zugeschnittenen Beweis, daß nur 2-, 3-, 4- oder 6-zählige Achsen auftreten können (ebda., 39ff.), bestand Sohnckes Hauptarbeit in einer Klassifikation der möglichen Anordnungen von Rotations- und Schraubenachsen in einem regulären Punktsystem. Ähnlich wie Jordan gab er zur Darstellung des Resultats Erzeugende des translativen und (1 bis 3) Erzeugende des rotativen Anteils an (ebda., 65–174, Tabelle 175f.). Darüberhinaus diskutierte er die Erzeugung eines “regelmäßigen diskreten Punktsystems”, d.h. eines Orbits der angegebenen Deckbewegungsgruppe G , die durch Erweiterung eines Translationsgitters Γ durch ein $G_0 < SO(3, \mathbf{R})$ entstanden war, als endliche Vereinigung von Punktgittern; modernisiert geschrieben arbeitete Sohncke also bei

$$0 \rightarrow \Gamma \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\rho} G_0 \rightarrow 0$$

nach Wahl eines Repräsentantensystems,

$$H \subset G; \rho|_H : H \rightarrow G_0 \text{ bijektiv,}$$

mit der Darstellung eines Punktorbits durch

$$G(p) = \bigcup_{h \in H} h(\Gamma(p))$$

(Sohncke 1879, 178).

Abschließend argumentierte er für die empirische *Relevanz der neuartigen Symmetriesysteme* (der “*Schraubensysteme*”, also der verschränkten Erweiterungen mit nichttrivialem Faktorensystem) innerhalb der Kristallographie durch Skizzierung einer strukturtheoretischen Erklärung des optischen Drehvermögens bei gewissen Kristallen. Schon Herschel hatte fast 50 Jahre früher (1822) die Hypothese ausgesprochen, daß die Existenz einer links- und einer rechtsdrehenden Quarzvarietät auf den Mangel an Spiegelsymmetrie

der Intermolekularkräfte zurückzuführen sei. Im Laufe der folgenden Jahrzehnte waren in diversen anderen Kristallklassen (O , C_3 , D_3 , C_4 , D_4 , C_6 , D_6) vom optischen Verhalten her ähnliche “*enantiomorphe Paare*” links- und rechtsdrehender Kristallvarietäten entdeckt worden. Sohncke konnte nun die Herschelsche Hypothese hervorragend in seine Kristallstrukturtheorie integrieren, weil genau diese Kristallsysteme

“... *solche Punktsysteme (enthalten), die als enantiomorphe Gebilde einander (spiegelbildlich E.S.) zugeordnet sind ...*” (ebda., 239).

Er untermauerte diese strukturelle Erklärung durch Verweis auf Experimente (Reusch 1869), bei denen durch Aufsichtung dünner gegeneinander gedrehter Glimmerplättchen eine Drehung der Polarisationssebene durchfallenden Lichts künstlich erzeugt wurde. Schon an anderer Stelle hatte er diese Experimente als Indiz für eine analoge “geschraubte” Anordnung der Moleküle in Kristallen mit optischem Drehvermögen interpretiert (1876b). Sohncke hatte somit neben der mathematischen Auswertung des Jordanschen Mémoires (1869) unter kristallographischem Gesichtspunkt gleichzeitig einen Beitrag zum Nachweis der physikalischen Relevanz der neu eingeführten “verwickelten” Symmetriesysteme geleistet.

5.2 Fedorovs Arbeiten zur geometrischen Kristallographie bis 1889

Sohnckes Kristallstrukturtheorie zog das Interesse von Wissenschaftlern verschiedenen Hintergrundes und unterschiedlicher Arbeitsrichtung auf sich. Die folgenreichsten an Sohncke anschließenden Arbeiten waren die des Kristallographen und Mineralogen *Evgraph Stepanovič Fedorov* (1853–1919) und des ab Mitte der 1880er Jahre stark von F. Klein beeinflussten Mathematikers *Arthur Schoenflies* (1853–1928).

Fedorov hatte als Sohn eines Generalmajors der Pioniertruppe im zaristischen Heer selber zunächst eine militärische Laufbahn angestrebt, bevor er 1874 aus dem aktiven Dienst als Leutnant eines Pionierbattalions ausschied und nach dem Studium der Chemie und Physik am technischen Institut St. Petersburg am Berginstitut desselben Orts 1880 ein Studium der Mineralogie und Geologie aufnahm. Dieses beendete er 1883 mit Auszeichnung.¹⁰ Schon während seines Studiums hatte er, anschließend an Sohncke, aber eigenständige Wege gehend, mathematisch orientierte Forschungen begonnen, deren Ergebnisse er im Jahre 1881 in einem Manuskript zusammenfaßte und der Akademie der Wissenschaften unter dem Titel “Elemente der Gestaltenlehre (Načala učenija o figurach)” zur Veröffentlichung vorlegte (Fedorov 1885). Dessen Publikation wurde aber von Čebyšev vom Standpunkt

der aktuellen mathematischen Forschung und von dem für Kristallographie zuständigen Akademiemitglied Eremjev als mineralogisch zu spekulativ zurückgewiesen. Erst durch den Einsatz des finnischen Kristallographen A. Gadolin wurde die Arbeit vier Jahre später schließlich doch zum Druck in den Verhandlungen der Mineralogischen Gesellschaft St. Petersburg aufgenommen.¹¹

Im Jahr der Publikation avancierte Fedorov von einer bescheidenen Stelle als Geologe beim Bergamt zum Konservator beim Geologischen Komitee St. Petersburg. Trotz häufiger und ausgedehnter Reisen zu Felduntersuchungen in den Nordural unter beschwerlichen Bedingungen nahm er sich die Zeit zur Fortsetzung seiner theoretischen Forschungen und legte die mathematischen Grundlagen (Fedorov 1885–87, 1888, 1889) für eine umfassende Studie der “Symmetrie der regelmäßigen Figuresysteme (Simmetrija pravil'nich sistem figur)” (Fedorov 1890/91a). Darin erzielte er parallel zu Schoenflies — methodisch unabhängig aber in der Endphase in brieflichem Austausch mit diesem — eine vollständige Klassifikation der 230 kristallographischen Raumgruppen.

Kurz darauf entwarf er eine neue, verbesserte Methode zur optischen Vermessung von Mineralien (Fedorov 1893a). Dies brachte ihm im Jahre 1894 die Ernennung zum Direktor des geologischen Museums der Turjinsker Gruben (Ural) ein. Schon ein Jahr später wurde er als Professor an die Landwirtschaftsakademie Petrovsko-Razumovskoje bei Moskau berufen. Ab 1896 wurde er gleichzeitig Professor der Mineralogie am Berginstitut Moskau und erhielt einen Lehrauftrag am St. Petersburger Berginstitut.

Etwa zur Zeit seines Briefwechsels mit Schoenflies, in der Zeit ihrer gemeinsamen Entdeckung der 230 kristallographischen Raumgruppentypen (1889–1891), begann er auch einen intensiven Austausch mit westlichen Mineralogen, insbesondere *Paul Groth* (1843–1927), dem damaligen Herausgeber der “Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie”, in dem ein Teil der Fedorovschen Arbeiten auf deutsch publiziert wurden. 1896 wurde Fedorov auf Vorschlag von P. Groth und L. Sohncke zum korrespondierenden Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften ernannt. In dieser Zeit arbeitete er seine auf spezielle reguläre Pflasterungen (“parallele Raumteilungen”) gegründete Kristallstrukturtheorie weiter aus (Fedorov 1895–1905, 1900) (vgl. §5.4).

Erst Jahre nach seiner wissenschaftlichen Anerkennung im Westen wurde er 1901 zum Mitglied der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften ernannt, schied aber aus ihr schon wenig später (1905) wegen Schwierigkeiten beim Aufbau eines Mineralogischen Instituts mit scharfer Kritik an der Immobilität der Institution wieder aus.¹² Er wechselte nun als Professor zum Berginstitut St. Petersburg, wo er den Rest seines Lebens arbeitete (1905–1919). Unmittelbar nach der Gründung der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften wurde er deren Mitglied, starb aber kurze Zeit darauf, bevor

er sichtbar zum Aufbau der mineralogisch-kristallographischen Forschung in diesem institutionellen Rahmen hätte beitragen können.

Fedorovs Beiträge zur geometrischen Kristallographie waren durch eine starke Betonung der Bedeutung regulärer Pflasterungen geprägt, das heißt im wesentlichen Pflasterungen des euklidischen Raumes mit ziegeltransitiver Deckisometriegruppe und "genügend großer" orthogonaler Untergruppe (siehe §5.4, Definition 3). Die zugehörigen Symmetriesysteme (Raumgruppen) hatten für Fedorov eine untergeordnete, eher instrumentelle Bedeutung. Schon in seiner ersten großen Abhandlung über die geometrischen Grundlagen der Kristallographie "Elemente der Gestaltenlehre" (1885) kam eine solche Auffassung zur Geltung; und sie veränderte sich auch später nicht einschneidend.

Fedorov schloß an Sohnckes Studium der "regelmässigen Punktsysteme" an, erweiterte dessen Konzeption jedoch in zweierlei Hinsicht:

- durch Betrachtung "*regelmässiger Systeme von Figuren*" (insbesondere regulärer Pflasterungen anstelle von Punktorbits)
- sowie durch Einschluß uneigentlicher Kongruenzen in den Bereich zulässiger Deckoperationen (Fedorov 1885, 240).

Die "regelmässigen Punktsysteme" gewann er daraus leicht durch Auszeichnung eines beliebigen Punktes in einer der Figuren und Bestimmung aller Punkte in sämtlichen Figuren in "analoger Lage". Dabei unterschied er "*doppelte*" und "*einfache Punktsysteme*", je nachdem die Symmetrien uneigentliche Kongruenzen einschlossen oder nicht (1885, 240; 1890/91a, 10).

Sein Hauptaugenmerk richtete sich aber auf die grundlegenden Eigenschaften ebener und räumlicher monoedrischer und in der Regel sogar regulärer Pflasterungen ("*Ebenen-*" bzw. "*Raumteilungen*") durch Polygone ("*Planigone*") bzw. Polyeder ("*Stereoeder*"). Aufgrund seiner kristallstrukturtheoretischen Annahmen schienen ihm dabei "*parallele Pflasterungen*" besonders wichtig zu sein, das heißt solche, bei denen je zwei Ziegel durch Translation ineinander überführt werden können. Die Ziegel besitzen dann offensichtlich paarweise parallele Kanten bzw. Seitenflächen. Dafür führte er die Bezeichnung "*Parallelogone*" bzw. "*Paralleloeder*" ein.¹³

Fedorov beobachtete nun, daß "normalerweise", d.h. bei den von ihm verwendeten regulären Pflasterungen, jeweils mehrere Ziegel so zu einem neuen zusammengefaßt werden können, daß eine der gegebenen Pflasterung übergeordnete parallele Pflasterung entsteht. Er glaubte, dies sogar allgemein beweisen zu können (Fedorov 1885, §§64, 84), setzte dabei allerdings stillschweigend Regularität der Pflasterung voraus.¹⁴ Und selbst von dieser Grundlage aus schien sein Argument nicht sehr klar.¹⁵ Ungeachtet solcher Schwächen im Detail entwickelte Fedorov in seiner Argumentation dennoch *implizit ein Verständnis für die Beziehung zwischen den Fundamentalbereichszerlegungen*

einer kristallographischen Gruppe und ihrer Translationsuntergruppe, noch bevor Schoenflies überhaupt diese Art von Fragestellungen zu bearbeiten begann (vgl. §§5.3, 5.5).

Von einer solchen Fragestellung herkommend, suchte er nun nach einer affinen Klassifikation der konvexen Parallelogone/Paralleloeder und erhielt das Ergebnis von

Theorem 1 (Fedorov 1885, §§57, 77):

- (i) Es gibt genau zwei affine Klassen konvexer Parallelogone: Quadrat/Parallelogramm und Hexagon/Triparallelogramm.¹⁶
- (ii) Es gibt genau 5 affine Klassen konvexer Paralleloeder: Hexaeder/Triparalleloeder (Parallelepiped), hexagonales Prisma/Tetraparalleloeder, Rhombendodekaeder/Hexaparalleloeder, verlängertes Rhombendodekaeder/verlängertes Hexaparalleloeder, gestutztes Oktaeder/Heptaparalleloeder.¹⁷

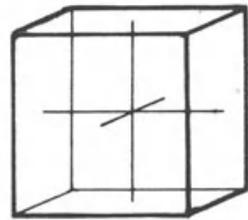
In seiner Klassifikation ging Fedorov stillschweigend von der Existenz einer Punktsymmetrie bei konvexen Paralleloedern aus, ohne diese jedoch beweisen zu können. Diese Lücke wurde von H. Minkowski geschlossen (1897), der im Rahmen seiner Untersuchung zur Geometrie der Zahlen wenig später auf dieselbe Fragestellung stieß.¹⁸

Fedorov arbeitete später in seiner Kristallstrukturtheorie viel mit konvexen Paralleloedern. Er führte daher abkürzende Sprechweisen für sie ein, deren wichtigste zusammengefaßt sind in

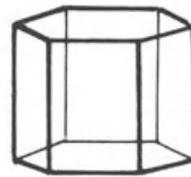
Definition 2:

- a) Die fünf in Theorem 1 klassifizierten Paralleloedertypen heißen *Normalparalleloeder*.
- b) Eine Pflasterung des E^3 aus Normalparalleloedern werde kurz als "*Paralleloederteilung*" bezeichnet.

Den Punktsymmetrien widmete Fedorov einen eigenen Abschnitt seiner Arbeit mit dem Titel "Symmetrielehre" (1885, 130ff.). Ohne Hessels Resultate zu kennen,¹⁹ entwickelte Fedorov eigenständig eine *Klassifikation der Punktsymmetriarten* (implizit: endliche orthogonale Gruppen), die er durch "*typische Isoeder*", d.h. einer Kugel umbeschriebene Polyeder mit kongruenten Seitenflächen, charakterisierte — also vom Standpunkt der gruppentheoretischen Klassifikation durch generische einfache Formen. Eine Klassifizierung der Symmetriesysteme der von ihm betrachteten regulären Pflasterungen lag jedoch noch außerhalb der Reichweite seiner geometrischen Methoden.



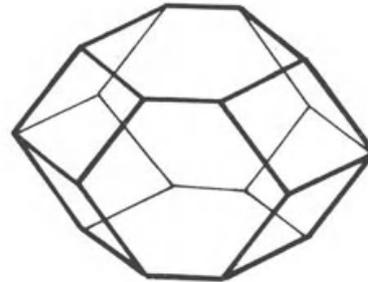
Triparallelloeder
(Parallelepiped)



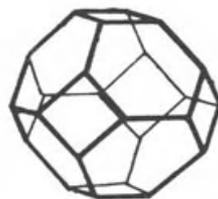
Tetraparalleloeder
(hexagonales Prisma)



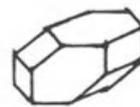
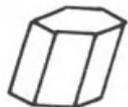
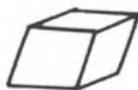
2 Typen Hexaparalleloeder
(Rhombendodekaeder)



("verlängertes
Rhombendodekaeder")



Heptaparalleloeder
(gestutztes Oktaeder)



generische Formen

Fig. 6 Die 5 affinen Typen konvexer Paralleloeder

Fedorov entwickelte die von ihm angewandten Methoden der "Symmetrielehre" in der zweiten Hälfte der 1880er Jahre durch die Einführung von speziell auf die Erfordernisse der Kristallographie zugeschnittenen Notationen der analytischen Geometrie weiter (Fedorov 1885–87, 1888). Er arbeitete dabei prinzipiell mit orthogonalen Koordinatenprojektionen eines Punktes — auch dann, wenn er dem Problem angepaßte schiefwinklige Achsensysteme zugrundelegte — und darüberhinaus mit einer konnotationsreichen Symbolik, deren Bedeutung erst bei Berücksichtigung des Kontextes lesbar wird.

Sind etwa im Fall einer Rotationssymmetrie um eine p -zählige Achse z die p Achsen y_0, \dots, y_{p-1} in einer Orthogonalebene zu z rotationssymmetrisch gewählt und die Werte der orthogonalen Koordinatenprojektionen eines Punktes P bezüglich dieser Achsen etwa $y_i(P) = b_i$ ($0 \leq i \leq p-1$), so erhielt Fedorov eine Koordinatendarstellung des Orbits von P bezüglich der Rotationssymmetriegruppe C_p durch die Angabe von

$$z = c, y_0 = b_i, y_1 = b_{i+1} \quad (0 \leq i \leq p-1).$$

Dafür verwendete er die Schreibweise

$$z = c, \quad y_0 = \overset{p}{b}_i, \quad y_1 = \overset{p}{b}_{i+1}.$$

die ihm gleichzeitig als Symbol der Gruppe C_p diente (1889/1971, 26f.). Ergänzt durch eine Darstellung (möglicherweise "gekoppelter") Vorzeichenwechsel, erhielt er daraus eine symbolische Repräsentation der endlichen orthogonalen Gruppen, deren Symmetriekonfigurationen er schon in (1885) geometrisch-relational beschrieben hatte. Jede Gruppe (bzw. der zugehörige Orbit) wurde durch einen (endlich mehrdeutigen) 3-Komponenten-Term symbolisch dargestellt.

Beispiel (Fedorov 1889/1971, 45ff.):

a) Darstellung von $D_{p,h}$ nach naheliegender Achsenwahl durch

$$z = n^{k+l}c, \quad y_0 = \overset{p}{b}_i, \quad y_1 = \overset{p}{b}_{i+n^k} \quad (n = -1, j, k, l = 0, 1)$$

b) von O^* nach Auszeichnung von drei der 3-zähligen Achsen als x_0, x_1, x_2 durch

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i, \quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^m}, \quad x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2n^m}.$$

So gelang ihm eine informationsreiche, komprimierte Darstellung von Symmetriebeziehungen und -systemen, ohne auf Terminologie und Symbolik der zeitgenössischen Gruppentheorie zurückgreifen zu müssen.²⁰

Natürlich war Fedorovs "frühe" Symmetrieauffassung (d.h. etwa bis 1889) ähnlich wie Sohnckes *implizit gruppentheoretisch* — nicht zuletzt aufgrund eines direkten oder indirekten Einflusses des Jordanschen Mémoires (1869). Obwohl Fedorovs Denken in Systemen geometrischer Operationen durch die Auseinandersetzung mit Schoenflies' frühen Arbeiten an der Wende von den 1880er zu den 1890er Jahren ein Stück weiter zugespitzt wurde, *übernahm er nie eine explizit gruppentheoretische Sichtweise*. "Gruppen" erschienen bei ihm nur als eine "façon de parler" von Schoenflies, die er selber nicht übernahm. Er zog es stattdessen vor, in seinen späteren Arbeiten von ("einfachen" oder "doppelten") Punktesystemen zu sprechen, wenn er die entsprechenden Raumsymmetriesysteme charakterisieren wollte (Fedorov 1896 u.a.). In dieser Hinsicht ging er in seinen späteren Arbeiten nicht wesentlich über die Auffassungsweise hinaus, die er schon in seinem Erstling von 1885 entwickelt hatte. Die in der zweiten Hälfte der 1880er Jahre entwickelten Hilfsmittel, insbesondere die symbolische Darstellung von Symmetriesystemen, erwiesen sich als ausreichender Hintergrund zur Bestimmung der kristallographischen Raumsymmetriesysteme (-gruppen). Bevor wir darauf eingehen (§5.4), sollen jedoch zunächst die von A. Schoenflies bis Mitte 1889 erzielten Ergebnisse sowie dessen gänzlich andere Vorgehensweise dargestellt werden.

5.3 Schoenflies' Herleitung von 227 kristallographischen Raumgruppentypen bis 1889

Ohne von Fedorovs Arbeiten zu wissen, begann in der zweiten Hälfte der 1880er Jahre *Arthur Schoenflies* (1853–1928) die Sohnckesche Kristallstrukturtheorie unter mathematischen Gesichtspunkten zu analysieren und weiterzuentwickeln. Schoenflies hatte bei Kummer in Berlin studiert und habilitierte sich — parallel zu einer Anstellung als Gymnasiallehrer in Kolmar — im Jahre 1884 mit einer Arbeit über klassische Kinematik im Göttingen. Der junge, an klassischer Geometrie und Anwendungen interessierte Privatdozent suchte schon in dieser Zeit Kontakt zu Felix Klein, der damals noch in Leipzig lehrte.²¹ Er las Jordans Mémoire (1869) und schrieb seine erste kleinere Note über Bewegungsgruppen (Schoenflies 1886). Mit Kleins Wechsel von Leipzig nach Göttingen zum Sommersemester 1886 intensivierte sich der Kontakt. Schoenflies arbeitete Sohnckes Klassifikation der regelmäßigen Punktsysteme unter gruppentheoretischem Gesichtspunkt aus (Schoenflies 1887a, b) und wurde durch Klein zu einer Verallgemeinerung durch Einbezug der uneigentlichen Bewegungen des Raumes angeregt. Daraus entstand eine Serie von Arbeiten (Schoenflies 1888a, b, 1889, 1890), und — nach einem intensiven Austausch mit Fedorov im Jahre 1890/91 — eine umfassende vollständige Herleitung der 230 kristallographischen Raumgruppentypen (Schoenflies 1891a) (§5.5).²² Diese Arbeit wurde zu einem Klassiker der

mathematischen Kristallographie²³ und verschaffte ihrem Autor weite Anerkennung als angewandter Mathematiker.

Im Jahre 1892 wurde Schoenflies Extraordinarius auf der in Göttingen durch F. Kleins Initiative neugeschaffenen Stelle für angewandte Mathematik. Das hinderte ihn nicht an einer Ausweitung seiner Forschungsinteressen. So befaßte er sich ab der zweiten Hälfte der 1890er Jahre auch mit Fragen der Punktmengentopologie, insbesondere der Dimensionsinvarianz zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten unter Homöomorphismen.²⁴ Doch gab er die angewandte Mathematik — insbesondere in der Lehre — auch nach der Übernahme eines Ordinariats für Mathematik in Königsberg (1893) und später in Frankfurt (1911) keineswegs auf [Freudenthal 1975].

Während der Zeit um Kleins Antritt der Göttinger Professur (Sommersemester 1886) begann Schoenflies also ein intensiveres Studium der (eigentlich) diskontinuierlichen²⁵ Bewegungsgruppen des euklidischen Raums. Seine erste in diesem Zusammenhang entstandene Note (Schoenflies 1886) enthielt einen ausführlichen Beweis für die in Jordans Mémoire (1869) als selbstverständlich vorausgesetzte Rationalität des Winkels $\omega = 2\pi(p/q)$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) einer Drehung oder einer Schraubung $A(\omega, t)$ einer Bewegungsgruppe ohne “unendlich kleine Bewegungen”. Schoenflies schickte sie im Sommer 1886 mit der Bemerkung an Jordan, gerade eine Abhandlung über die kristallographischen Bewegungsgruppen beendet zu haben, deren Resultat bis auf kleine Abweichungen mit dem Sohnckes (1879) übereinstimme (Schoenflies an Jordan 5.8.1886). Die hier angesprochene, erst im nächsten Jahr gedruckte Arbeit (Schoenflies 1887)²⁶ erhielt in der Tat eine stärker auf Gruppenmethoden gestützte Ableitung der 65 kristallographischen Raumgruppen aus eigentlichen Bewegungen (im folgenden “*Sohnckesche Gruppen*”) als bei Sohncke.

Die Hauptidee dieser Arbeit lag darin, daß Schoenflies — nach einer Variation des bekannten Argumentes, daß ein räumliches Translationsgitter nur mit zyklischen Gruppen C_n mit $n = 1, 2, 3, 4, 6$ erweiterbar ist — die *Bewegungsgruppen G schrittweise durch Adjunktion jeweils einer weiteren Bewegung aus einer räumlichen Translationsgruppe Γ erhielt:*

$$\Gamma < \tilde{C}_n < \tilde{D}_n \quad (n = 2, 3, 4, 6), \quad \tilde{D}_2 < \tilde{T} < \tilde{O}$$

Dabei sind $\tilde{C}_n, \tilde{D}_n, \dots, \tilde{O}$ Untergruppen von $\text{Isom}^+(\mathbb{E}^3)$ mit rotativen Anteilen $\rho(\tilde{C}_n) = C_n, \dots, \rho(\tilde{O}) = O$, wobei $\rho: \text{Isom}^+(\mathbb{E}^3) \rightarrow O(3, \mathbb{R})$.

Als Hilfsmittel diente ihm eine Unterscheidung “*gleicharthiger*” von “*gleichberechtigten*” (später “*gleichwerthigen*”) Bewegungen bzw. Achsen; die ersteren setzte er als konjugiert in $\text{Isom}^+(\mathbb{E}^3)$, die letzteren als in der betrachteten Bewegungsgruppe G selbst voraus. Damit formulierte er:

Erweiterungskriterium:

Die Sohnckesche Gruppe G mit Translationsgitter Γ ist genau dann ohne Änderung des Translationsgitters durch $\beta \in \text{Isom}^+(\mathbb{E}^3)$ zu einer Sohnckeschen Gruppe $\tilde{G} = \langle G, \beta \rangle$ erweiterbar, wenn gilt:

- (i) Jede Achse A (mit reduzierter Operation²⁷ $\alpha \in G$) wird in eine "gleicharthige" $A' = \beta A$ (mit reduzierter Operation $\alpha' = \beta\alpha\beta^{-1} \in G$) transformiert.
- (ii) Ist β^k ($k \in \mathbb{Z}$) eine Translation, so ist $\beta^k \in \Gamma$.²⁸

Nach der naheliegenden Beobachtung, daß jeder Achsenorbit in G ("Schaar gleichberechtigter Axen") ein Basisparallelepiped P von Γ trifft (1887, 325), charakterisierte Schoenflies jede einzelne Bewegungsgruppe durch Angabe "gleichberechtigter" Achsen in P . Insgesamt argumentierte er also ganz im Jordanschen Stil.

Die Ausweitung auch auf uneigentliche Bewegungen wurde Schoenflies im Jahre 1887 durch F. Klein nahegelegt.²⁹ Neben dem in diese Richtung fortgesetzten Studium der Erweiterungsbedingungen beschäftigte er sich mit den gängigen Kristallstrukturtheorien (1888b) und den mit den Gruppen verbundenen "*regulären Raumteilungen*" (räumlichen Pflasterungen mit ziegeltransitiver Symmetriegruppe) (1888a). In der letztgenannten Arbeit gab er eine Methode zur Herleitung von Fundamentalbereichen einer Sohnckeschen Gruppe G aus den Basiszellen der Translationsuntergruppe Γ durch sukzessive Unterteilung an, die einer aufsteigenden Kette von Untergruppen

$$\Gamma < G_1 < G_2 < \dots < G$$

entsprach. Ist für eine Untergruppe $H < G$ etwa S ein Fundamentalbereich, so ist ja ein Fundamentalbereich R von G durch kongruente Unterteilung von S zu erhalten

$$S = \bigcup_{1 \leq i \leq m} g_i(R), \text{ mit } g_1, \dots, g_m \text{ Repräsentanten von } G/H$$

Gegen Ende der Arbeit wurde die Problematik der Erweiterung der Bewegungsgruppe G durch orientierungsumkehrende Isometrien zu G^* angesprochen, durch die eine Unterteilung des Fundamentalbereichs von G in zwei, sich berührende "spiegelbildliche Polyeder" induziert wird.

Auf diese Überlegungen baute Schoenflies' "Beitrag zur Theorie der Krystallstruktur" auf (1888b), in dem er die *Vorteile einer Beschreibung der Kristallstruktur durch reguläre Raumteilungen* darlegte. Diese setzte im Unterschied zu Sohnckes Auffassung keine spezifische Hypothese für die empirisch immer noch völlig ungeklärte Mikrostruktur des Kristallaufbaus voraus und stellte nach Schoenflies' Ansicht daher eine geeignetere, *sowohl mit*

unterschiedlichen Varianten der atomistischen als auch der dynamistischen Materieauffassung verträgliche Mathematisierung der Kristallstruktur dar.³⁰ Beiläufig gab er an, nunmehr durch Unterteilung der Fundamentalbereiche der Sohnckeschen Gruppen 236 (!) Typen diskreter Raumgruppen konstruiert zu haben, deren genauere Darstellung er für eine spätere Arbeit ankündigte. Bei seiner ersten heuristischen Erkundung der kristallographischen Raumgruppen arbeitete er also anscheinend ähnlich wie Fedorov mit Methoden der geometrischen Kristallographie. Erst bei seiner Ausarbeitung gewannen Gruppenkonzepte die spätere herausragende Bedeutung.

Die angekündigte, im November 1888 im Manuskript fertiggestellte, weitere Arbeit erschien etwa ein Jahr später in den *Mathematischen Annalen* (Schoenflies 1889). Schoenflies diskutierte hier die Erweiterung einer Sohnckeschen Gruppe G mit Translationsgitter Γ durch eine "symmetrische Operation" $\sigma \in \text{Isom}^-(\mathbb{E}^3)$ zu $G^* = \langle G, \sigma \rangle$. Dabei verwendete er eine naheliegende Verallgemeinerung des Erweiterbarkeitskriteriums, das auch orientierungsumkehrende Transformationen zuließ (1889, 174f.), sowie die Beobachtung, daß σ als eine der folgenden Operationen angenommen werden kann:

- reine Spiegelung an der Ebene S , $\sigma =: S(0)$,
- Drehspiegelung an S mit Winkel α , $\sigma =: S(\alpha)$,
- speziell $\sigma = S(\pi) = i$ (Punktinversion),
- Schubspiegelung an S mit translativer Komponente t , $\sigma =: S(t)$ (1889, 176).

Er überprüfte die so erzeugten Gruppen nach einem intuitiv formulierten Kriterium (ebda., 171) auf "geometrische Identität" und erhielt als Resultat eine *Liste von 227 kristallographischen Raumgruppen*, die zum Teil sehr komprimiert angegeben waren, häufig sogar nur in summarischen Andeutungen für mehrere analog erzeugbare Gruppen in einem Absatz.

Gleich zu Beginn seiner Liste entgingen Schoenflies zwei Raumgruppen. Zunächst bemerkte er zutreffend, daß bei Erweiterung einer reinen Translationsgruppe $G = \Gamma$ lediglich die Operationen $\sigma = i, S(0), S(t)$ in Frage kommen. Während bei $\sigma = i$ das generische Gitter triklin ist, setzen die Fälle $\sigma = S(0), S(t)$ ein monoklines Gitter voraus, das von zweierlei Raumgittertyp, $2P$ oder $2I$ (in Bravais-Notation Typ 6/1, 6/2 — vgl. §3.3), sein kann. Schoenflies übersah jedoch den stillschweigenden Übergang zu monoklinen Raumgittern bei Erweiterung durch $\sigma = S(0), S(t)$ und die daraus folgende Aufspaltung des Gittertyps. So erhielt er lediglich die Gruppen $P\bar{1}, Pm, Pa$; nicht jedoch Im und Ia (in (Schoenflies 1891a) C_s^3, C_s^4).³¹

Trotz der Knappheit seiner Darstellung entging Schoenflies lediglich eine weitere Raumgruppe. Bei der Erweiterung der Sohnckeschen Gruppen der Kristallklasse T ($G = I23, F23, P23, I2_13, P2_13$ — von Schoenflies in (1889) in dieser Reihenfolge als T_1, T_2, \dots, T_5 bezeichnet) hielt er lediglich

erweiternde Operationen $\sigma = S_h(0), S_d(0), S_{q,i}$ mit Spiegelungen an der "Horizontalebene" S_h und Diagonalebene S_d der jeweiligen Elementarzelle für notwendig. Auf diese Weise erhielt er die Raumgruppen der Kristallklassen T_h und T_d bis auf eine Klasse von T_d , nämlich $I\bar{4}3d$. Sie wäre bei seiner Vorgehensweise als Erweiterung von $I2_13$ (in (1889) als T_4 bezeichnet) durch eine Schubspiegelung $S(1/2(a+b+c))$ bzw. d in internationaler kristallographischer Notation an einer Diagonalebene $(1, -1, 0)$ zu erhalten gewesen:

$$I\bar{4}3d = \langle I2_13, d \rangle \quad (T_d^6 \text{ in Schoenflies 1891a}).^{32}$$

Da insgesamt also 3 der 230 Raumgruppentypen fehlten, scheint Schoenflies' Zusammenfassung der Arbeit auf den ersten Blick immanent schlüssig:

"... (So) gelangen wir zu dem Resultat, dass es im ganzen 227 Gruppen von Transformationen giebt, welche eine räumliche Translationsgruppe besitzen und den Raum congruent oder symmetrisch in sich überführen. Unter ihnen giebt es 65 Gruppen von Bewegungen und 162 Gruppen, die auch symmetrische Operationen enthalten."
(Schoenflies 1889, 203)

Dieses Resümee erweist sich jedoch bei näherem Hinsehen nicht nur als "objektiv" verkehrt; es war darüberhinaus selbst als Beschreibung des Inhalts der Arbeit nur "zufällig" richtig, also auch in dieser Richtung irreführend. Das mußte Schoenflies in seiner Korrespondenz mit Fedorov Ende 1890/Anfang 1891 selber feststellen. Bei der Abzählung der aufgelisteten Gruppen hatten sich nämlich zwei Fehler gegenseitig kompensiert — eine unbemerkte Identität zweier Gruppen³³ und das Übersehen einer lediglich "im Prinzip" (d.h. in einer summarischen Aufzählung) enthaltenen Gruppe.³⁴

Trotz ihrer Mängel — komprimierte Darstellung bis zur Unverständlichkeit einzelner Passagen (insbesondere bei der Erweiterung Sohnckescher Gruppen mit zyklischer Kristallklasse) und Unvollständigkeit der Liste — *stellte diese Arbeit (Schoenflies 1889) den ersten bedeutenden Schritt zu einer konstruktiven Klassifikation der kristallographischen Raumgruppen dar.* Die explizite Verwendung von Konzepten der geometrischen Gruppentheorie wurde in dieser auf Bravais aufbauenden und dennoch für dynamistische Hypothesen offenen Erweiterung der mathematisch-kristallographischen Theoriebildung entscheidend. Sie gab der von Schoenflies angestrebten Theorieerweiterung Sprache, operatives Medium und methodische Ideen. Allerdings löste die Verwendung gruppentheoretischer Konzepte nicht gewissermaßen als "deus ex machina" die Probleme der eindeutigen symbolischen Repräsentation und der Vollständigkeit der Ergebnisse. Eine vollständige Liste der kristallographischen Raumsymmetriesysteme wurde — wie um diese Einschränkung zu pointieren — auf anderem Wege zuerst von E.S. Fedorov erreicht, der fast gleichzeitig und unabhängig von Schoenflies mit seiner Klassifikation begann und nach der Eröffnung eines wissenschaftlichen Briefaustauschs mit Schoenflies seinem Korrespondenten stets ein wenig voraus war.

5.4 Fedorovs Entdeckung der 230 kristallographischen Raumgruppentypen und seine Kristallstrukturtheorie

Fedorov arbeitete, noch bevor er von Schoenflies im Sommer 1890 dessen Arbeit (1889) zugesandt bekam (Schoenflies an Fedorov, 4.7.1890), in Fortsetzung seiner kristallographischen Studien der 1880er Jahre an einer Symmetrieklassifikation der "regelmäßigen Figuresysteme". Im Laufe des Jahres 1890 erzielte er ein Ergebnis, das unabhängig von (Schoenflies 1889) und vollständiger als dieses war, das er zur Sicherung der Priorität im September/Oktober 1890 als Vorabdruck an Vertreter des Fachgebietes, darunter auch A. Schoenflies, verschickte (Fedorov an Schoenflies 30.9.1890 alten Stils).³⁵ Die Arbeit erschien im folgenden Jahr, ergänzt durch eine Korrekturnote, in den Verhandlungen der St. Petersburger Mineralogischen Gesellschaft unter dem Titel "Symmetrie der regelmäßigen Figuresysteme (Simmetrija pravil'nich sistem figur)" (1890/91a, b).

Fedorov schloß dabei in verschiedener Hinsicht an seine Arbeiten der 1880er Jahre an, so etwa mit der Definition eines *regulären Figuresystems*, in der er die in (1885) gegebene Erklärung wieder aufnahm und präzierte:

"Unter einem regelmässigen Systeme der Figuren verstehe ich eine solche nach allen Richtungen unendliche Gesamtheit der endlichen Figuren, dass, wenn wir zwei derselben nach den Symmetriegesetzen zur Deckung bringen, sich dadurch auch das ganze System deckt." (Fedorov 1890/91a, 10; Fedorovs Übersetzung in 1892, 40)³⁶

Diese "Definition" erhält ihre volle Bedeutung natürlich erst aus ihrem Kontext. Präzisieren wir zunächst einmal "endliche Figur" F im Sinne einer beschränkten Teilmenge des E^3 , "System von Figuren" durch eine abzählbare Menge F solcher Teilmengen, so setzte Fedorov bei einem "regelmässigen" Figuresystem stillschweigend stets die (eigentliche oder uneigentliche) Kongruenz zweier Figuren $F', F'' \in F$ voraus. Die Fortsetzbarkeitsforderung von Symmetrieeoperationen zweier Figuren auf solche des ganzen Figuresystems F implizierte für Fedorov daher insbesondere die Transitivität der Symmetriegruppe von F . Die Forderung an das Figuresystem "... nach allen Richtungen unendlich ..." schränkte die Symmetriegruppe von F auf solche mit Translationsgruppe von maximalen Rang (kristallographische Gruppen) ein. Da jede Kongruenzoperation von Figuren auf ganz F fortsetzbar sein soll, ist darüberhinaus der Stabilisator einer Figur F in der Symmetriegruppe von F mit der vollen orthogonalen Symmetrie von F identisch. Wir können also neu formulieren:

Definition 3 (Fedorov 1890/91a):

Ein *regelmäßiges (reguläres) Figuresystem* des E^3 besteht aus einer abzählbaren Menge F beschränkter, untereinander kongruenter Teilmengen des E^3 , für deren Symmetriegruppe $G = \text{Symm}(F)$ gilt:

- (i) G operiert transitiv auf F .
- (ii) G enthält die volle orthogonale Symmetriegruppe einer (charakteristischen) Figur $F \in F$.
- (iii) G hat eine Translationsuntergruppe maximalen Rangs (ist kristallographisch).

Häufig betrachtete Fedorov anstelle allgemeiner Figuresysteme (monoeidrische) Pflasterungen.

Fedorov schränkte also durch die Regelmäßigkeitsforderung nicht gerade sehr deutlich auf *Pflasterungen des \mathbb{E}_3 mit ziegeltransitiver Symmetriegruppe ein (isoeidrische Pflasterung), bei denen der Stabilisator eines Ziegels in der Symmetriegruppe der Pflasterung mit dessen voller orthogonaler Symmetrie übereinstimmt*. Wir werden im folgenden die Formulierung “*reguläre Pflasterung*” — abweichend von der in der modernen Literatur verwendeten³⁷ — im Fedorovschen Sinne eines regulären Figuresystems einsetzen.

Die zulässigen “Symmetriegesetze”, auf die Fedorov im angegebenen Zitat Bezug nahm, präziserte er durch die Diskussion möglicher zugehöriger *Symmetrieelemente*:

- “Deckungsachsen” (Drehungen oder Schraubungen),
- “Symmetrieebenen” (einfache oder Gleitspiegelungen), “Achsen/Ebenen kombinierter Symmetrie” (Drehspiegelungen) (Fedorov 1890/91/1971, 52).

Die Gesamtheit dieser Symmetrieelemente faßte er wiederum unter der Formulierung “*das Symmetriegesetz des Systems*” — im Gegensatz zu “den Symmetriegesetzen” (Plural) wie oben — zusammen:

“Nachdem wir uns vorgestellt haben, wir hätten alle mögliche Deckoperationen (wörtlich “Deckbewegungen”, hier aber alle Deckoperationen eines regulären Figuresystems, E.S.) ausgeführt, erhalten wir dadurch die Gesamtheit aller dieser Symmetrieelemente, die auf wohlbestimmte Weise im Raume angeordnet sind und vollkommen genau das Symmetriegesetz des Systems konstituieren. Dieses Gesetz wird mit dem Gesetz der Symmetrie eines gewissen regelmäßigen Figuresystems und demjenigen der Symmetrie eines daraus abgeleiteten regelmäßigen Punktesystems völlig identisch sein. Gemäß diesem Gesetz können wir im Raume nicht nur Punkte, Punktgruppen und beliebige Figuren verteilen, sondern sogar ganz allgemein beliebige geometrische Gestalten.” (Fedorov 1890/91a, 11)³⁸

Fedorov bildete so durch Abstraktion aus der Gesamtheit der Symmetrieelemente eines geometrischen Figuresystems das *Konzept eines*

Raumsymmetriesystems. Diesem billigte er eine gewissen Eigenständigkeit ausdrücklich zu, sah es aber im ganzen als bloßes *Hilfsinstrument zum Studium und zur Klassifikation der regulären Figuresysteme* an. Später umging er sogar wieder den sprachlichen Rückgriff des abstrakten Konzeptes und zog dessen indirekte Benennung über reguläre Punktesysteme vor (im Gegensatz zu Sohncke verstand er darunter auch “doppelte”, d.h. solche mit orientierungsvertauschenden Symmetrien) (Fedorov 1896 u.a.).

Ähnlich wie Jordan, Sohncke oder Schoenflies charakterisierte Fedorov nun die Kristallklasse (“*Symmetriearart*” oder auch “*Syngonie*”) eines regulären Figuresystems mittels der Zuordnung des analogen parallelen Symmetrieelements durch einen festen Punkt zu jedem des regulären Figuresystems, also durch das naheliegende geometrische Äquivalent zum Bild des Homomorphismus

$$\rho : G \rightarrow O(3, \mathbb{R}) \text{ (} G \text{ Decktransformationsgruppe des Figuresystems).}$$

Er unterschied drei große Klassen regulärer Figuresysteme und der zugehörigen “Symmetriegesetze” je nachdem, wie Symmetrieelemente der “Symmetriearart” (Kristallklasse) bei ihrer räumlichen Realisierung nach Maßgabe des betreffenden “Symmetriegesetzes” (also in der Raumgruppe) zueinander liegen (Fedorov 1890/91/1971, 56ff.):

(i) *Symmorphe Systeme* G (Kristallklasse G_o):

Die Symmetrieelemente der Kristallklasse lassen sich durch Elemente des Raumsymmetriesystems so realisieren, daß sie sich in einem Punkt (Symmetriezentrum der orthogonalen Symmetrie) schneiden und keine Translationskomponente enthalten. In diesem Fall entsteht die Raumgruppe G als semidirektes Produkt $G \cong \Gamma * G_o$.³⁹

(ii) *Hemisymmorphe Systeme* G^* (Kristallklasse G_o^*):

Alle eigentlichen Symmetrien von $G_o := G_o^* \cap SO(3, \mathbb{R})$ lassen sich durch Achsen realisieren, die durch einen Punkt gehen. G^* entsteht daraus durch Erweiterung mit einer Gleitspiegelung, insgesamt also aus dem Translationsgitter durch zwei Erweiterungsschritte

$$\Gamma < \Gamma * G_o < G^*.$$

Die erste davon ist semidirekt, die zweite eine verschränkte \mathbb{Z}_2 -Erweiterung mit nichttrivialem Faktorensystem.

(iii) *Asymmorphe Systeme*:

Sonstige Fälle, d.h. verschränkte Erweiterungen, die nicht unter (i), (ii) fallen.

Diese Unterscheidung erschien Fedorov aufgrund seiner Hypothesen über die Kristallstruktur als wesentlich (“Parallelität der Kristallmolekel” — siehe unten).

Explizit führte er die *Äquivalenz räumlicher Symmetriesysteme* (im Sinne affiner Äquivalenz) über kontinuierliche Abänderung der metrischen Parameter des Translationsgitters ein (Fedorov 1890/91a, 17; 1971, 56). Zwei Systeme, die erst nach Spiegelung äquivalent werden, nannte er “analog” (enantiomorph).

Für die Klassifikation räumlicher Symmetriesysteme entwickelte er eine theoretische Grundlage, die im wesentlichen aus folgenden Einsichten über allgemeine Gesetzmäßigkeiten der Konfiguration der Symmetrieelemente bestand:

Theorem 2 (Fedorov 1890/91/1971, 57ff.):

- (i) Dreh- und Schraubenachsen (“Deckachsen”) regulärer Figuresysteme sind stets von der Ordnung $p = 2, 3, 4, 6$.
- (ii) Richtungen von Dreh- und Schraubenachsen sind stets auch Richtungen von Decktranslationen.
- (iii) Zu jeder Dreh- und Schraubenachse gibt es zwei unabhängige orthogonale Translationen.

Beim Beweis von Teil (ii) und (iii) des Theorems *setzte Fedorov allerdings stillschweigend die Existenz eines Translationsgitters voraus* (ebda., 59f.) und damit eine fundamentale Eigenschaft kristallographischer Gruppen, die bei aller geometrisch-intuitiven Suggestivität einem mathematischen Beweis einige Schwierigkeiten entgegenstellt. Das mußte wenig später Schoenflies bei der Ausarbeitung seines Buches (1891) erfahren (vgl. §5.5).

Über Symmetrieebenen beobachtete Fedorov

Theorem 3 (Fedorov 1890/91/1971, 60f.):

- (i) Jede Symmetrieebene E eines regulären Figuresystems ist Netzebene der zugehörigen Symmetriegruppe (d.h. es gibt zwei linear unabhängige Translationen der Gruppe parallel E), und orthogonal zu E gibt es stets eine Decktranslation τ .
- (ii) Bei E, τ wie in (i) gibt es stets eine Symmetrieebene E' parallel E im Abstand $|\tau|/2$.

Diese beiden Theoreme und eine Beobachtung über konjugierte Translationen zu Drehachsen mit nichtorthogonaler konjugierter Netzebene⁴⁰ genügten Fedorov als theoretische Grundlage für seine vollständige Herleitung der dreidimensionalen kristallographischen Raumgruppentypen (“Symmetrie

regulärer Figuresysteme"). Dabei erzeugte er zunächst die "einfachen Systeme" (Sohnckesche Gruppen) aus zwei unabhängigen Dreh- oder Schraubenachsen sowie Translationen und erweiterte diese dann durch Symmetrie- oder Gleitspiegelungsebenen.

Zur Beschreibung räumlicher Symmetriekonfigurationen regulärer Figuresysteme setzte Fedorov seine kurz zuvor entwickelte Symbolik mehrwertiger Koordinatenterme ein. Die Kunst bestand nun in einer solchen Auswahl der Koordinaten, daß die "Symmetrieart" (Kristallklasse) des räumlichen Systems möglichst einfach aus dem Symbol abzulesen war. Dazu verwandte er insbesondere eine abkürzende Notation der Translationskomponenten, etwa für ein reines (Punkt- bzw. Translations-) Gitter ausgehend vom Punkt

$$\begin{aligned} y = b & & z = c & & v = d & \text{durch} \\ y = b + \lambda & & z = c + \lambda_0 & & v = d + \lambda_1 \end{aligned}$$

wobei er davon ausging, daß die Translationsterme λ , λ_0 , λ_1 mit beliebigen Koeffizienten aus \mathbb{Z} versehen werden können (1890/91/1971, 61f.).

Damit erhielten die Symmetrien der symmorphen Systeme besonders einfache Symbole, wie etwa $P2 = C_2^1$ als 3. symmorphes System $3s$ durch

$$y = b + \lambda, \quad z = n^k c + \lambda_0, \quad v = n^k d + \lambda_1,$$

$P23 = T^1$ als $59s$ durch

$$x_0 = n^j a_i^3 + \lambda, \quad x_1 = n^k a_{i+1}^3 + \lambda, \quad x_2 = n^l a_{i+2}^3 + \lambda$$

und $Pm3m = O_h^1$ als $71s$ durch

$$\begin{aligned} x_0 = n^j a_i^3 + \lambda, \quad x_1 = n^k a_{i+n^m}^3 + \lambda_1, \quad x_2 = n^l a_{i+2n^m}^3 + \lambda_2 \\ (n = -1; \quad j, k, l, m = 0, 1). \end{aligned}$$

Seiten- und innenzentrierte Gitter deutete er durch halbzählige Elementartranslationen mit geeigneten Koeffizientenkombinationen an, z.B. $C222 = D_2^6$ als $10s$ durch

$$y = n^k b + \frac{\lambda}{2}, \quad z = n^{k+j} c + f \frac{\lambda_0}{2}, \quad v = n^j d + f \frac{\lambda_1}{2},$$

$I222 = D_2^8$ als $11s$ durch

$$y = n^k b + f \frac{\lambda}{2}, \quad z = n^{k+j} c + f \frac{\lambda_0}{2}, \quad v = n^j d + f \frac{\lambda_1}{2},$$

und $F222 = D_2^7$ als $12s$ durch

$$y = n^k + g \frac{\lambda}{2}, \quad z = n^{k+j}c + (f+g) \frac{\lambda_0}{2}, \quad v = n^j d + f \frac{\lambda_1}{2},$$

(n, k, j wie oben ; $f, g = 0, 1$).

Im Falle des Auftretens von Schraub- oder Gleitkomponenten bei hemimorphen bzw. asymmorphen Systemen konnte Fedorov in seinen Symmetrietermen die Verbindung orthogonaler Symmetrieelemente mit Translationskomponenten (in der Raumgruppe) durch Angabe der ganzzahligen Anteile von Elementartranslationen mit den entsprechenden Koeffizienten relativ leicht andeuten. Zum Beispiel $P2_1 = C_s^2$ als erstes asymmorphes System $1a$ durch

$$y = b + j \frac{\lambda}{2}, \quad z = n^j c + \lambda_0, \quad v = n^j a + \lambda_1,$$

$Ia = Bb = C_s^4$ als zweites hemimorphes System $2h$ durch

$$y = n^k b + f \frac{\lambda}{2}, \quad z = c + f \frac{\lambda_0}{2}, \quad v = d + k \frac{\lambda_1}{2},$$

$P2_13 = T^4$ als $89a$ durch

$$x_0 = n^j a_i^3 + (j+k) \frac{\lambda}{2}, \quad x_1 = n^k a_{i+1}^3 + j \frac{\lambda}{2}, \quad x_2 = n^{j+k} a_{i+2}^3 + k \frac{\lambda}{2},$$

$Pa3 = T_h^6$ als $91a$ durch

$$x_0 = n^j a_i^3 + l \frac{\lambda}{2}, \quad x_1 = n^k a_{i+1}^3 + j \frac{\lambda}{2}, \quad x_2 = n^l a_{i+2}^3 + k \frac{\lambda}{2}$$

und so weiter (n, k, j, l wie oben).

Dabei verstand sich eine unendliche Vieldeutigkeit des angegebenen Symbols (zusätzlich zur endlichen Vieldeutigkeit durch Variation des Index i und der Parameter j, k, l, m) durch zusätzliche Addition beliebiger ganzzahliger Linearkombinationen aus Translationstermen "von selbst". Die Symbolik setzte also für ihre korrekte Verwendung ein gutes Kontextwissen voraus und war alles andere als eindeutig. Fedorov erreichte desungeachtet eine hohe Virtuosität in ihrer Verwendung zur Identifizierung und Konstruktion der Symmetrien regulärer Figuresysteme. Das zeigt sich im Spätherbst und Winter 1890, als Schoenflies und Fedorov um die Klärung der Unstimmigkeiten bemüht waren, die zwischen ihren Ergebnissen bei der Klassifikation der kristallographischen Raumgruppentypen aufgetreten waren.

Diese Unstimmigkeiten resultierten aus den in den jeweiligen Listen (Schoenflies 1889, Fedorov 1890/91a) enthaltenen — zunächst unerkannten — Doppelzählungen und Lücken (vgl. §5.3). Fedorov legte im Herbst 1890 seine Arbeit vor und ließ einige Vorabdrucke zum Versand herstellen, bevor sie in den "Zapiski" (Verhandlungen) der Mineralogischen Gesellschaft St. Petersburg im folgenden Jahr zur weiteren Verbreitung gedruckt wurde. Im Vorwort kündigte er zunächst die Ableitung und Angabe von 229 regulären Systemen an (Fedorov 1890/91a, 4). Tatsächlich enthielt die Liste jedoch eine Doppelnennung ($Fmm2 = C_{2v}^{18}$ als $16h$ und $17s$ — s.u.); real enthielt sie also 228 Raumgruppentypen. Es fehlten die Gruppen $Ibca = D_{2h}^2$ und $I\bar{4}3d = T_d^6$.

Im Oktober 1890 entdeckte er — wahrscheinlich durch Vergleich mit der Liste in (Schoenflies 1889) — eine der noch fehlenden Gruppen $Ibca = D_{2h}^{27}$, die er zunächst als hemimorphes System ansah (Fedorov 1891b, 115)⁴¹, und erst später als asymmorph identifizierte.⁴² Er glaubte nun Ende Oktober/Anfang November (alten Stils)⁴³ eine Liste von 230 Raumsymmetriesystemen zu besitzen (Fedorov 1891b, Fedorov an Schoenflies o.D. #235). Aber schon Mitte November (alten Stils) entdeckte er die Doppelzählung ($16h = 17s$) und reduzierte seine Zählung auf die tatsächlich in seiner Liste enthaltene Anzahl von 229 (Fedorov an Schoenflies 25.11.1890). Etwa zur selben Zeit fand er das letzte noch ausstehende Symmetriesystem $I\bar{4}3d = T_d^6$, das er als "103a" (asymmorph) klassifizierte,⁴⁴ und hatte nun eine korrekte, vollständige Liste der 230 kristallographischen Raumgruppentypen.⁴⁵

Da für eine fundierte Auswertung der Rolle des Gruppenbegriffs bei der Entdeckung der Raumgruppen der genaue Ablauf der Klärung der Unstimmigkeiten zwischen Fedorov und Schoenflies vom Oktober 1890 bis zum März 1891 von Bedeutung erscheint, mag eine nochmalige, nunmehr etwas detailliertere Zusammenfassung ihrer Korrespondenz in dieser entscheidenden Phase angebracht sein.

Nachdem Schoenflies im Juli 1890 seine Arbeiten (1887a, b; 1889) Fedorov zugesandt hatte, erhielt er Mitte Oktober (neuen Stils) den Vorabdruck von Fedorovs (1890/91a). Es ergab sich nun folgender Ablauf:

(i) *Ausgangssituation Mitte Oktober 1890 (neuen Stils)*

Schoenflies besaß eine vermeintliche und tatsächliche 227er Liste von Raumgruppen. Ihm fehlten $Im = C_s^4$, $Ia = C_s^4$, $I\bar{4}3d = T_d^6$. Bei den zyklischen Gruppen war eine weniger gezählt als "im Prinzip" angegeben, dafür gab es die Doppelnennung von $P\bar{4}2_1c = D_{2d}^4$ als V_d^8 und V_q^8 (vgl. §5.3).

Fedorov hatte eine vermeintliche 229er, tatsächlich aber eine 228er Liste. Ihm fehlten $Ibca = D_{2h}^{27}$ und $I\bar{4}3d = T_d^6$; andererseits gab es eine Doppelnennung $Fmm2 = C_{2v}^{18}$ als $16h$ und $17s$. Fedorov wies Schoenflies in seiner Arbeit auf dessen Doppelnennung ($V_8^d = V_8^q$) und die fehlenden Gruppen Im , Ia hin (Fedorov 1890/91a, 4, Anm. 2).⁴⁶

(ii) *Aufstellung scheinbarer 230er Listen, Oktober bis etwa Mitte November (neuen Stils)*

Fedorov entdeckte durch Vergleich mit (Schoenflies 1889) die fehlende Gruppe $Ibca = D_{2h}^{27}$, erhöhte seine vermeintliche Anzahl auf 230 und teilte dies Schoenflies mit (Fedorov an Schoenflies, #235, etwa 11. bis 14.11.1890 neuen Stils geschrieben⁴⁷).

Schoenflies verstand zunächst Fedorovs Einwände bezüglich der Doppelnennung und der beiden fehlenden Gruppen nicht (Schoenflies an Fedorov 29.10.1890), zum Teil aus sprachlichen Gründen.⁴⁸ Fedorov erläuterte seinen Hinweis (Fedorov an Schoenflies 21.10./ 2.11.1890). Daraufhin korrigierte Schoenflies seine Doppelnennung ($V_8^d = V_8^g$), glaubte aber zunächst, daß die von Fedorov zusätzlich angegebenen "Symbole" vom Standpunkt der Raumgruppen nichts wesentlich neues brächten (Schoenflies an Fedorov 10.11.1890) und nur Punktmuster ("Molekelhaufen") desselben Symmetrietyps darstellen. Fedorov trat dieser Auffassung durch Hinweis auf seinen Äquivalenzbegriff der Systeme entgegen, dem in Schoenflies' Nomenklatur in etwa "geometrisch identisch" entspräche (Fedorov an Schoenflies #242, etwa 14. bis 17.11.1890 neuen Stils).

Schoenflies akzeptierte bei erneuter Kontrolle seiner Argumentation die Existenz der beiden Raumgruppen⁴⁹ und glaubte, bei seiner globalen Angabe der Gruppen mit zyklischer Kristallklasse noch eine weitere "im Prinzip" genannte nicht gezählt zu haben. So erhielt er scheinbar eine 230er Liste und glaubte, daß er und Fedorov "nunmehr zu der erwünschten Übereinstimmung gelangt" wären (Schoenflies an Fedorov 17.11.1890, 28.11.1890). Tatsächlich fehlte beiden noch die Kenntnis von $I\bar{4}3d = T_d^6$; andererseits gab es bei Fedorov noch eine explizite Doppelnennung ($16h = 17s$) und bei Schoenflies eine davon unabhängige Doppelzählung.

(iii) *Korrekturen und Aufstellung der endgültigen Liste der 230 Raumgruppentypen Mitte November 1890 bis März 1891*

Noch im November 1890 bemerkte Fedorov die in seiner Liste enthaltene Doppelnennung ($16h = 17s$); auf der anderen Seite entdeckte er anscheinend nur wenige Tage später den noch fehlenden Raumgruppentyp $I\bar{4}3d = T_d^6 (= 103a)$. Beide Korrekturen sowie die nunmehr endgültige Gesamtzahl von 230 Raumgruppentypen gab er in der Sitzung der Petersburger Mineralogischen Gesellschaft vom 16./28.11.1890⁵⁰ zu Protokoll (Fedorov 1890/91b).

Schoenflies teilte er in seinem Brief vom 25.11.1890 (alten Stiles?) lediglich seine eigene Doppelnennung und die in Schoenflies' Brief vom 28.11.1890 (#234) neu aufgetretene mit. Die neu entdeckte Gruppe

erwähnte Fedorov hingegen nicht, sondern sprach ausdrücklich von einer notwendigen Korrektur der Gesamtzahl auf 229.⁵¹ Schoenflies akzeptierte diese Korrektur unmittelbar darauf (Schoenflies an Fedorov 13.12.1890). Erst in einem nicht erhaltenen Brief vom 15./27.12.1890 informierte Fedorov Schoenflies von seiner neu entdeckten Raumsymmetriesystem 103a (= $I\bar{4}3d$).

Schoenflies hielt in seiner ersten Reaktion das neue Symmetriesystem für inkonsistent, glaubte also, daß es keine kristallographische Raumgruppe repräsentierte (Schoenflies an Fedorov 7.1.1891). Erst bei erneuter genauerer Prüfung erkannte er die Korrektheit des Fedorovschen Hinweises und konnte die Gruppe in seiner eigenen Darstellungsweise rekonstruieren (Schoenflies an Fedorov 17.3.1891). Die von Fedorov zwischen Mitte November und Mitte Dezember 1890 erreichte Klärung über den endgültigen Stand der Liste der Raumgruppentypen wurde also von Schoenflies im Zeitraum Mitte Dezember 1890 bis Mitte März 1891 schrittweise nachvollzogen.

Es ergibt sich damit sehr deutlich das *Bild eines technisch-konstruktiven Vorsprungs Fedorovs bei der Analyse der Lücken und Unzulänglichkeiten*, die bei der Raumgruppenklassifikation durch ihn und Schoenflies zunächst noch auftraten. Offenbar ergab sich dieser Vorsprung aus Fedorovs weit entwickeltem Verständnis regulärer Figuresysteme, kombiniert mit einer virtuoson Handhabung der Symbolik mehrdeutiger Terme zur Darstellung der Raumgruppensymmetrien. Schoenflies wurde dagegen im Zeitraum der Korrespondenz mit Fedorov dadurch behindert, daß seine symbolische Repräsentation der Raumgruppen in (1889) unvollständig war. Zwar arbeitete er mittlerweile bei der Vorbereitung des Buches (Schoenflies 1891a) eine verbesserte theoretische Grundlegung und eine vereinheitlichte neue Symbolik aus; das führte aber gerade während des Umbruches zu Schwierigkeiten mit der ihm mittlerweile selber obsolet erscheinenden Symbolik von (1889) (Schoenflies an Fedorov 28.11.1890, 106).

Es zeigt sich jedenfalls im Ergebnis, daß es bis auf eine Ausnahme ($Ibca = D_{2h}^{27}$) Fedorov war, der die Lücken und Doppelnennungen in seiner und Schoenflies' ursprünglichen Liste identifizierte. Die explizite Verwendung des Gruppenkonzeptes und die zugehörige theoretische Rahmung brachten also — solange dieses wie in den frühen Arbeiten von Schoenflies noch stark über geometrische Anschaulichkeit vermittelt war — nicht schon per se eine Verbesserung der Voraussetzungen für die Klassifikation der kristallographischen Raumsymmetriesysteme mit sich. *Insbesondere kann die explizite Verwendung gruppentheoretischer Überlegungen nicht als eine unabdingbare Voraussetzung der Klassifikation angesehen werden. Der vermittelte Einfluß von Gruppengesichtspunkten (Jordan — Sohncke — Fedorov) war offenbar als historische und methodische Vorbedingung für eine konstruktiv-pragmatische Klassifikation durchaus hinreichend, wenn sie wie bei Fedorov*

mit einer hinreichend ausgearbeiteten Analyse geometrischer Gestalten (hier der regulären Figurensysteme) verbunden war.

Etwa zur Zeit der Arbeit an der Raumgruppenklassifikation las Fedorov das Jordansche Mémoire über Bewegungsgruppen (1869) im Original. Das geht aus seiner wenig später verfaßten Arbeit über "Symmetrie in der Ebene (Simmetrija na plokosti)" (Fedorov 1891a) hervor, in der Fedorov die *erste vollständige Klassifikation der ebenen Ornamentgruppen* angab. Er erhielt sie aus einer Analyse, welche der 230 Raumgruppentypen bei Einschränkung auf eine Ebene auch dort "regelmässige Figurensysteme" induzieren. Fedorov fand, daß dies für 17 Systeme der Fall ist, und unterteilte diese dem Vorgehen im Raum analog in 13 symmorph (semidirekte Produkte aus Translationsnetz und orthogonaler Gruppe) und 4 asymmorph Systeme. Für jedes gab er ein zugehöriges mehrwertiges Symmetriesymbol an (1891a, 379–386), darüberhinaus Symmetriekarten⁵² der auftretenden Symmetrieelemente und — für die symmorphen Systeme — der möglichen zugehörigen Parallelogone (ebda., Tafel I, II).

In einer auswertenden Notiz verwies er auf die 13 von Sohncke (1874) und die 16 von Jordan (1869) angegebenen Ornamentgruppen und gab die Korrespondenz zwischen deren Ergebnissen und seinen eigenen an.⁵³ Jordan und Sohncke hatten dabei jeweils verschiedene Systeme übersehen. So standen in Fedorovs Arbeit keine gänzlich neue Ornamentgruppen; jedoch war er es, der die erste systematische Zusammenstellung gab.⁵⁴

Für Fedorov waren die Raumgruppen nicht schon an sich von Bedeutung für die Kristallstrukturtheorie, sondern lediglich als Durchgangsstation zur Analyse spezieller regulärer Pflasterungen, die seiner Ansicht nach als adäquate Mathematisierung der Kristallstruktur herangezogen werden sollten. Auch den von Sohncke eingenommen Gesichtspunkt der regulären Punktesysteme konnte er in dieser Hinsicht nicht teilen. Er grenzte stattdessen die Begriffe "regelmässiges Punktsystem" und "Kristallstrukturart" ausdrücklich gegeneinander ab, indem er betonte, daß vom Standpunkt der regulären Punktesysteme die Strukturunterscheidung allein aufgrund der "Verschiedenheit der räumlichen Lage der Symmetrieelemente" (also durch die Raumgruppe) erfolgt (Fedorov 1892, 682; 1893a, 590). Die Unterscheidung der Kristallstrukturen allein nach ihren Raumsymmetriesystemen erschien ihm jedoch nicht als ausreichend. Seiner Auffassung nach sollte außer der Raumgruppe eine zugehörige Pflasterung ("Stereoederteilung") und eine übergeordnete Paralleloederteilung betrachtet werden.

"Wird aber in Betracht gezogen, dass die Structurarten als verschiedenen bezeichnet werden müssen, wenn die Paralleloeder verschieden, wengleich die Symmetrieelemente vollständig identisch wären, so hat also die Theorie der regulären Raumtheilung uns zu einem ganz neuen Standpunkt geführt, und zwar:

Eine mögliche Kristallstrukturart ist (nicht nur durch Symmetrieelemente, sondern auch) durch die normalen Paralleloeder und das Gesetz der Theilung derselben in Stereoeder bestimmt.” (Fedorov 1892, 68)

Die Paralleloeder kamen dadurch ins Spiel, daß Fedorov Homogenität und Symmetrie der Kristalle aus einem Aufbau der Kristallsubstanz aus “Kristallmolekeln” erklären wollte, die von den chemischen Molekülen verschieden sind. Insbesondere entwickelte er aufgrund der Homogenität der Kristallsubstanz die *Parallelitätshypothese*

(*) “... dass die krystallinisch-homogene Substanz aus gleichen und gleich orientierten (d.h. sämtlich in paralleler Lage geordneten) Theilchen besteht, welche zusammen genommen den Raum lückenlos ausfüllen” (1896a, 117).

Zur mathematischen Modellierung der “Kristallmolekeln” kamen daher nach Fedorovs Ansicht lediglich Paralleloeder in Frage und, wie er annahm, sogar Normalparalleloeder. Dem Aufbau der “Kristallmolekeln” aus den chemischen Molekülen entsprach seiner Ansicht nach die Unterteilung der Paralleloeder in Stereoeder einer regulären Pflasterung (1893a, 592; 1896, 117ff.). Ihm erschien daher als wichtigste Aufgabe der mathematischen Kristallstrukturtheorie, Gebilde aus einer Paralleloederteilung (Definition 2b) und einer untergeordneten regulären Pflasterung zu studieren und zu klassifizieren. Die wichtigsten dabei verwendeten Konzepte seien in heutiger Sprechweise zusammengefaßt in

Definition 4 (Fedorov 1889/90/1971, 62ff; 1892, 68; 1896):

- a) Eine *Fedorovsche Strukturart* besteht aus einem Tripel (P, R, G) aus einer Paralleloederteilung P des \mathbb{E}^3 , einer P verfeinernden regulären Pflasterung R aus Ziegeln trivialer orthogonaler Symmetrie (Unterteilung in “Stereoeder”) und der zugehörigen Raumgruppe G (mit Translationsgitter Γ und Kristallklasse G_0), sodaß die Kristallklasse der Raumgruppe mit der orthogonalen Symmetrie H_o eines Paralleloeders von P übereinstimmt, $G_o = H_o$. R ist demnach reguläres Figurensystem (Pflasterung) zur einfach transitiv operierenden Gruppe G , P zur zugehörigen symmorphen Gruppe $G' \cong \mathbb{Z}^3 * G_0$.
- b) Eine *symmorphe Strukturart* liegt genau dann vor, wenn die Paralleloederteilung P invariant unter G ist ($G = \text{Isom}(P)$). Dann sind P und R reguläre Figurensysteme zu derselben Gruppe $G \cong \Gamma * G_o$.
- c) Eine *hemisymmorphe Strukturart* liegt genau dann vor, wenn es

- (i) eine unter G invariante Unterteilung P^* von P gibt, bei der jedes Paralleloeder von P in zwei spiegelsymmetrische zerfällt, während
- (ii) P selber nicht invariant unter G ist.

Die Gruppen G' und G von P und R haben dann eine Untergruppe des Index 2 gemeinsam.

- d) In allen anderen Fällen handelt es sich um *asymmorph*e Strukturarten.

Bei den symmorphen und hemimorphen Strukturarten unterschied Fedorov weiterhin "ordinäre" und "extraordinäre", je nachdem die Translationsgruppe Γ von G transitiv auf P operiert oder nicht (Fedorov 1896, 146).

Unter dem Gesichtspunkt seiner Parallelitätshypothese (*) erschienen ihm die asymmorphen Strukturarten als kristallographisch irrelevant ("unwahrscheinlich"), weil die dabei auftretenden Paralleloederteilungen P nicht invariant unter dem Raumsymmetriesystem G sind und daher die untergeordneten Stereoederteilungen R die Hypothese (*) nicht abzubilden gestatten (Fedorov 1896, 219). Ähnliches galt für die meisten der extraordinären Strukturarten mit Ausnahme von 15 extraordinären symmorphen Strukturarten der Kristallklassen C_i und C_{2h} , bei denen die "parallele" Lage der Paralleloeder auch bei Anwendung von Punktinversionen bzw. Drehungen der Ordnung 2 gewährleistet bleibt.

Trotz wenig ausgearbeiteter, das heißt implizit gehaltener, Klassifikationskriterien stellte Fedorov in seinen Arbeiten der 1890er Jahre eine umfangreiche Liste möglicher Strukturarten auf; in seiner Arbeit (1896) waren es schon 1182. *Davon erschienen Fedorov jedoch lediglich 246 als kristallographisch relevant ("wahrscheinlich")*: 131 ordinäre symmorph, 15 extraordinäre symmorph (Kristallklasse C_i und C_h) und 100 ordinäre hemimorph (Fedorov 1896, 218).

Die Klassifikation der kristallographischen Raumgruppentypen erschien Fedorov so zwar als wichtige Voraussetzung, keinesfalls aber als die letztlich entscheidende mathematische Grundlage seiner Kristallstrukturtheorie. Von den 230 Raumgruppentypen erschienen ihm nur die $73 + 54 = 127$ symmorphen und hemimorphen als kristallographisch relevant. Diese wiederum führten auf 246 "wahrscheinliche", also für die Kristallographie nach Fedorovs Ansicht potentiell verwendbare, Strukturarten. Aufgabe der zukünftigen messenden und empirischen Kristallographie war nun seiner Konzeption gemäß die Überprüfung der vorgeschlagenen Theorie, das heißt die Bestimmung von Strukturarten empirischer Kristalle in seinem Sinne.

Dieser Auffassung Fedorovs folgte die Mehrzahl der Mineralogen und Kristallographen allerdings nicht. Nach der Entdeckung der Röntgenstrahlbeugungsmethode im Jahre 1912 wurde sie durch die nun möglich gewordenen empirischen Strukturbestimmungen schnell erschüttert (vgl. §5.6). Schon eine

der ersten Strukturbestimmungen führten W.H. und W.L. Bragg beim Pyrit auf eine Atomgitteranordnung mit Symmetrie $Pa3 = T_d^6$. Fedorov reagierte darauf außerordentlich schnell und “undogmatisch”; indem er anerkannte, daß es sich um den Nachweis des realen Auftretens eines asymmorphen Systems handelte (Fedorov 1914) [Belov/Šafranovskij 1962]. Damit war seiner spezifischen Variante der Kristallstrukturtheorie weitgehend der Boden entzogen. Die offener gehaltene gruppentheoretische Auffassung samt den zugehörigen allgemeiner gehaltenen regulären Raumteilungen gewann nun entsprechend größere Bedeutung für die Entwicklung empirisch gestützter Strukturtheorien.

5.5 Schoenflies' systematische Darstellung der Theorie der kristallographischen Raumgruppen von 1891

Die gruppentheoretische Strukturtheorie der Kristallgeometrie fand in Schoenflies ihren ersten herausragenden Vertreter. Direkt nach Publikation seiner ersten Arbeit über kristallographische Raumgruppen in den Mathematischen Annalen (1889) machte er sich an die Arbeit für eine umfangreiche und ausführliche Darstellung in seinem Buchprojekt “Krystallsysteme und Krystallstructur” (Schoenflies 1891a). Das Manuskript für dieses Buch entstand in einem selten günstigen Zeitablauf, in dem Schoenflies die aus dem Briefwechsel mit Fedorov hervorgehenden neuen Kenntnisse über Lücken oder Doppelzählungen in seiner Liste von (1889) nahezu direkt übernehmen konnte. Er hatte schon am Buchmanuskript zu arbeiten begonnen, als der Briefwechsel in der zweiten Jahreshälfte 1889 in Gang kam (Schoenflies an Fedorov, 14.12.1889). Im Laufe des Voranschreitens wuchs das Projekt so an, daß das Manuskript dem Verlag in drei großen Sendungen stückweise übergeben und gedruckt wurde:

- die ersten 5 Bogen (Teil I) Mitte 1890 mit einer elementaren Einführung in die geometrische Gruppentheorie, Arbeit in $O(3, \mathbb{R})$, Ableitung der Kristallklassen, Kristallsysteme⁵⁵ und Kristallformen (Fedorov/Schoenflies 1970, 93, 115),
- die nächsten 5 Bogen (Kap. 1 bis 7/8 von Teil II) gegen Ende 1890 mit einer Darstellung der Bravaisgittertheorie, Arbeit in $\text{Isom}(\mathbb{E}^3)$, dem gruppentheoretischen Instrumentarium für die Erweiterung räumlicher Translationsgruppen zu kristallographischen Raumgruppen (Kap. 6), Ableitung der Gruppen des monoklinen und triklinen Systems (Kap. 7) sowie evtl. des orthorhombischen,
- und schließlich der gesamte Rest bis zum späten Frühling (März/April) 1891 mit der Ableitung der Raumgruppen in Kristallsystemen höherer Symmetrie, einer Diskussion der gängigen Kristallstrukturtheorien vom Standpunkt der Raumgruppen und Raumteilungen sowie einem

Nachtrag eines (unvollständigen) Beweises für die Existenz (dreidimensionaler) Translationsgitter in kristallographischen Raumgruppen (Fedorov/Schoenflies 1970, 115).

Da sich das Buch an ein breites Publikum, nicht nur an Mathematiker, richtete, erklärte Schoenflies den damals außerhalb der Mathematik noch kaum bekannten Gruppenbegriff überaus motivierend, fast zögernd, in zwei Stufen aus dem geometrischen Kontext heraus. Nachdem er die Komposition eigentlicher und uneigentlicher Bewegungen aus $O(3, \mathbb{R})$ ("Operationen 1. und 2. Art") und ihre Verwendung zur Beschreibung von Symmetrierelationen diskutiert hatte (1891a, 20–53), führte er das Konzept einer "*endlichen Gruppe von Operationen*" ein (Schoenflies 1891a, 54). Mit dieser Formulierung waren im wesentlichen endliche orthogonale Gruppen gemeint; jedoch blieb die Formulierung allgemein genug, um endliche Gruppen von Bijektionen beliebiger (gegebenenfalls strukturierter) Mengen einzuschließen.⁵⁶ Das reichte als konzeptioneller Rahmen für die Ableitung der Kristallklassen und Systeme aus. Dem fügte er noch eine Diskussion der einfachen Kristallgestalten hinzu und verwies auf die Möglichkeit, die Gestaltklassifikation auch für beliebige endliche orthogonale Gruppen durchzuführen. Ein solches Unterfangen hätte freilich den Rahmen seines Buches gesprengt; daher verwies er in diesem Punkt auf Hess' "Lehre von der Kugelteilung" (1883). Eine kurze Diskussion der Bedeutung der Punktsymmetrien für die Kristallphysik schloß den ersten Teil seines Buches ab.

Bei der Darstellung der "Theorie der Krystalstructure" im zweiten Teil verallgemeinerte Schoenflies wiederum sehr langsam und kontextbezogen die von ihm verwendeten Begriffe. Erst nach der Diskussion der Translationsgruppen und der Komposition von Bewegungen und "Operationen 2. Art" von $\text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ definierte er den Begriff der *Raumgruppe*. Er verwies zwar darauf, daß die von ihm betrachteten Gruppen aus sämtlichen Deckisometrien "regelmässiger Molekelhaufen" bestehen, versuchte aber zunächst "ihre Beziehungen zu den Molekelhaufen vorläufig bei Seite (zu) lassen", um ihre allgemeinen Strukturgesetze vorweg abzuleiten. So begann er mit der

"Erklärung. Unter einer Raumgruppe von Operationen verstehen wir eine unendliche Schaar von räumlichen Operationen von der Art, dass das Product von irgend zweien dieser Operationen einer der genannten Schaar angehörigen Operation äquivalent ist." (1891a, 359)

Diese Definition enthielt noch den Mangel der frühen Transformationsgruppenerklärungen von Lie und Klein. Das war kaum verwunderlich, da sich erst in den 1890er Jahren die Einsicht in die Notwendigkeit der Existenzforderung für Inverse endgültig durchsetzte.⁵⁷ Schoenflies glaubte sogar, einen Beweis für die Existenz der Inversen geben zu können. Das dabei von ihm

zur Anwendung gebrachte Argument scheint charakteristisch für den frühen Umgang mit Transformationsgruppen zu sein, bei dem der Kontextbezug und die "formalen Gesetze" des allgemeinen Begriffs nicht deutlich voneinander getrennt wurden:

"Es sei L irgend eine Operation der Raumgruppe Γ der hier betrachteten Art. Da L Deckoperation eines Molekelhaufens ist, so führt auch die umgekehrte Operation L^{-1} den Molekelhaufen in sich über und gehört daher der Gruppe an ... Demnach ergibt sich:
Lehrsatz 1: *"Eine Raumgruppe Γ enthält zu jeder Operation L die inverse Operation, sowie die Identität."*(1891a, 359f.; erste Hervorh. E.S.)

Die starke Kontextbindung verleitete Schoenflies also offensichtlich dazu, eine definierende Begriffserklärung für logisch akzeptabel zu halten, die schwächer war, als die in der kontextuellen Argumentation eingesetzte Struktur. Diese enthielt als wesentliches Element das von Sohncke übernommene, verallgemeinerte Konzept eines *"regelmässigen Molekelhaufens"*:

"... Unter einem regelmässigen Molekelhaufen von unbegrenzter Ausdehnung verstehen wir einen solchen nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Molekelhaufen, der aus lauter gleichartigen Molekeln besteht und die Eigenschaft besitzt, dass jede Molekel auf die gleiche Art von der Gesamtheit der Molekeln umgeben ist."
 (Schoenflies 1891a, 239)

Die mathematische Theorie der Kristallstruktur basierte dann auf der

"Grundhypothese: um jeden in seinem Innern gelegenen Punkt zeigt ein homogener Krystall die Structur eines regelmässigen Molekelhaufens von unbegrenzter Ausdehnung." (ebda.)

Diese Verbindung mit der Kristallstrukturtheorie veranlaßte Schoenflies dazu, stillschweigend als selbstverständlich anzunehmen, daß ein "Molekelhaufen" diskret ist (1891a, 628). Das von ihm verwendete Konzept des "Molekelhaufens" genügte also insgesamt der

Definition 5a (Schoenflies 1891a, 239, 628):

Ein "*Molekelhaufen*" (diskretes reguläres Punktesystem im \mathbb{E}^3) wird durch eine Punktmenge $M \subset \mathbb{E}^3$ charakterisiert, das folgenden Bedingungen genügt:

- (i) M besitzt eine transitive Deckisometriegruppe (1891a, 239, wie oben zitiert).

- (ii) M ist diskret im Sinne $\inf_{x \neq y, x, y \in M} |x - y| > 0$. Insbesondere besitzt M keinen Häufungspunkt (1891a, 628).
- (iii) Die konvexe Hülle von M ist \mathbb{E}^3 (M "ist nach allen Richtungen unendlich ausgedehnt") (1891a, 239).

Umgekehrt definierte Schoenflies über diese "Molekelhaufen" die kristallographischen Raumgruppen.

Definition 5b (Schoenflies 1891a, 360):

$G < \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ ist genau dann eine "*Raumgruppe von kristallographischer Bedeutung*", wenn G transitive Decktransformationsgruppe eines "Molekelhaufens" im angegebenen Sinne ist.

Tatsächlich bereitete Schoenflies in dieser orbitbezogenen Charakterisierung die spätere strukturelle Auffassung kristallographischer Gruppen als diskrete, unzerlegbare Untergruppen von $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ vor (vgl. §5.6). Durch (ii) wird ja auch die Diskretheit von G und durch (iii) deren Unzerlegbarkeit gesichert. Beide zusammen haben aber — wie Bieberbach später für den n -dimensionalen Fall bewies — die Existenz eines beschränkten Fundamentalbereichs und einer dreidimensionalen Translationsuntergruppe zur Folge. *Schoenflies selber wies schon ausdrücklich darauf hin, daß (ii) die Diskretheit von G impliziert (G "besitzt keine unendlich kleinen Operationen", 1891a, 628),⁵⁸ und bemühte sich um den Beweis der von ihm als zentral erkannten Tatsache der Existenz einer dreidimensionalen Translationsuntergruppe.* Erst dadurch wurde ja die Schlüssigkeit der konstruktiven Klassifikation kristallographischer Raumgruppen in Fortführung der Arbeiten Bravais', Jordans und Sohnckes nachgewiesen. Schoenflies stieß dabei allerdings auf Schwierigkeiten: Bei den "gruppentheoretischen Hilfssätzen" vor Beginn der Herleitung der Liste der Raumgruppentypen, wo die systematische Begründung des Satzes hätte erfolgen müssen, verwies er auf einen später nachzureichenden Beweis für die Existenz eines Translationsgitters (1891a, 360). Erst in seiner letzten Manuskriptsendung, im letzten Kapitel seines Buches, gab er schließlich einen Beweis, der jedoch an entscheidender Stelle eine Lücke enthielt.

Er argumentierte zunächst:

G kristallographisch \Rightarrow sämtliche auftretenden Rotationswinkel stehen in rationalem Verhältnis zu π .⁵⁹

Daraus zog er wie selbstverständlich den Schluß, daß der orthogonale Anteil G_o von G eine der 32 Kristallklassen ist (1891a, 636). Aus der Endlichkeit der Achsenzahl von G_o , gegenüber unendlichem Orbit von G schloß

er auf die Existenz zweier Operationen paralleler Achsenrichtung und entgegengesetzten Drehwinkels. Daraus folgt die Existenz einer zum Achsenpaar orthogonalen Translation in G . Mit Bedingung (iii) war dann auch die Existenz von drei linear unabhängigen Translationen zu folgern (1891a, 637). Die Einschränkung von G_o auf eine der 32 Kristallklassen erfolgte andererseits seit Bravais gerade durch die Invarianzforderung für ein Gitter unter der Operation von G_o . Schoenflies' Argument war also zirkulär, benutzte allerdings lediglich die Endlichkeit von G_o . Dadurch war der Weg angedeutet, wie der Zirkel durchbrochen werden konnte.

Die Lücke wurde erst am Ende des Jahrzehnts vom Leipziger Mathematiker Rohn durch den Nachweis der Endlichkeit des orthogonalen Anteils G_o geschlossen (Rohn 1899, 1900).⁶⁰ Damit wurde der Schoenfliesche Beweis für die Existenz eines Translationsgitters in dreidimensionalen kristallographischen Gruppen abgeschlossen.

Zur Charakterisierung und Untersuchung einer Raumgruppe G arbeitete Schoenflies, aufbauend auf seine in (1887) und (1889) verwendete Methode, mit dem System der Achsen (zu jedem $\alpha \in G^+ = G \cap \text{Isom}^+(\mathbb{E}^3)$) und der Symmetrieebenen (zu jeder Spiegelung oder Gleitspiegelung $\sigma \in G^- = G \cap \text{Isom}^-(\mathbb{E}^3)$) sowie den jeweils zugehörigen "reduzierten Operationen".

Definition 6 *Reduzierte Operation*

- a) einer (orientierten) Achse A einer kristallographischen Raumgruppe G ist diejenige Bewegung $\alpha = A(\omega, \tau) \in G^+$ mit $\alpha A = A$, minimalem Rotationswinkel $\omega > 0$ und minimalem Translationsanteil τ .
- b) einer Symmetrieebene S von G ist dasjenige $\sigma = S(t) \in G^-$ mit $\sigma(S) = S$ und Translationsanteil

$$t \in \left\{ 0, \frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}, \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \right\}$$

bei $\Gamma = \langle t_1, t_2, t_3 \rangle, \quad t_1, t_2 \parallel S$.

Während die reduzierte Operation einer Achse eindeutig bestimmt ist (1889, 367f.), ist die einer Symmetrieebene abhängig von der Basis in Γ und erst nach der Wahl von $t_1, t_2 \in S$ eindeutig (1889, 373). Das reichte immerhin aus, die *Wahl von Repräsentanten von G/Γ als "reduzierte Operationen"* zu standardisieren (1889, 375).

Der Plan für das Vorgehen bei Raumgruppenerweiterungen $G \rightarrow \tilde{G}$ desselben Translationsgitters ergab sich für Schoenflies aus der Gewinnung der Kristallklassen durch sukzessive Adjunktion jeweils einer erzeugenden Operation aufgrund der simplen Beobachtung, daß bei Bildung orthogonaler Anteile der Bewegungen $\rho : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}_o < O(3, \mathbb{R})$ Urbilder von Untergruppen wieder

Untergruppen sind. Er suchte daher nach einer analogen Erweiterung der Raumgruppen durch Adjunktion jeweils eines Elementes. Die in (1887) und (1889) unbewiesen verwendeten Erweiterbarkeitskriterien faßte er nun in der bewiesenen Aussage zusammen:

Lemma 1 (Schoenflies 1891a, 382f.)

Die kristallographische Raumgruppe $G < \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ mit Translationsgitter $\Gamma < G$ läßt sich genau dann durch $\lambda \in \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ bzw. $L := \langle \lambda \rangle < \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ mit $\rho(\lambda) = \lambda'$ und $\lambda'^m = 1$ zu einer kristallographischen Raumgruppe \tilde{G} desselben Translationsgitters erweitern, falls gilt:

- (i) $\lambda^{-1}G\lambda = G$,⁶¹
- (ii) $\lambda^m = t_\lambda \in \Gamma$.

Der von ihm angegebene Beweis bestand aus einer einfachen Überlegung der Raumgruppenerweiterung in $\text{Isom}(\mathbb{E}^3)$:

$$\tilde{G} := G \times \{\lambda^i | 0 \leq i \leq m-1\}$$

mit Komposition

$$(g\lambda^i)(g'\lambda^j) = g(\lambda^i g' \lambda^{-i})(\lambda^i \lambda^j) = g(\lambda^i g' \lambda^{-i}) t_\lambda^\epsilon \lambda_{\text{red}}^{i+j}$$

mit $\lambda_{\text{red}}^n := \lambda^{n'}$, wobei $n' \equiv n \pmod{m}$, $0 \leq n' \leq m-1$,

und $t_\lambda^\epsilon := \begin{cases} 0 & \text{falls } i+j \leq m-1 \\ t_\lambda & \text{sonst.} \end{cases}$

Das Faktorensystem der Erweiterung wird also hier durch Übergang zur reduzierten Operation von $\lambda^i \lambda^j$ definiert und geht bei der Rechnung in $\text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ in naheliegender Weise in die Bestimmung der Komposition zweier Operationen der erweiterten Gruppe \tilde{G} ein. Die Notwendigkeit der Bedingungen (i), (ii) liegt darüberhinaus direkt auf der Hand.

So läßt sich die sukzessive Erweiterung der Kristallklassen durch ρ^{-1} auf die Raumgruppen übertragen. Schoenflies faßte diese Beobachtung als "Fundamentaltheorem für die Erzeugung von Raumgruppen" zusammen.

Theorem 4 (Schoenflies 1891a, 383):

Sei $\tilde{G}_o(3, \mathbb{R})$ eine Kristallklasse, die durch Erweiterung der Kristallklasse G_o als $\tilde{G}_o = G_o \times L'$ mit $L' = \langle \lambda' \rangle < O(3, \mathbb{R})$ und $\lambda'^{-1}G_o\lambda' = G_o$ darstellbar ist. Dann ist jede zu \tilde{G}_o homomorphe Raumgruppe \tilde{G} mit Translationsgitter Γ nach der Methode von Lemma 1 als Erweiterung einer Raumgruppe G

(desselben Translationsgitters und mit Kristallklasse G_o) durch Adjunktion einer Operation

$$\lambda \in \text{Isom}(\mathbb{E}^3) \text{ bzw. } L = \langle \lambda \rangle < \text{Isom}(\mathbb{E}^3) \text{ mit } \lambda^{-1}G\lambda = G,$$

also als $\tilde{G} = G \times L$, darstellbar.

Das lieferte eine einwandfreie Begründung für den schon in (1887) und (1889) eingeschlagenen Weg der Generierung der kristallographischen Raumgruppen aus Translationsgittern durch sukzessive Adjunktion jeweils eines zusätzlichen erzeugende Elementes.

Die "Bravais'schen Gruppen", also die von Bravais implizit charakterisierten Symmetriesysteme, konnte Schoenflies nun als diejenigen Raumgruppen G mit Translationsgitter Γ charakterisieren, für die gilt:

$$G_o = \rho(G) < G.$$

In diesem Fall ergibt sich G nämlich offensichtlich als inneres semidirektes Produkt in $\text{Isom}(\mathbb{E}^3)$, $G = \Gamma * G_o$ (1891a, 386).

Natürlich waren die Erzeugungsregeln noch durch Identitätskriterien für verschieden erzeugte Gruppen zu ergänzen. Schoenflies gab auf der allgemeinen Ebene insbesondere an:

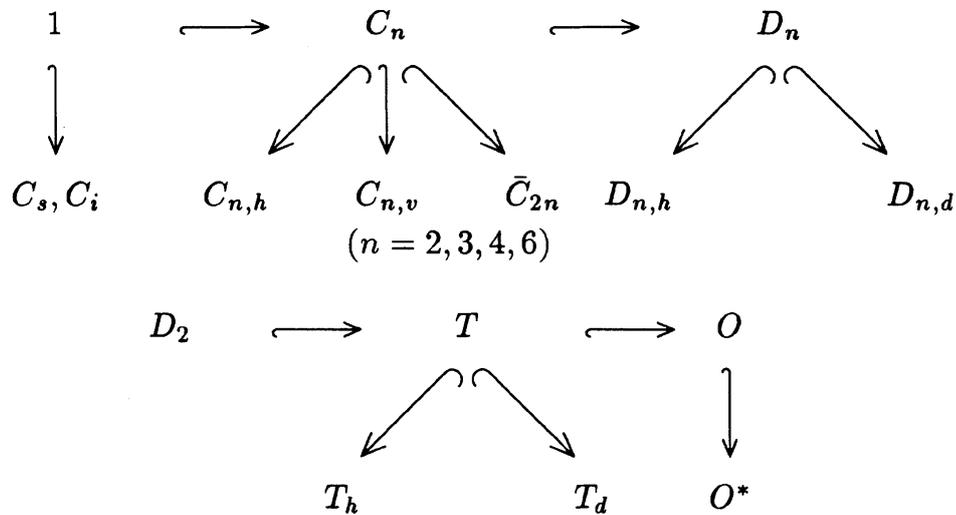
Lemma 2 (Schoenflies 1891a, 389)

Seien \tilde{G} , \tilde{G}' Erweiterungen derselben kristallographischen Gruppe G durch Adjunktion der Operationen $l, l' \in \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$, dann gilt:

- (i) $l \in \tilde{G}', l' \in \tilde{G} \Rightarrow \tilde{G} = \tilde{G}'$.
- (ii) Operieren l, l' auf dem (nichtleeren) Achsensystem von G gleich, so liegt einer der folgenden Fälle vor:
 - a) $\tilde{G} = \tilde{G}'$,
 - b) alle Achsen von G sind parallel und l, l' unterscheiden sich nur durch eine achsenparallele Translationskomponente.

Die Aussage von (ii) folgt unmittelbar aus der Beobachtung, daß $l^{-1}l'$ jede Achse von G in sich überführt, während die von (i) in der hier angegebenen Fassung⁶² offensichtlich ist. Weitere Identitätskriterien entwickelte Schoenflies unter Berücksichtigung der spezifischen Bedingungen in jedem der folgenden Kapitel, in denen die Raumgruppen kristallsystemweise mit steigender Symmetrie abgeleitet wurden.

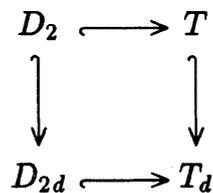
Aus dem Erweiterungsschema für die Kristallklassen



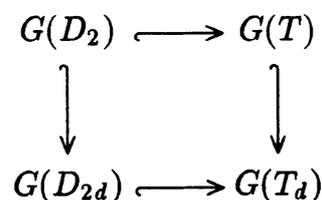
gewann Schoenflies, anders als in (1889), nun auch bei der Erweiterung der Raumgruppen ein Gerüst für die zu diskutierenden Fallunterscheidungen. Durch detaillierte Angabe der Erzeugenden jeder Raumgruppe vermied er die Unklarheiten der älteren Darstellung.

Entsprechend führte er neue Bezeichnungen X^i für die Raumgruppen ein, die aus der Angabe der Kristallklasse $X \in \{C_1, C_s, C_2, C_{2h}, \dots, O, O^*\}$ und einem Index i zur Unterscheidung der verschiedenen Raumgruppen G mit $\rho(G) = X$ zusammengesetzt war.⁶³

Bei diesem Vorgehen ordnete sich auch die von Fedorov im Dezember 1890 entdeckte — vom Schoenflies erst im März 1891 akzeptierte — Gruppe $I\bar{4}3d$ zwanglos als T_d^6 in die Ableitung der Raumgruppe der Kristallklasse T_d ein. Ausgehend vom Erweiterungsschema der Kristallklassen



beobachtete Schoenflies, daß eine Raumgruppe $G(T)$ mit Kristallklasse T nur dann Kandidat für eine Erweiterung mit Diagonalspiegelung S_d bzw. $S_d(\tau)$ ist, falls die zugehörige Untergruppe zur Kristallklasse D_2 analog erweiterbar ist:



Dadurch wurden die möglichen Erweiterungen von $G(T)$ auf $G(T_d)$ durch reine Diagonalspiegelung S_d bzw. eine geeignete Schubspiegelung $S_d(\tau)$ auf ein übersichtliches Fallschema eingeschränkt.⁶⁴ Die Erzeugung von $I\bar{4}3d = T_d^6$ geschah darin durch eine Schubspiegelung $S_d(\frac{1}{2}(t_1+t_2+t_3))$, die vorher schon bei der Erweiterung im tetragonalen Kristallsystem aufgetreten war (1891a, 540f.):

$$\begin{array}{ccc} I2_12_12_1 = D_2^9 & \longleftarrow & T^5 = I2_13 \\ \downarrow & & \downarrow \\ I\bar{4}2d = D_{2d}^{12} & \longleftarrow & T_d^6 = T^5(S_d(\tau)) = I\bar{4}3d \end{array}$$

Diese kurze Diskussion des kritischsten Falls bei der Herleitung der vollständigen Liste in den Jahren 1889/90 mag genügen, um die Schoenfliessche Vorgehensweise zu charakterisieren.

Es zeigt sich jedenfalls, daß Schoenflies mit seinen Mitteln eine übersichtliche, vollständige und fast lückenlos begründete Herleitung der 230 kristallographischen Raumgruppentypen erreichte.

Ähnlich wie er und Fedorov die Klassifizierung der Raumgruppen unabhängig in Angriff genommen hatten, wenn auch beide angeregt durch dieselben Arbeiten von Jordan und Sohncke, so entwickelten sie auch unabhängig voneinander die Idee einer mathematischen Fundierung der Kristallstruktur in regulären Pflasterungen (Fedorov 1885, Schoenflies 1888a, b). Dabei unterschieden sich ihre Auffassungen allerdings stärker als im ersten Punkt. Während Fedorov von sehr spezifischen Eigenschaften der kristallographisch relevanten Raumteilungen ausging (Parallelitätshypothese) und aufgrund der sich daraus ergebenden Einschränkungen wiederum bis zu einer Klassifikation der seines Erachtens entscheidenden (“wahrscheinlichen”) “Strukturarten” vorstieß (vgl. §5.4), entwickelte Schoenflies lediglich einige allgemeine mathematische Gesichtspunkte, die die Bildung und das Studium isoedrischer Pflasterungen regulieren. Diese sollten dann als vermittelnde Ebene zwischen der gruppentheoretisch-mathematischen Theoriebildung und den physikalisch zu begründenden Strukturtheorien dienen, über die er selber nichts Genaueres mehr aussagen konnte und wollte.

Insbesondere begründete er durch eine anschauliche Argumentation die Existenz einer isoedrischen Pflasterung $(B_g)_{g \in G}$ zu einer kristallographischen Gruppe G (1891a, 570f.). Einen dieser Bereiche, etwa $B := B_1$, bezeichnete er als *einfachen Fundamentalbereich* von G , falls keine zwei inneren Punkte von B G -äquivalent sind (ebda., 572). Schoenflies untersuchte nun, unter welchen Bedingungen zu einer Untergruppe $G' < G$ eine isoedrische Raumteilung $(B'_{g'})_{g' \in G'}$ existiert, die auch G -invariant ist. Er fand dabei das leicht nachvollziehbare

Theorem 5 (Schoenflies 1891a, 576ff.)

Für eine kristallographische Gruppe G und Untergruppe $G' < G$ mit zugehöriger isoedrischer Raumteilung $B' = (B'_{g'})_{g' \in G'}$ aus einfachen Fundamentalbereichen sind äquivalent:

- (i) Die Pflasterung B' ist G -invariant.
- (ii) Es gibt eine Pflasterung $B = (B_g)_{g \in G}$ zu G , sodaß sich ein Ziegel B'_1 von B' aus endlich vielen Ziegeln von B zusammensetzen läßt:

$$B'_1 = \bigcup_{g \in H} B_g$$

Dabei ist $H = \{g_1, \dots, g_k\}$ endliche orthogonale Untergruppe von G .

- (iii) $G = G' * H$ mit $H < O(3, \mathbb{R})$ (inneres semidirektes Produkt in $\text{Isom}(E^3)$) und jeder Ziegel $B'_{g'} \in B'$ wird von $g'Hg'^{-1}$ in sich überführt.

Diese Beobachtung erlaubte Schoenflies für die kristallographischen Gruppen $G = G' * H$ mit orthogonaler Untergruppe $H < G$ die Konstruktion "symmetrischer Fundamentalbereiche". Diese sind allerdings im heutigen Sinne keine Fundamentalbereiche, sondern punktsymmetrische Ziegel (Symmetrie H) einer übergeordneten isoedrischen Pflasterung (zur Gruppe G'), die sich aus $|H|$ symmetrisch aneinanderliegenden Fundamentalbereichen von G aufbauen.

Das einfachste Beispiel dafür sind die Bravais'schen Gruppen $G = \Gamma * G_o$. Schoenflies wies darauf hin, daß die "symmetrischen Fundamentalbereiche" von G mit den Basiszellen von Γ übereinstimmen können aber nicht müssen. Da die "regelmässigen Molekelhaufen" der Kristallstrukturtheorie durch Fixierung eines Punktes in einem "einfachen Fundamentalbereich" erzeugbar sind, konnte Schoenflies nun eine mathematische Analyse der Prinzipien geben, die in verschiedenen kristallographischen Theorien bei der Konstituierung der hypothetischen Molekel verwendet wurden und in verschiedener Weise Molekülsymmetrien in Rechnung stellten.

Bravais hatte die Symmetrieeigenschaften eines Kristalls auf die Überlagerung der Symmetrieeigenschaften der Moleküle mit denen des Kristallgitters zurückgeführt. Aus Schoenflies' Sicht entsprach dem Bravais'schen "Polyeder der gemeinsamen Symmetrie S_c " eine Zusammenfassung von $n = |G_o|$ Punkten des G_o -Orbits des erzeugenden Punktes eines Molekelhaufens zu einem größeren Molekel, oder — in der Sprache der Raumteilungen — der Betrachtung eines "symmetrischen Fundamentalbereichs" von G . Dagegen bestehen die Molekelhaufen, die zur Raumteilung mit "einfachem Fundamentalbereich" gehören, aus n ineinander geschachtelten Punktgittern:

$$G(p) = \Gamma(G_o(p))$$

Darüberhinaus wies Schoenflies darauf hin, daß ganz allgemein im Fall der inneren semidirekten Zerlegbarkeit von G als $G \cong G' * H$ mit $H < \rho(G) = G_o$ Kristallstrukturtheorien mit "symmetrischen Molekeln" formulierbar sind und unterschied strikt zwischen "Molekelsymmetrie" H und der "Krystallstructur" G' , die er mathematisch mit einer transitiv operierenden Deckisometriegruppe des Molekelhaufens identifizierte (1892b, 524, Anm. 3 u.a.). Dabei wies er darauf hin, daß je nach Annahmen über den Bau der Moleküle (Zusammenfassung von Punkten des zugrundeliegenden regulären Punktesystems) eine unterschiedliche Aufteilung der Kristallsymmetrie G_o auf "Molekelsymmetrie" H und Symmetrie der "Krystallstructur" G' erfolgt. Das Spektrum der Wahlmöglichkeiten wird dabei natürlich durch die Gruppe G und ihre möglichen Zerlegungen $G = G' * H$ determiniert.

An einem Ende des Extrems ist stets die Annahme trivialer Molekelsymmetrie und $G = G'$ möglich. Schoenflies sprach in diesem Fall von "reiner Strukturtheorie" (1892b, 513), weil hier die Kristallsymmetrie G_o allein aus der "Krystallstructur" G' resultiert. Auf der anderen Seite hatte insbesondere Sohncke bei Versuchen, Spiegelsymmetrien zu berücksichtigen, mit Punktesystemen gearbeitet, bei denen jedes "Molekel" aus einem Paar spiegelbildlich gelagerter Elemente bestand. Das entsprach in Schoenflies' Ansatz der Annahme einer Spiegelungsgruppe $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $G = G' * H$. Schoenflies ging an verschiedenen Stellen auf diese Frage ein (Schoenflies 1890; 1891a, 584ff.; 1892a, b) und wies auf die relative Willkürlichkeit bei der Abspaltung von "Molekelsymmetrien" hin. Mathematisch entsprach dem die Wahl einer Pflasterung mit Ziegelsymmetrie H und einfach transitiver Decktransformationsgruppe G' .

Die Spezifizierung der Materieverteilung in einem "symmetrischen Fundamentalbereich" mußte dagegen aus dem Blickwinkel der mathematischen Theorie heraus völlig offen gelassen werden. Sie zu klären, war Aufgabe der Physik. So formulierte Schoenflies *Abgrenzung und gegenseitige Ergänzung mathematischer und physikalischer Theoriebildung* in diesem Kontext dadurch, daß die mathematische Theorie

"... den Spielraum abzugrenzen (hat), innerhalb dessen sich die Hypothesen über die Natur der Krystallbausteine noch bewegen können ..."

während

"... der Physiker als der unumschränkte Beherrscher des Fundamentalbereichs erscheint ..." (1892b, 521).

Die umfangreiche und detaillierte Darlegung der mathematischen Grundlagen der kristallographischen Symmetriekonzepte war sein Beitrag

dazu, diesen "Spielraum abzugrenzen" und in dem von ihm vertretenen Konzept der Kristallstruktur die *Kleinsche Idee der gruppentheoretischen Ordnung der verschiedenen geometrischen Theorien für die Kristallographie nutzbar* zu machen (Schoenflies 1892b, 524). Schoenflies hatte so neben einer übersichtlichen Herleitung der 230 Raumgruppentypen den Übergang zwischen mathematischer und physikalisch-kristallographischer Theoriebildung angedeutet und *ansatzweise eine Integration des gruppentheoretischen Gesichtspunktes mit dem der Raumteilungen* erreicht. Insgesamt spielte der Gesichtspunkt der Pflasterungen bei ihm allerdings eine im Vergleich zu Fedorov untergeordnete Rolle. Eine systematische Klassifizierung beliebiger isoedrischer Pflasterungen des E^3 war nicht nur bei den ihm zur Verfügung stehenden Methoden nicht zu realisieren, sondern scheint auch heute noch nicht absehbar. Auch Fedorov konnte sich in dieser Hinsicht nur aufgrund der sehr restriktiven Bedingung übergeordneter Paralleloederteilungen Hoffnungen machen.⁶⁵

Die Verwendung zeitgenössischer Methoden der Gruppentheorie und ihre ausführliche Erklärung auch für nichtmathematische Leser machte Schoenflies' Darstellung von Vorgehensweise und Ergebnis her in gleicher Weise für Mathematiker interessant wie für Nichtmathematiker verständlich. Indem Schoenflies eine bemerkenswerte Parallele zwischen jüngsten Entwicklungen der Mathematik und den zeitgenössischen Forschungen der Kristallographie herausarbeitete, wies er exemplarisch nach, daß die begriffsorientierte strukturelle Forschung Bedeutung nicht nur innerhalb der Mathematik selber, sondern auch für die Erkenntnis der Gesetzmäßigkeiten und Erscheinungsformen der Natur haben kann. Darin lag — neben dem vordergründigen Plus einer leichteren sprachlichen Zugänglichkeit — der entscheidende Vorteil seines Buches gegenüber der Fedorovschen Darstellung. Aber obwohl die gruppentheoretische Strukturauffassung unter theoretischen Kristallographen größeren Anklang als Fedorovs Theorie der Kristallstrukturarten fand, erschien auch sie noch zwei Jahrzehnte lang als eine weitgehend spekulative Theoriebildung ohne genügend gesicherte empirische Grundlage. Das änderte sich erst mit der Entdeckung der Röntgenstrahlbeugungsmethode, die der empirischen Strukturbestimmung von Kristallen völlig neue Wege und technische Möglichkeiten eröffnete.

5.6 Ausblick auf spätere Entwicklungen

Ein Teil der Überzeugungskraft der Klassifikation von Schoenflies und Fedorov resultierte aus der Konvergenz ihrer Ergebnisse, die von verschiedenen Ausgangspunkten und auf recht unterschiedliche Weise hergeleitet worden waren. Die Gemeinsamkeiten rührten dabei größtenteils von ihrer gemeinsamen Anregung durch die Jordan-Sohnckesche Klassifikation diskreter unzerlegbarer Bewegungsgruppen und der zugehörigen Punktorbitalen her.⁶⁶ Eine

zusätzliche Bestätigung des grundlegenden Charakters dieser Ergebnisse kam von einem weiteren Ansatz her, der Symmetrieklassifikation räumlicher Kugelpackungen durch *William Barlow* (1845–1934).

Barlow arbeitete bei seinem Versuch, in den 1890er Jahren eine mechanische Strukturtheorie der Kristalle zu entwerfen, mit der Vorstellung der Atome als Zentren sphärischer Kraftfelder. Das führte ihn auf die Hypothese einer räumlichen Anordnung der Atome, im Sinne dreidimensionaler sphärischer Kugelpackungen. Nach ersten, relativ simplen Modellen für einzelne Kristallstrukturen, die mit Sohnckes “regelmäßigen Punkthaufen” verwandt waren und ihn mit diesen bekannt machte (Barlow 1883/84), begann Barlow Anfang der 1890er Jahre mit einer Symmetrieklassifikation der räumlichen Kugelpackungen. Dabei lernte er auch die Ergebnisse Fedorovs und Schoenflies’ kennen und machte sie sich zunutze. Ohne deren Herleitung im Detail nachvollzogen zu haben,⁶⁷ zeigte er in (Barlow 1894), daß auch aus den räumlichen Kugelpackungen in natürlicher Weise die Symmetrieklassifikationen nach den 230 Fedorov-Schoenfliesschen Raumgruppen hergeleitet werden kann. Obwohl keine weitere “unabhängige” Herleitung der Raumgruppen vorlag — wie manchmal behauptet — lieferten Barlows Arbeiten ein weiteres Argument dafür, daß die kristallographischen Raumgruppen unabhängig von der weiteren Konkretisierung der physikalischen Strukturkonzepte eine zentrale Bedeutung bei der weiteren Vertiefung des Verständnisses des Kristallaufbaus haben würden.

Eine solche weitere Konkretisierung wurde durch die Entdeckung der Röntgenstrahlbeugung an Kristallen durch den jungen Münchener Privatdozenten Max Laue⁶⁸ ermöglicht. Sie löste eine Entwicklung der Kristallphysik aus, die den Charakter der Kristallographie in den folgenden Jahrzehnten grundlegend veränderte. Bis dahin war die Klassifikation der kristallographischen Raumgruppentypen noch immer eine Theorie, die zwar mathematisch wohlbegründet war, aber physikalisch auf weitgehend spekulative Hypothesen aufbaute und eine viel zu weite Hülle für das empirische Wissen über den Kristallaufbau bildete.⁶⁹ Erst mit der modernen röntgenometrischen (später auch elektronenmikroskopischen und neutronenstrahlinterferometrischen) Kristallbeobachtung wuchs sie in die Rolle einer auf die spezifischen Ansprüche der Kristallographie zugeschnittenen Theorie ausgewählter Aspekte der euklidischen Geometrie hinein, vergleichbar vielleicht der von Trigonometrie und Differentialgeometrie (der Flächen) in der Geodäsie. Die Arbeiten P. Niggli waren in dieser Hinsicht bahnbrechend [Burckhardt 1988].

Max (von) *Laue* (1879–1960) arbeitete seit 1909 an A. Sommerfelds Institut für Theoretische Physik an der Universität München. Er hatte während seiner Studienzeit Chemie und Mineralogie als Nebenfächer gewählt. Als er sich nun mit Beugung und Interferenz (im sichtbaren Spektrum) an zweidimensionalen Gittern beschäftigte, kam ihm die Idee, daß die 1895 entdeckten

Röntgenstrahlen sich möglicherweise an Kristallen analog verhalten würden. Trotz Skepsis und sogar Ablehnung Sommerfelds gegenüber dieser Idee gelang es ihm, in W. Friedrich und P. Knipping Mitarbeiter zu finden, die die nötige Erfahrung hatten, um seine Idee in ein erfolgreiches Experiment umzusetzen.

So entstand der epochemachende Bericht über “Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlung” (W. Friedrich/ P. Knipping/M. Laue 1912) [Forman 1969]. Die anfänglichen Deutungsprobleme der — auch von Laue so nicht erwarteten — Interferenzmuster rührten zum Teil von einem unentwickelten Wissen über die Natur der Röntgenstrahlen her; so konkurrierten etwa noch die Hypothese einer korpuskularen mit der einer rein elektromagnetischen Strahlung. Hinzu trat, daß selbst unter der Annahme, daß räumliche Punktgitter beim Aufbau der Kristallsubstanz eine Rolle spielten, noch sehr verschiedene Hypothesen über deren atomare bzw. molekulare Realisierung vorlagen. Erst durch die Arbeiten *William Henry Braggs* (1862–1942) und seines Sohnes *William Lawrence* wurde die Natur der Röntgenstrahlbeugung an Kristallen so weit aufgeklärt, daß die Interferenzmethode zur Bestimmung der Art des Kristallaufbaus aus ineinandergeschachtelten Atomgittern samt Symmetrie und metrischen Parametern einsetzbar wurde.⁷⁰

Damit waren die Grundlagen für eine Modernisierung der Kristallographie gelegt, aus der in wenigen Jahrzehnten die uns bekannte, zwischen Mineralogie, Physik, physikalischer Chemie, Biochemie und Mathematik angesiedelte Disziplin entstand [Ewald e.a. 1962b]. Ihre Wurzeln in der traditionellen Kristallographie des 19. Jahrhunderts sind jedoch auch nach dieser einschneidenden disziplinären Wandlung nicht zu verleugnen.

Unter *rein mathematischem Gesichtspunkt* standen die Ergebnisse Fedorovs und Schoenflies' in engster Beziehung zu analogen Untersuchungen der diskontinuierlichen Operation diskreter Gruppen (mit beschränktem Fundamentalbereich) in der elliptischen und hyperbolischen Geometrie. In der elliptischen Ebene war die entsprechende Klassifikation im wesentlichen mit der lange bekannten Aufstellung der endlichen orthogonalen Gruppen in $O(3, \mathbb{R})$ identisch. Für die hyperbolische Ebene hatte Poincaré im Rahmen seiner Forschungen über automorphe Funktionen gezeigt (1882), daß es unendliche viele “Fuchsische Gruppen” gibt und wie sie geometrisch durch Polygone und algebraisch durch Erzeugende charakterisierbar sind [Gray 1986, Kap. 6; Scholz 1980, 357f.]. Der dreidimensionale Fall war von Fricke und Klein in den “Vorlesungen zur Theorie der automorphen Funktionen” (1897) für den hyperbolischen Raum behandelt worden; für den elliptischen folgte zumindest die Endlichkeit der Anzahl diskontinuierlich operierender Isometriegruppen schon aus entsprechenden Sätzen Jordans für endliche Gruppen in $GL(n, \mathbb{Z})$ (Jordan 1878, 1880).

Dies war der Kontext, in den *David Hilbert* (1862–1943) die Ergebnisse von Schoenflies und Fedorov einordnete, als er zur Jahrhundertwende auf dem

Pariser Mathematikerkongreß seinen programmatischen Vortrag über “Mathematische Probleme” hielt (Hilbert 1900). So formulierte er als *18. Problem* die Doppelfrage nach der Verallgemeinerbarkeit einer endlichen Klassifikation kristallographischer Gruppen auf den n -dimensionalen euklidischen Raum und nach der Möglichkeit monoedrischer, aber nicht isoedrischer Pflasterungen im Dreidimensionalen — d.h. einer Pflasterung mit kongruenten Ziegeln aber ohne transitive Decktransformationsgruppe.

Das 18. Hilbertsche Problem wurde als eines der ersten gelöst. Die erste Teilfrage wurde durch den Klein-Schüler *Ludwig Bieberbach* (1886–1982) anschließend an ein Oberseminar in Göttingen, in dem er auf Anregung Hilberts über die Schoenfliessche Klassifikation der dreidimensionalen kristallographischen Raumgruppen vorgetragen hatte, beantwortet (Bieberbach 1910a, b, 1912). Nach einer ersten Beweisskizze in (1910a) legte er in einem ersten Teil seiner Beweisausführung zunächst einige Grundlagen durch die Untersuchung der Eigenschaften diskreter Gruppen $G < \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$. Zunächst zeigte er, daß jedes diskrete $G < \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ diskontinuierlich mit Fundamentaltbereich operiert (1910b, 313f.). Dann präziserte er die von Schoenflies intuitiv gehandhabte Eigenschaft, daß sich die Punktorbits (“Molekelhaufen”) einer kristallographischen Gruppe in Dimension 3 ins Unendliche erstrecken, durch

Lemma 3 (Bieberbach 1912b, 333f.)

Für diskretes $G < \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ ist der Fundamentaltbereich von G genau dann beschränkt, wenn G nicht zerlegbar ist.

Dabei nannte er G genau dann “zerlegbar”, wenn \mathbb{E}^n als G -Modul zerlegbar ist.

Da, wie Bieberbach in Präzisierung und Verallgemeinerung des Schoenfliesschen Argumentationsganges zeigen konnte, eine diskrete Gruppe mit maximaler Translationsuntergruppe von weniger als maximalem Rang ($\dim \Gamma := \dim(\text{Spann}_{\mathbb{R}} \Gamma) < n$) zerlegbar ist (Bieberbach 1910b, 330ff.), erhielt er eine Verallgemeinerung des zentralen Satzes über Raumgitter in kristallographischen Gruppen, um den Schoenflies für $n = 3$ solange hatte ringen müssen.

Theorem 6 (Bieberbach 1910b, 333f.)

Sei $G < \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ diskret und unzerlegbar, $\Gamma < G$ die maximale Translationsuntergruppe. Dann gilt:

$$\dim \Gamma = n.$$

Im zweiten Teil seines Beweisganges (1912) nützte Bieberbach die Existenz n -dimensionaler Translationsuntergruppen zur Entwicklung eines arithmetischen Zugangs zu kristallographischen Gruppen im \mathbb{E}^n . Durch Wahl einer Basis von Γ wird für $G_o := \rho(G)$ mit $\rho : \text{Isom}(\mathbb{E}^n) \rightarrow O(n, \mathbb{R})$ eine treue unimodulare Darstellung $G_u < GL(n, \mathbb{Z})$ ausgezeichnet. Umgekehrt läßt diese offenbar eine positiv definite quadratische Form invariant, ist also endlich. Dies lieferte den Ausgangspunkt für den Bieberbachschen Endlichkeitsbeweis.

Er ging nun nämlich durch geeignete Koordinatenwahl zu einer isomorphen Repräsentation G_a einer kristallographischen Gruppe G über:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \Gamma & \rightarrow & G & \rightarrow & G_o & \rightarrow & 1, & G < \mathbb{R}^n * O(n, \mathbb{R}) \\ & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z}^n & \rightarrow & G_a & \rightarrow & G_u & \rightarrow & 1, & G_a < \mathbb{Z}^n * GL(n, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Nach dem von Minkowski verschärften, schon von Jordan (1878) bewiesenen Satz über die endliche Anzahl der Konjugationsklassen endlicher Untergruppen von $GL(n, \mathbb{Z})$ gibt es nur endlich viele Möglichkeiten, G_u zu wählen. Bieberbach faßte nun alle Gruppen G_a mit derselben Konjugationsklasse unimodularer Gruppen G_u zu einer Klasse, der *arithmetischen Kristallklasse* (Terminologie erst bei Burckhardt und Niggli) zusammen (1912, 411) und charakterisierte die Isomorphieklassen möglicher Erweiterungen von G_u durch \mathbb{Z}^n durch die zugehörigen Faktorensysteme. Ein leichtes Abschätzargument zeigte, daß wiederum nur endlich viele Auswahlmöglichkeiten bestehen (ebda., 411f.).⁷¹

Frobenius hatte schon im Anschluß an Bieberbachs Beweisskizze (1910a), in der nur vom Nachweis der Endlichkeit der Isomorphieklassen kristallographischer Gruppen die Rede war, darauf hingewiesen, daß die Klassifizierung nach affiner Äquivalenz im \mathbb{E}^n problemadäquater war, und einen eigenen Beweis für die Endlichkeit affiner Äquivalenzklassen kristallographischer Raumgruppen angegeben (Frobenius 1911). Diese Erweiterung integrierte Bieberbach nun in seinen zweiten Teil des Beweises und zeigte

Lemma 4 (Bieberbach 1912, 408ff.)

Für $G, G' < \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ diskret und unzerlegbar gilt:

$$G \text{ affin äquivalent zu } G' \Leftrightarrow G \cong G'.$$

Damit war der erste Teil von Hilberts 18. Problem in folgendem Sinne gelöst:

Theorem 7 (Frobenius 1911, Bieberbach 1912, 411f.)

Die Anzahl affin äquivalenter Klassen kristallographischer (diskret, unzerlegbarer) Gruppen in $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ ist endlich.

Der *zweite Teil der Hilbertschen Frage* wurde 1928 von K. Reinhardt *positiv* beantwortet. Er gab ein nichteinfach zusammenhängendes Polyeder vom topologischen Typ des Volltorus an, das als Standardziegel einer monoedrischen Pflasterung des \mathbb{E}^3 dienen konnte, ohne daß die lokale Kongruenzoperation, die einen Ziegel in einen benachbarten überführt, zu einer globalen Deckisometrie der gesamten Pflasterung erweiterbar ist. Darüberhinaus zeigte er, daß durch Induktion über die Dimension monoedrische, nichtisoedrische Pflasterungen für beliebige $n > 3$ konstruiert werden können (Reinhardt 1928). Reinhardts Vermutung, daß für $n = 2$ monoedrische Pflasterungen dagegen auch isoedrisch sind, wurde schon wenige Jahre später von H. Heesch widerlegt (Heesch 1935).

Rein formal betrachtet, war Hilberts Problem damit durch Bieberbach, Frobenius, Reinhardt und Heesch beantwortet. Tatsächlich war jedoch die mathematische Arbeit an den damit verbundenen Fragen keineswegs beendet; ganz im Gegenteil bildeten die von Bieberbach und Frobenius entwickelten Methoden den Ausgangspunkt eines Forschungsprogramms der arithmetischen Theorie kristallographischer Gruppen (Burckhardt, Niggli, Zassenhaus, Hermann, Brown, Neubüser, Wondratschek u.a.).⁷² Auf der anderen Seite begann ein detaillierteres Studium der topologischen und kombinatorischen Fragen, die mit regulären Raumteilungen verbunden sind, erst nach Reinhardts Arbeit.⁷³

Die Bedeutung des 18. Hilbertschen Problems war also nicht allein unmittelbar an die ursprüngliche Fragestellung gebunden. Es half darüberhinaus, die Aufmerksamkeit von Mathematikern auf wichtige weitergehende Fragen zu lenken, und trug so zur Entstehung fruchtbarer Forschungsprogramme bei [Delone 1976, Milnor 1974]. Deren Grenzen sind bis heute keineswegs ausgeschöpft.

Aufgrund der höheren disziplinären Autonomie der Mathematik fallen Inhalt und Art der Wechselbeziehung zwischen autonomer (theoretischer) Mathematik und Anwendungen innerhalb der Kristallographie in unserem Jahrhundert sichtlich anders aus als im Jahrhundert vorher. Doch sind selbst noch in dieser Entwicklung die Anstöße aus dem Symmetriestudium der Kristallographie des 19. Jahrhunderts wirksam, das mit R.J. Haüy und C.S. Weiß seinen Anfang nahm und in den großen Arbeiten Bravais', Jordans, Fedorovs und Schoenflies' gipfelte.

Anmerkungen

Anmerkungen zur Einleitung

- 1 Die Fragestellung der Disziplingenese und der Entwicklung der Technikwissenschaften ist in jüngeren technikgeschichtlichen Arbeiten aus der DDR zu einem entsprechenden historiographischen Forschungsprogramm verdichtet worden [Buchheim 1978, 1980a, b; Buchheim/Mauersberger 1982, 1983; Buchheim/Sonnemann 1985; Hänseroth 1985; Mauersberger 1980; Krug 1982; Richter 1984; Schreier 1977 u.a.]. Die für unsere Fallstudie wichtige Entwicklung der Bauwissenschaften ist bisher m.W. von dieser Stelle außer in Einzelstudien wie etwa [Hänseroth 1985], noch nicht dargestellt worden. In der westdeutschen Technikgeschichtsschreibung gehen in jüngerer Zeit verschiedene Arbeiten in eine ähnliche Richtung [Braun 1976; Zweckbronner 1979, 1981] und insbesondere für die Baustatik die Arbeiten K.-E. Kurrers [1981, 1985a, b, 1987a, b, c], in denen ausdrücklich auch der Gesichtspunkt der Disziplingenese eingenommen wird.
- 2 Vgl. [Struik 1980, 8ff.] zum Beginn dieser Periode der Mathematikhistoriographie, die (etwa von Chasles, Libri und Nesselmann bis M. Cantor, Eneström, Tannery, Zeuthen und Heiberg) etwa zeitgleich zur Herausbildung der "modernen Mathematik" während des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts entstand.
- 3 Die *historisch treue* ("alte") *Terminologie*, die von ihren Konnotationen her anachronistische Methoden- oder Theoriebeziehungen weitgehend ausblenden hilft, und dagegen die *heutige* ("aktuelle") *Terminologie*, durch deren Verwendung mathematische Zusammenhänge in der Regel knapper, stringenter und für den heutigen Leser meist wesentlich leichter verständlich formuliert werden können, die aber den Nachteil anachronistischer Konnotationen mit sich zieht.

Anmerkungen zu §1

- 1 Über die Modellierung regulär-dodekaedrischer Kultgegenstände bei den Etruskern und Kelten und einen möglichen Einfluß auf die Herausbildung des Begriffs der regulären Körper in der griechischen Mathematik siehe [Lindemann 1896]. Zur naturphilosophischen Auseinandersetzung mit dem Bergkristall siehe etwa [Krafft 1971, 111, 263].
- 2 Bergkristall/Quarz, reine Kieselsäure SiO_2 , kristallisiert im trigonalen System (oberhalb $575^\circ C$ hexagonal), Kristallklasse D_3 . Typische Formen: Rhomboeder, ditrigonales Prisma, trigonale Dipyramide, hexagonale Pyramide, trigonales Trapezoeder etc.
- 3 Kalkspat/Kalcit, $CaCO_3$, kristallisiert trigonal holoedrisch, d.h. in der Kristallklasse D_{3d} . Typische Formen: Rhomboeder, Skalenoeder. Die Doppelbrechung erfolgt am Kalkspat mit so stark verschiedenen Brechungsindizes, daß sie ohne Polarisationsinstrumente nachweisbar ist.
- 4 Nach [Marx 1825, 73f.] findet sich die erste generalisierende Verwendung der Terminologie bei Cappeler (1723). Dort wurden die regelmäßigen Kristallformen als "cristalles impropries (uneigentliche Kristalle)" bezeichnet.
- 5 Siehe dazu die mineralogiehistorischen Arbeiten [Burke 1966, Fabian 1986, Groth 1926, Hoykaas 1952, Marx 1825, Šafranovskij 1980].
- 6 Etwa bei der hexagonalen Pyramide des Quarzes durch Angabe der Kantenwinkel der gleichschenkligen Seitendreiecke mit Basiswinkel "etwa $70^\circ-75^\circ$ ", Spitzenwinkel "etwa $30^\circ-40^\circ$ " (Romé de l'Isle 1772, 115 - 176, Pl. X) — Angabe nach [Burke 1966].
- 7 "Weiche" Theoretisierung bedeutet hier: keine strikte Deduktion zulässiger Kristallformen aus einem Satz theoretisch fixierter Prinzipien, sondern ideelle Erzeugungsregeln, die so formuliert sind, daß sie in Hinsicht auf das zu beschreibende Material ausformbar sind. Nach dem Popper'schen wissenschaftstheoretischen Dogma wäre dies also eine "unwissenschaftliche" Theorieform, weil prinzipiell nicht "falsifizierbar". Dagegen erscheint sie im Rahmen der Lakatos'schen Methodologie der Forschungsprogramme [Lakatos 1980] durchaus als "rational" und damit "wissenschaftlich" — was vom wissenschaftshistorischen Standpunkt eher als

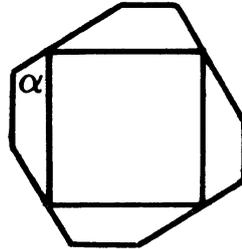
Argument für Lakatos' Methodologie (im Vergleich zu anderen) denn als Rechtfertigung Romé de l'Isles zu lesen ist.

- 8 Pyrit, FeS_2 , kristallisiert in der Kristallklasse T_h . Im Elbapirit tritt häufig das nichtreguläre Pentagondodekaeder $T_h(210)$ auf.
- 9 Da Romé nicht mit weiteren Modifikationen am Dodekaeder arbeitete, läßt sich das Auftreten des regulären Dodekaeders und Ikosaeders mit der Erzeugung von "Scheinsymmetrien" in der gruppentheoretischen Gestaltenlehre bei spezieller Lage der Flächenparameter vergleichen. So wird etwa bei der Operation von T_h auf der Fläche $(1/2(\sqrt{5} + 1), 1, 0)$ das reguläre Dodekaeder erzeugt. Aus den kristallographischen Formen wird es also nur durch das Rationalitätsprinzip ausgeschlossen, das erst von Weiß (indirekt schon ansatzweise von Haüy) eingeführt wurde.
- 10 Den Hinweis darauf, daß bei Romé de l'Isles Einteilung der Polyeder in Modifikationsreihen Symmetriegesichtspunkte implizit beteiligt sind, verdanke ich, wie auch die Beobachtung von Anm. 9, Herrn E. Brieskorn.
- 11 Insofern wäre es auch anachronistisch (und sogar logisch schief) die de l'Islesche Modifikationsreihe des Würfels als eine frühe Form des isometrischen Kristallsystems anzusehen.
- 12 Genauer lagen Haüys Publikationen zur Kristallographie im Zeitraum zwischen 1781 und 1822; vgl. zum gesamten §1.2 [Wiederkehr 1974].
- 13 In (1793) und (1801, 28) listete Haüy zusätzlich als sechste Grundform die hexagonale Dipyramide auf, die er später fallen ließ. Dafür ergänzte er die Liste der 5 Grundformen von (1822) auf insgesamt 18 "hypothetische Kerne", die zwar zum Teil von den eigentlichen Grundformen abgeleitet waren, aber theoretisch eine gleichwertige Funktion besaßen und später als Haüys Grundformen betrachtet wurden.
- 14 Im folgenden steht "Prisma" ohne weitere Spezifizierung stets für "gerades Prisma".
- 15 Frankenheim sortierte zunächst aus Symmetrieerwägungen an Raumgittern Haüys Grundform 1 (Tetraeder) und 14 (schiefes Rechteckprisma) aus (Frankenheim 1842, 403). Bravais wies dann noch auf die Identität von 15 (schiefes Rhombenprisma) und 9 (parallelogrammatische Dipyramide) unter dem Gesichtspunkt des zugehörigen Raumgitters hin (modern: Raumgittertyp $2I$) (Bravais 1850, 97, Anm.) — vgl. §3.3.

16 Wegen

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

bei Aufsichtung eines Dodekaeders auf einen Würfel mit Flächenwinkel α würde dies auf ein irrationales Breiten-Höhenverhältnis der hypothetischen subtraktiven Moleküle führen [Marx 1825, 146f.].



17 Also fast gleichzeitig mit Weiß' erstem größeren — und wichtigsten — Beitrag (Weiß 1815) — vgl. §1.4.

18 In (1801) diskutierte Haüy etwa, daß beim Übergang vom generischen Parallelepiped als Grundform zu einem Parallelepiped “d'une forme plus régulière, . . . dont la forme a varié de manière à devenir plus symétrique” gewisse Kanten und Raum- oder beziehungsweise Flächenwinkel gleich werden, die vorher verschieden waren. Das Ergebnis ist dann: “Tout ce qui a lieu sur l'un se répète sur l'autre, et ils doivent être par conséquent marqués de la même lettre” (1801, 121). Bei allen Grundformen zeichnete er “gleiche” Kanten, Raum- und Flächenwinkel aus und arbeitete dort jeweils mit gleichen Dekreszenzen.

19 Etwa wären beim schiefen Dreiecksprisma die beiden Dreiecke nach Haüys Definition “identisch”, ohne daß jedoch eine zugehörige Deckisometrie des Prismas existierte. Bei den von Haüy verwendeten “Kernen” fallen hingegen die lokale metrische Definition von “Identität” und die aus Kongruenzoperationen gewonnene nicht auseinander.

20 Keplers Definitionen waren folgende:

- Regularität eines Polygons: Kanten und “nach außen gerichtete” Winkel gleich;
- Halbregularität eines Polygons: Kanten gleich (Winkel nicht);
- Regularität eines Polyeders: Seitenflächen regulär, Ecken auf einer Kugel und unter sich “gleich” (lokale Kongruenz);
- Halbregularität eines Polyeders: Seitenflächen halbregulär, Ecken von zwei Arten, die auf zwei konzentrischen Sphären liegen

(Kepler 1619, Buch 2, Def. 1, 2, 7, 8).

- 21 In der griechischen Mathematik bedeutete “*συμμετρία* (symmetria)” die Kommensurabilität zweier Größen. In der Spätantike und der Neuzeit erhielt “Symmetrie” die Bedeutung der Proportionenregeln, die beim Entwurf eines “schönen Ganzen” zu berücksichtigen sind — so auch in Diderots “*Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*”, 15, Neufchatel 1765, Neudruck Stuttgart 1967, 735f. Vgl dazu auch [Krümmel 1986]
- 22 Gutes Beispielmateriale für die Diskussion solcher Unterscheidungen hätte Haüy genug gehabt, etwa beim Aufbau folgender Gestalten aus dem Würfel: dem Rhombendodekaeder unter Wahrung der vollen Symmetrie $O^*(110)$ und dem Pyritoeder unter hemiedrischer Symmetriereduktion $T_h(210)$, die für seine Sicht darin zum Ausdruck kam, daß zwar alle Kanten des Würfels “identisch” waren, aber nur jedes zweite Paar aus Kante und inzidierender Seitenfläche (Fig. 2).
- 23 Dieser philosophische (ontologische) “Atomismus” ist nicht mit dem — daraus hervorgegangenen — Atomismus der neuzeitlichen Chemie im Gefolge Daltons zu verwechseln.
- 24 Laplace selber ging davon aus, daß die Intermolekularkräfte nicht dem Gesetz der quadratischen Abnahme, wie etwa die Gravitation, folgten, sondern als Nahwirkungskräfte schneller mit steigenden Entfernungen abnehmen. Das konnte mit Haüys Kristallaufbau der “*molécules intégrantes*” in Einklang gebracht werden, wenn man nur die auf kürzeste Entfernung wirkenden Berührkräfte zuließ. Haüy und auch keiner der engeren Schüler Laplaces machten m.W. jedoch einen Versuch der “offiziellen” Integration der Haüyschen Kristallographie in das Laplacesche Programm.
- 25 Schelling war 1796–1798 als Privatlehrer im Dienste einer adligen Familie in Leipzig und machte in dieser Zeit die Bekanntschaft von Fichte und Goethe. Von 1798 bis 1803 war er Extraordinarius in Jena.
- 26 Briefe von C.S. Weiß an seinen Bruder Christian vom 24.10.1798, 1.1.1799, 12.2.1799, 2.3.1799 (Weiß Ms La 1810, 38r–47v), ausgewertet und ohne Standortangabe zitiert in [Fischer 1963]. Auf diese Briefe wird auch in [Holser 1976] hingewiesen, jedoch mit falscher Standortangabe (Marburg!).
- 27 Die Analogie Kristall-Zelle der zugrundeliegenden formbildenden Kräftesysteme spielte im übrigen bei der Herausbildung der biologischen Zelltheorie im 19. Jahrhundert von Schleiden bis Weismann keine unbedeutende Rolle. Wie weit dies direkt oder indirekt durch Schelling beeinflußt

war, entzieht sich meiner Kenntnis — eine Auswirkung der dynamistischen Naturphilosophie allgemein liegt jedoch ohne Zweifel vor [Lorch 1974; Jahn e.a. 1985, 351ff.].

- 28 C.S. Weiß kritisierte etwa 1805 in Briefen an seinen Bruder nach einem Gespräch mit Fichte dessen Mangel an empirisch gesättigter Naturanschauung (Weiß 24.6.1805, Ms La 1810, 52r–55v) und vertrat gegenüber Schelling die Auffassung, daß "... die Idee nicht wirklich eher da sey, als bis sie auch in das ganz spezielle hineingehe, (und) (...) erst den Dingen gegenüber geweckt werde ...". (C.S. Weiß 5. und 8.8.1806, Ms La 1810, 58r–63v, zitiert nach Schuster 1922a, 91).
- 29 "Die Form, die Figur soll dynamisch erklärt werden. Damit habe ich das große Werk angefangen, in dessen allmählicher Ausführung ich wohl zeit Lebens begriffen bleiben werde" (Weiß an Oken, 3.5.1809, Ms La 1810 7r–11v, hier 9r). Siehe dazu auch Weiß' Briefwechsel mit Oerstedt (Weiß 1920) und Schusters Publikation des Oken-Briefes in [Schuster 1922b].
- 30 "*Non scilicet istas lineas, in quibus characteres formarum crystallinarum principales cernuntur, non pure geometricas, i.e. physice mortuas, et ignaves, agendi vi nulla praeditas, sed utique actuosas esse contendimus, h.e. in his lineis directiones videmus, in quibus praequique agant vires, quae formam nasci jubant.*" (Es ist nicht selbstverständlich, wenn wir behaupten, daß jene Geraden, in denen die Hauptmerkmale der Kristallformen wahrnehmbar sind, nicht rein geometrischer Natur, d.h. physikalisch tot und mit keiner wirkenden Kraft versehen, sondern in gewisser Weise tätig sind, d.h. wenn wir in diesen Geraden Richtungen sehen, in denen jene Kräfte vorwiegend wirken, die die Form entstehen lassen. Weiß 1809, zitiert nach Fischer 1962, 251 — eigene Übersetzung)
- 31 Die Achse als Symmetrieelement scheint bei Weiß — wie später ausdrücklich bei Hessel — schon mehr als bloße Rotationssymmetrie anzudeuten; sie kann als Träger von Drehspiegelungen, Spiegelungen (an einer Orthogonalebene) oder sogar Punktinversion aufgefaßt werden. Spätestens in (1815) wies Weiß bei der Charakterisierung des "ein- und eingliedrigen" (triklinen) Systems in seiner Sprache auf das Vorliegen einer Punktinversion hin (s.u.).
- 32 Weiß verwendete die Terminologie "Krystallisationssystem" für die Gesamtheit der an einem Mineral vorkommenden Formen (einschließlich Spaltkernen). Die übergeordnete Klassifikation bezeichnete er als "Abtheilung" bzw. "Unterabtheilung", sprach aber hin und wieder von "System" in unserem Sinne ("Reguläres System" usw.); vgl. [Fischer 1962, 251f.].

- 33 “Alle anderen Körper (als Würfel, Oktaeder, ..., Trisoktaeder, E.S.), welche in dem sphäroedrischen Systeme möglich sind und von lauter gleichen und ähnlichen Flächen begränzt werden, sind — vorausgesetzt, dass die Flächen einerlei Art, so viele ihrer in dem Systeme möglich, auch alle gleichen Anteil an der Bildung des Körpers nehmen — ohne Ausnahme Acht-und-vierzig-Flächner” (1815, 294).
- 34 Interessanterweise spielten die kristallbildenden Kräftesysteme im Theorieaufbau die Rolle “verborgener Parameter”, die auf der einen Seite in der erscheinenden Kristallgestalt ihren Ausdruck, auf der anderen Seite ihre theoretische Konzentration im Konzept des Achsensystems fanden. Die Beziehung zwischen “Achsensystem” und Kristallgestalt war wiederum präzisierbar. Insofern hatte das Konstrukt der “verborgenen Parameter” hier ohne Zweifel eine fruchtbare (heuristische) Funktion bei der Entfaltung des dynamistischen Forschungsprogramms der Kristallographie durch C.S. Weiß.
- 35 Das galt noch bis vor kurzem. Noch nach Buerger [1963, 164] gibt es keinen zweifelsfreien Nachweis des tatsächlichen Auftretens der Kristallklasse 0 (432 in internationaler Notation). Nach Auskunft der Kristalldatenbank des Chemischen Instituts Bonn gelten mittlerweile jedoch nicht nur alle Kristallklassen sondern sogar sämtliche Raumgruppentypen als empirisch realisiert (Mitteilung von Herrn E. Brieskorn).
- 36 Die Orthoklas-Variante des Feldspat ($KAlSi_3O_8$) kristallisiert monoklin holoedrisch, d.h. in der Kristallklasse C_{2h} .
- 37 “Wer sich mit dem geometrischen Studium der Krystalle beschäftigt, der wird gleichsam a posteriori, d.i. durch den Erfolg überführt, dass die Verhältnisse in den Dimensionen schwerlich anders als in Quadratwurzeln ausdrückbar anzunehmen seyn dürften, und er wird Häüy Dank wissen, dass er für diese Art von Annahmen die Bahn gewiesen hat” (Weiß 1816, 253). Es folgt dann ein Verweis auf die “stärksten Bürgschaften für die ächte Naturgemäßheit” dieser Annahme durch die “abgeleiteten Dimensions- und Längenverhältnisse” im kubischen System, die auch in Quadratwurzeln auszudrücken seien.
- 38 Zum Beispiel seien am Rhombendodekaeder (“Granatoeder”) O das Symmetriezentrum, A und B Ecken “verschiedener Art” (“scharf” resp. “stumpf”), C Fußpunkt des Lotes von O auf eine Kante und D Mitte der Seitenfläche. Dann gilt

$$OA : OB : OC : OD = 1 : \sqrt{\frac{3}{4}} : \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$$

mit der Umkehrproportion $\sqrt{6} : \sqrt{8} : \sqrt{9} : \sqrt{12}$. Weiß sah hierin — nach Weglassung der Quadratwurzel — die Realisierung eines Akkordes aus Oktave (6 : 12), zweier Quinten (2 : 3 = 6 : 9 = 8 : 12) und zweier Quartan (3 : 4 = 6 : 8 = 9 : 12) (Weiß 1819, 229). Diese Arbeit (Weiß 1819) wird auch sehr ausführlich in der sonst nicht sonderlich sorgfältigen Dissertation [Kißler 1974, 9ff.] diskutiert.

- 39 *“Vergleicht man nun die Entwicklung aller dieser Verhältnisse der räumlichen Dimensionen unserer Krystallgestalten mit der der harmonischen Verhältnisse der Töne in der Musik, so ist die Analogie auffallend gross; nur findet man die nämlichen Verhältnisse bei unseren räumlichen Dimensionen in Quadratwurzelgrößen ausgedrückt, welche bei den einfachen Verhältnissen der Töne in ganzen Zahlen relativer Schwingungen angenommen worden (sic!)”* (Weiß 1819, 233).
- 40 Dieser Aspekt wird in der Arbeit [Kißler 1974] ziemlich einseitig hervorgehoben.
- 41 Vgl. [Groth 1926, 73].
- 42 *“Die Richtung der Fläche eines Krystallisationssystems aber wird sich jederzeit in einem einfachen Zahlenverhältnis der drei Dimensionen oder Koordinaten a, b, c ausdrücken lassen”* (Weiß 1817, 309). Diese Formulierung legt die weitere Generalisierung natürlich mehr als nahe.
- 43 Drei oder mehr Flächen gehören einer “Zone” (einem “Zonenverband”) an, g.d. wenn sie einer Geraden (der “Zonenachse”) parallel sind. Die Flächen einer Kristallart lassen sich in der Regel einer gut überschaubaren endlichen Menge von “Zonenverbänden” zuordnen. Weiß entwickelte diese Beobachtung zunächst wieder am Beispiel des Feldspats (Weiß 1820). Mehr dazu in der sehr präzisen Arbeit [Fischer 1962].
- 44 Bei Abkürzung der Weißschen Parameter in diesem System durch $(m_1, m_2, m_3; n)$ repräsentierte Weiß den Orbit von D_{6h} durch

$$\begin{aligned} & \{(\pm(m_{\sigma 1}, m_{\sigma 2}, m_{\sigma 3}); \pm n) \mid \sigma \in \mathcal{S}_3 \text{ zyklisch}\} \\ & \cup \{(\pm(m_{\tau 1}, m_{\tau 2}, m_{\tau 3}); \pm n) \mid \tau \in \mathcal{S}_3 \text{ Transposition}\}. \end{aligned}$$

Analog konnte er im Fall der beiden anderen “Abtheilungen” arbeiten (implizite Charakterisierung von D_{4h}, D_{2h}).

- 45 “Wir haben bisher eigentlich die einzelne Fläche bezeichnet. Sollen die mehreren unter sich gleichartigen Flächen oder ganze von ihnen begrenzte Körper ausgedrückt werden, so bedarf es, wenn die Anzahl der Flächen, deren jede für sich durch das Zeichen ausgedrückt ist, vollständig vorhanden ist, keiner besonderen Bezeichnung; es sind die Flächen $[a : b : c]$ u.s.f. oder der Körper mit den Flächen $[a : b : c]$. Sind sie aber unvollzählig vorhanden, und soll dies im Zeichen ausgedrückt werden, so kann auch dies sehr leicht geschehen ...” (Weiß 1817, 313f.). Die letzte Andeutung wird im folgenden durch Verweis auf die dann immer vorhandene — aber nicht spezifizierte — “Regel für das Ausfallen einer Hälfte der Flächen” ergänzt.
- 46 Alle drei Situationen — auch die von C_{2h} im “zwei- und eingliedrigen” System — waren ja vom Standpunkt der Weißschen Achsensymmetrien Fälle der “Halbflächigkeit”.
- 47 Beim “zwei- und eingliedrigen” System durch die Angabe: Mit $[1, 1, \infty]$ tritt stets auch $[-1, -1, \infty]$, nicht jedoch $[-1, 1, \infty]$ oder $[1, -1, \infty]$ auf (Weiß 1817, 315). Das war eine nicht ganz vollständige Charakterisierung der Einschränkung der Achsensymmetrie des “zwei- und zweigliedrigen” (orthogonalen) Systems mit der impliziten Darstellung von D_{2h} durch $\{(\pm m_1, \pm m_2, \pm m_3)\}$ auf C_{2h} , repräsentiert durch $\{(\pm [m_1, m_2], \pm m_3)\}$. Das Pyritoeder charakterisierte er durch die Angabe der Symbole $[a : 2b : \infty c]$, $[2a : c : \infty b]$, $[b : 2c : \infty a]$ — wohlwollend interpretierbar als Gesamtheit der Flächen mit Weißschen Parametern $[\pm 1, \pm 2, \infty]$, $[\pm 2, \infty, \pm 1]$, $[\infty, \pm 1, \pm 2]$ — und “das Gesetz des Weglassens ... , dass, wenn $[a : 2b : \infty c]$ vorhanden ist, nicht umgekehrt auch das $[2a : b : \infty c]$ mitgebildet wird u.s.f., obgleich $a = b$ ” (Weiß 1817, 317). Die Flächen mit Weißschen Parametern, die durch nichtzyklische Permutationen von $[1, 2, \infty]$ und beliebige Spiegelungen entstehen, sind also auszunehmen.
- 48 “Halbalgebraisch”, weil noch der operative Gesichtspunkt in der Interpretation in der Symbolik fehlt — vgl. den Übergang von Frankenheim zu J.G. Graßmann und Möbius.
- 49 Frankenheims Arbeit (1826) erschien in Okens naturphilosophisch ausgerichtetem Organ “Isis” und wurde wenig beachtet; sie blieb selbst gegen Jahrhundertende unbekannt, als Hessels ebenso recht wenig gelesene Arbeit (Hessel 1830) von Sohncke wieder “ausgegraben” wurde [Sohncke 1891]. Damit war sie etwa eineinhalb Jahrhunderte praktisch vergessen, bis J.J. Burckhardt [1984] sie wiederentdeckte und darauf hinwies, daß Frankenheim schon 1826 die 32 Kristallklassen angegeben hat. Seit dem ausgehenden 19. Jahrhundert war Hessel die Priorität zugesprochen worden. Auch ich verdanke natürlich Herrn Burckhardt den Hinweis auf die Bedeutung der 1826er Arbeit Frankenheims.

- 50 Diese Notation ist nicht konsequent durchgehalten; an entscheidenden Stellen der Liste der teilflächigen Systeme steht stattdessen $[\pm\alpha\alpha+\beta a+a]$ usw. Der Kontext macht aber völlig klar, was gemeint ist. Sehr wahrscheinlich handelt es sich um unkorrigierte Satzfehler. Wie aus Bemerkungen des Korrektors aus dem ersten Teil des Artikels am Ende deutlich hervorgeht, war dieser bei dem vorliegenden Manuskript überfordert: "Das Manuscript unterscheidet nicht gehörig zwischen a und 0." und "Wir bitten künftig um ein besseres Manuscript. Corr." (Frankenheim 1826, 515, 565)
- 51 Von Frankenheim natürlich durch Auflistung aller Elemente angegeben (1826, 544).
- 52 Frankenheims Angabe war in seiner Notation äquivalent zu folgender: Viergliedrige Abteilung (tetragonales System)

$$\begin{aligned}
 D_{4h} &= \{(\pm m_{\sigma_1}, \pm m_{\sigma_2}, \pm m_3) & \sigma \in \mathfrak{S}_2\} \\
 D_{2d} &= \{(\pm m_{\sigma_1}, \pm m_{\sigma_2}, \operatorname{sgn} \sigma m_3) & \sigma \in \mathfrak{S}_2\} \\
 C_{4h} &= \{(\pm(m_{\sigma_1}, \operatorname{sgn} \sigma m_{\sigma_2}), \pm m_3) & \sigma \in \mathfrak{S}_2\} \\
 D_4 &= \{(\pm(m_{\sigma_1}, \epsilon m_{\sigma_2}), \epsilon \operatorname{sgn} \sigma m_3) & \sigma \in \mathfrak{S}_2, \epsilon = \pm 1\} \\
 S_4 = \bar{C}_4 &= \{(\pm(m_{\sigma_1}, \operatorname{sgn} \sigma m_{\sigma_2}), \operatorname{sgn} \sigma m_3) & \sigma \in \mathfrak{S}_2\}
 \end{aligned}$$

Zweigliedrige Abteilung (orthorhombisches, monoklines, triklines System):

$$\begin{aligned}
 D_{2h} &= \{(\pm m_1, \pm m_2, \pm m_3)\} \\
 C_{2h} &= \{\pm(m_1, m_2), \pm m_3\} \\
 D_2 &= \{(\epsilon m_1, \epsilon' m_2, \epsilon \epsilon' m_3) \quad | \quad \epsilon, \epsilon' = \pm 1\} \\
 C_{2v} &= \{(\pm m_1, \pm m_2, m_3)\} \\
 C_i &= \{\pm(m_1, m_2, m_3)\} \\
 C_2 &= \{(\pm(m_1, m_2), m_3)\} \\
 C_s &= \{(m_1, m_2, \pm m_3)\} \\
 C_1 &= \{(m_1, m_2, m_3)\} \quad \text{Frankenheim: "Achttheil"}
 \end{aligned}$$

Sechsgliedrige Abteilung (hexagonales/trigonales System):

$$\begin{aligned}
 D_{6h} &= \{(\pm(m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); \pm n) \quad | \quad \sigma \in \mathfrak{S}_3\} \\
 D_{3d} &= \{(\pm(m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); n) \quad | \quad \sigma \in \mathfrak{S}_3\} \\
 C_{6h} &= \{(\pm(m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); \pm n) \quad | \quad \sigma \in \mathfrak{S}_3 \text{ zyklisch}\} \\
 D_6 &= \{(\pm(m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); \operatorname{sgn} \sigma n) \quad | \quad \sigma \in \mathfrak{S}_3\} \\
 D_{3h} &= \{((m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); \pm n) \quad | \quad \sigma \in \mathfrak{S}_3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{6v} &= \{(\pm(m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); n) \mid \sigma \in \mathcal{S}_3\} \\
C_{3i} &= \{(\pm(m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); n) \mid \sigma \in \mathcal{S}_3 \text{ zyklisch}\} \\
C_{3h} &= \{((m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); \pm n) \mid \sigma \in \mathcal{S}_3 \text{ zyklisch}\} \\
D_3 &= \{((m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); \operatorname{sgn} \sigma n) \mid \sigma \in \mathcal{S}_3\} \\
C_{3v} &= \{((m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); n) \mid \sigma \in \mathcal{S}_3\} \\
C_6 &= \{(\pm(m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); n) \mid \sigma \in \mathcal{S}_3 \text{ zyklisch}\} \\
C_3 &= \{((m_{\sigma_1}, m_{\sigma_2}, m_{\sigma_3}); n) \mid \sigma \in \mathcal{S}_3 \text{ zyklisch}\}
\end{aligned}$$

53 Vgl. Anm. 49.

Anmerkungen zu §2

- 1 Justus G. Graßmann studierte 1799–1801 vornehmlich Theologie in Halle, hörte jedoch auch Mathematik bei Klügel und Physik bei Gilbert. Er wechselte im Jahr 1806 vom Prediger- zum Lehrerberuf. Für weitere biographische Information vgl. [Engel 1911, 2–6]. Da praktisch keine unpublizierten Quellen zu J.G. Graßmann überliefert sind — der einzige mir bekannte Brief von ihm (Graßmann Ms H 1811 (3)) ist für unseren Zusammenhang belanglos — sind wir auf diese Darstellung und Graßmanns publizierte Arbeiten angewiesen.
- 2 Vgl. G. Schubrings höchst aufschlußreiche Studie [1983].
- 3 Graßmann stand nach eigenen Angaben mit der damals gerade herausgekommenen Geschichte von Marx [1825] eine hervorragende Übersicht über die Kristallographie bis hin zu Weiß zur Verfügung; darüberhinaus waren ihm die Arbeiten von Häüy und Mohs zugänglich. Naumann zitierte er bis in die Notationsweise. Aber was Weiß angeht, hatte er mitzuteilen: “Dagegen muß ich es schmerzlich bedauern, dass ich mir die Abhandlungen der Königl. Preuss. Akademie, in welchen die Arbeiten des Prof. Weiss enthalten sind, nicht habe verschaffen können” (Graßmann 1829, XI).
- 4 Implizit hatten vor ihm schon Frankenheim (1826), Whewell (1825) und F. Neumann (1823) diese Art der Charakterisierung (bis auf Normierung) verwendet.
- 5 Permutationen \mathcal{S}_3 repräsentieren geometrisch die erweiterte zyklische Gruppe C_{3v} . Durch Vorzeichenwechsel wird noch die Inversion am Zentrum des Achsensystems adjungiert. Da Spiegelung und Inversion zu einer 2-zähligen Drehung um eine orthogonale Achse zur Spiegelungsebene kombinieren, ist das Resultat D_{3d} .
- 6 Miller wies später noch einmal in einer Notiz auf die weitgehend vergessenen Arbeiten Graßmanns hin (Miller 1868), die schon etwa 30 Jahre früher auf die Darstellung seines eigenen “Treatise on Crystallography” einen gewissen Einfluß genommen hatten (Miller 1839, iii).

- 7 Das ist um so bemerkenswerter, als in Hermann Graßmanns Staatsarbeit (1840) zum ersten Mal ein dreidimensionaler Vektorraumkalkül über \mathbb{R} auftrat. In den 1830er Jahren hatte Möbius in seinem "Barycentrischen Calcul" (1827) indirekt auch vektorielle Operationen entwickelt. Bellavitis, der als erster Vertreter (1835) einer vektoriellen Streckenrechnung angesehen wird, hatte sich im wesentlichen auf den ebenen Fall beschränkt; seine Versuche einer Erweiterung auf den räumlichen Fall waren erfolglos geblieben [Crowe 1967, 52ff.; Favaro 1881].
- 8 Daher stammt auch die Terminologie: "Ger" — Wurfspieß (aus dem Althochdeutschen).
- 9 Das war — wie unter sich induktionistisch gebenden Naturwissenschaftlern ja recht verbreitet — Hessels Formulierung für eine durch Abstraktion aus einigen empirischen Phänomenen gewonnene Gesetzesaussage. Es handelte sich also streng genommen um eine bisher mit der Erfahrung in Einklang stehende Hypothese, keineswegs einen Erfahrungssatz.
- 10 Eigentlich Kongruenz im naiven Sinne durch "Ineinandersetzen" beschrieben und uneigentliche Kongruenz durch eigentliche Kongruenz im "Gegenbild von B ", d.h. einer durch Punktspiegelung aus B gewonnenen Figur B' (Hessel 1830, 1, 20, 32).
- 11
- $$\begin{aligned} A \cong B, \quad B \cong C &\Rightarrow A \cong C, \\ A \mid = \mid B, \quad B \mid = \mid C &\Rightarrow A \cong C, \\ A \cong B, \quad B \mid = \mid C &\Rightarrow A \mid = \mid C, \\ A \mid = \mid B, \quad B \cong C &\Rightarrow A \mid = \mid C \end{aligned}$$
- (Hessel 1830, 1, 21ff.).
- 12 Die Ebene des Spiegelungsanteils m_1 der Drehspiegelung (der "gerenstelligigen Axe") steht orthogonal zur Achse g ; diese wiederum liegt in einer zweiten Spiegelungsebene m_2 ("2-fach"). $h := m_1 \cap m_2$ ist daher eine zu g orthogonale 2-zählige Achse, g also "ebenbildlich": Es handelt sich um die Konstellation der erweiterten Diedergruppe D_{pd} .
- 13 Es werden gelegentlich auch die Bezeichnungen verwendet: $\bar{C}_{2p} = C_p$ für ungerade p , d.h. C_p erweitert um die Inversion, $\bar{C}_{4m} = S_{4m}$ "sphenoidische" Gruppe in Anlehnung an die sphenoidische Kristallklasse $\bar{C}_4 =: S_4$.
- 14 Im Fall diedrischer Gruppen bei $p = 2$ schlug Hessel vor, eine der 2-gliedrigen Achsen beliebig als "Hauptaxe" auszuzeichnen.

- 15 Hessel wies darauf hin, daß der "Mittelpunkt des Gleichwerths" nur bei Vorliegen einer "gleichendigen Axe" eindeutig bestimmt ist, sonst ist er auf einer Geraden (der Achse im Falle C_{pv} mit $p > 1$), einer Ebene (C_{1v}) oder im Raum (C_1) frei wählbar (Hessel 1830, 1, 46f.).
- 16 Beispielsweise gab Hessel das Strahlensystem zu D_{kh} ("gleichstellig 2-endiger, 2-fach k -gliedriger Hauptaxe") durch folgende Informationen an: 2 k -gliedrige Hauptstrahlen in der Hauptachse selber, k 2-fach 2-gliedrige "Querstrahlen 1. Art", k 2-fach 2-gliedrige "Querstrahlen 2. Art" (die beiden Konjugationsklassen der Diederrotation der Ordnung 2), ∞ 2-fach 1-gliedrige "Querstrahlen" (in der horizontalen Spiegelungsebene), ∞ 2-fach 1-gliedrige "Strebestrahlen" in den "Hauptflügelflächen" 1. und 2. Art, davon je $2k$ von "derselben Art" (das sind die Strahlen in den vertikalen Spiegelungsebenen über den "Querstrahlen 1. bzw. 2. Art"), ∞ 1-fach 1-gliedrige "Strebestrahlen" (alle übrigen Strahlen, also die mit trivialem Stabilisator). Für k gerade sind die letzteren "gerenstellig" (gehen durch Inversion in den gegenüberliegenden Strahl über), während die 2-gliedrigen Achsen "gleichstellig" sind (orthogonal zu einer Spiegelungsebene stehen) (Hessel 1830, 1, 50ff.).
- 17 Etwa in den Arbeiten von Minnigerode (1887) und Schoenflies (1888, 1890).
- 18 Hessel führte zunächst in seiner Tabelle 36 Systeme an: 5 hauptachsenlose, jeweils 7 mit 3-, 2-, 1-gliedriger Hauptachse, aber nur jeweils 5 mit 6- und 4-gliedriger Hauptachse, weil \bar{C}_{2p} und D_{pd} für $p = 4, 6$ die Bedingung $m \leq 3$ nicht erfüllen. Er selbst wies aber auf 4 Doppelzählungen hin, die darin enthalten waren: $D_{1d} = C_{2h}$, $D_1 = C_2$, $D_{1v} = C_{2v}$, $C_{1v} = C_{1h}$ (1830, 2, 97f.).
- 19 Hessel war von der Aufnahme seiner Arbeit sichtlich enttäuscht. So glaubte er sich etwa in einem undatierten, wahrscheinlich aber noch in den 1830er Jahren (in jedem Fall nach 1830) geschriebenen Brief an Schubert in Erlangen verteidigen zu müssen:
- "Das wichtigste meiner literarischen Producte ist (...) meine Krystallogometrie, welche ich — beiläufig gesagt — nicht geschrieben habe, um von Leuten, die sie nicht gehörig verstanden haben, scharfsinnig gescholten zu werden, sondern weil ich die von mir erkannten mathematischen Wahrheiten als solche von jedem, der Lust und Belieben dazu hat, sie zu studieren, anerkannt wissen wollte"* (Hessel Ms 2640).
- Die anderen mir bekannten Briefe (Hessel Ms K 35) enthalten keine Informationen über die Zusammenarbeit mit anderen Mineralogen oder der Aufnahme seiner Arbeit (1830).

- 20 Die Neigung Frankenheims zur naturphilosophisch ausgerichteten Naturforschung wird durch solche Umstände wie die Publikation seiner ersten bedeutenden kristallographischen Arbeit (1826) in dem Journal "Isis" und einer engen persönlichen Bekanntschaft mit dem naturphilosophisch orientierten Botaniker Nees van Esenbeck weiter bestätigt. Leider enthalten die überlieferten Briefe Frankenheims an N. v. Esenbeck (4 Briefe aus den 1830er bis 1850er Jahren, Frankenheim Ms G1 1827(5)) lediglich persönliche Informationen.
- 21 Bei Isolierung des trigonalen vom hexagonalen System mit Holoedrien D_{3d} bzw. D_{6h} . Frankenheim faßte dagegen im Anschluß an Mohs das trigonal/hexagonale System zu einem zusammen.
- 22 In (1835, 296, 312 u.a.) sprach Frankenheim hier von "Krystallfamilien", änderte diese Terminologie später (1842) in "Ordnungen" ab. Auch in anderer Hinsicht veränderte sich seine Terminologie im Laufe der Jahre:

Frankenheim 1826/1835	Frankenheim 1842	modern
"System"	"Classe/System"	System
"Familie/Grundform"	"Ordnung/Grundform"	Gittertyp
"Unterabtheilung"	"Familie"	Kristallklasse

- 23 "Es scheint mir nicht passend, die Hypothese selber hier vollständig zu entwickeln. Ich betrete das schlüpfrige Gebiet solcher Hypothesen nur ungern und bin überdies von der Wahrheit des ersten Satzes (der atomistischen Hypothese, E.S.) keineswegs überzeugt. Ein großer Theil der Naturforscher hält ihn jedoch für evident, und diese werden, wenn sie consequent verfahren, die Resultate erlangen, die ich kurz angedeutet habe." (Frankenheim 1835, 312)
- 24 Vom wissenschaftstheoretischen Gesichtspunkt aus liegt hier eine forschungsorientierende Vermutung vor, die funktionell mit einem Heuristikelement des "Gürtels" eines Forschungsprogramms im Lakatosschen Sinne vergleichbar ist. Interessanterweise lag Frankenheims Vermutung aber nicht im "Gürtel" des von ihm favorisierten dynamistischen Programms; das hätte den Versuch einer strikteren Assimilation des aus dem atomistischen Programm entnommenen Gedankens erfordert — einen Versuch, den Frankenheim zwar für wünschenswert hielt, ohne ihn aber realisieren zu können (1835, 312f.). Seine Vorgehensweise stellte stattdessen einen Ansatz für eine heuristische Verbindung der beiden Forschungsprogramme dar, die nun nicht mehr allein in einem Konkurrenzverhältnis zueinander standen.

25 Zu Werners und insbesondere Häüys Auffassung zu dieser bijektiven Korrespondenz zwischen Kristallform und chemischer Substanz vgl. [Schütt 1984, 50ff.].

26 “Wir behalten die sechs, wie wir glauben, zuerst von Bernhardt und Weiss aufgestellten Systeme bei und nennen sie:

I. Tesseral	$A = B = C,$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ.$
II. Tetragonal	$B = C,$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ.$
III. Hexagonal	$B = C,$	$\alpha = 120^\circ, \beta = \gamma = 90^\circ.$
IV. Isoklinisch		$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ.$
V. Monoklinisch		$\beta = \gamma = 90^\circ.$
VI. Triklinisch”		(Frankenheim 1842, 480).

Und: “Eine Classe bilden alle Krystalle, deren Krystallform einem Systeme angehört (ebda., 484).”

27 [v.Engelhardt 1978, Caneva 1978, Williams 1974].

28 [Crowe 1967, 225ff.; Scholz 1983, 1984b].

Anmerkungen zu §3

- 1 Die Ablehnung der dynamistischen Auffassungen begann mit der Auseinandersetzung um Weiß' Kommentar zu Haüy's "Traité de Minéralogie" (Chevenix 1804) und fand noch nach der Jahrhundertmitte in einem biographischen Artikel über Haüy ihren Niederschlag (Delafosse/Duraziers 1854) — vgl. auch [Burke 1966, 153f., 165f.].

- 2 Im englischsprachigen Raum wurden dagegen neue Ideen der "deutschen Schule", die sich in die eigene, empirisch orientierte Forschung integrieren ließen, zügig aufgenommen und weiterverarbeitet. Dabei spielten zunächst von deutscher Seite Mohs und Haidinger, etwas später von englischer Seite Miller eine wichtige verbindende Rolle [Groth 1926, 249ff.; Burke 1974; Deas 1959]. Die über etwa drei Jahrzehnte weiterhin sehr starke Dominanz Haüy's in Frankreich erscheint in diesem Lichte als eine gewisse Sonderentwicklung.

- 3 Vgl. dazu auch [Schütt 1985].

- 4 Delafosse zitierte insbesondere Weiß, Naumann, Neumann, Rose, Mohs (1832), Frankenheim (1835) (Delafosse 1843, 644, 657f., 669f., 673).

- 5 Vgl. dazu auch [Burke 1966, 165f.].

- 6 Im Falle des Borazit ergibt etwa die Auswertung der Kristallgestalten die "Molekülsymmetrie" (Kristallklasse) T_d . Die Moleküle, "... qui dans le boracite peuvent etre regardées comme des tétraèdres réguliers ...", sind nach Delafosse alle in gleicher Ausrichtung von Basis und Spitze angeordnet. Damit erklärte er die Polarität, die beim Phänomen der Pyroelektrizität auftritt (Delafosse 1840, 400).
 Das Phänomen der Pyroelektrizität war schon Mitte des 18. Jahrhunderts von Aepinus (1724–1802) am Turmalin ($NaMg_3B_3Al_6Si_6O_{27}(OH)_4$, Kristallklasse $C_{3v} = 3m$) entdeckt worden. Die Bezeichnung "Pyroelektrizität" geht auf Brewster zurück (1824), der weitere Vertreter dieser Eigenschaft entdeckte.

- 7 So gab Bravais etwa explizite Hinweise auf Weiß in (1849b, 53; 1851, 237), auf Miller in (1851, 13ff.) und Frankenheim in (1850, 94).

- 8 Während Bravais auf eine Reihe von Arbeiten anderer Kristallographen, auf die er aufbaute, explizit hinwies (vgl. Anm. 7), gab er keinen Hinweis auf Hessel. Außerdem war seine Liste der endlichen Punktsymmetriesysteme nicht ganz vollständig, weil er keine Drehspiegelungen als eigenständige Symmetrieelemente betrachtete. Nach einer mehr als nur oberflächlichen Lektüre Hessels wäre das kaum denkbar gewesen.
- 9 Ist ρ eine Drehspiegelung geradzahlgiger Ordnung $2q$ und m die zugehörige Spiegelung, ρ' eine Rotation um π bezüglich derselben Achse, i die Punktinversion bezüglich dem Schnittpunkt der Achse mit der zugehörigen Spiegelungsebene, so ist

$$\begin{aligned} \text{für } 2q \equiv 2(\text{mod } 4), \quad q \equiv 1(\text{mod } 2), \quad \text{also } \rho^q &= \rho' m = i, \\ \text{für } 2q \equiv 0(\text{mod } 4) \quad q \equiv 2(\text{mod } 2), \quad \text{also } \rho^q &= \rho'. \end{aligned}$$

Im ersten Falle ist ρ offenbar durch Bravais' Symmetrieelemente darstellbar. Ist nämlich ρ'' eine reine Rotation der Ordnung $2q + 1$ um dieselbe Achse wie ρ (Ordnung $4q + 2$), so ist

$$\rho = \rho^{i^2} = \rho(m\rho')i = (\rho m)^{2q+2}i = \rho''^{(q+1)}i.$$

Auf den "Verlust" von \bar{C}_{4q} bei Bravais wies im übrigen schon Schoenflies (1891, 79, 104f.) hin.

- 10 Bravais legte das "Mémoire" (Bravais 1850) am 11.12.1848 der Académie des Sciences vor. Ein sehr positiver Bericht einer aus Biot, Beudant, Dufrenoy, Regnault, Lamé und Cauchy bestehenden Kommission wurde am 6.8.1849 vorgetragen (Cauchy 1849).
- 11 Ausgehend von einem Punkt P_0 des Gitters wird ein Punkt P_1 minimalen Abstands gewählt, zur Gerade $g_{P_0P_1} = P_0 \cdot P_1$ wiederum ein Punkt P_2 minimalen Abstandes und analog P_3 mit Minimalabstand zur Ebene $E_{P_0P_1P_2} = g_{P_0P_1} \cdot P_3$. $P_0P_1P_2P_3$ definiert ein "tétraèdre principal" (Bravais 1850, 22, 54).
- 12 Dabei ist Θ die quadratische Form der euklidischen Metrik bezogen auf Koordinaten im System "konjugierter Achsen" der zugrundegelegten Elementarzelle $P_0P_1P_2P_3$; also in vektorieller Symbolik mit $\overline{P_0P_i} =: a_i$

$$\langle a_i, a_j \rangle =: g_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) := \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} x_i x_j$$

- 13 “Netzebene (plan réticulaire)” ist eine Ebene, die mindestens drei nicht kollineare Gitterpunkte enthält und damit ein ganzes Netz (Bravais 1850, 7).
- 14 Bravais konnte dabei auf ein Studium der von Punktinversionen erzeugten Symmetriesysteme von Gittern durch Bréton (1845) aufbauen, auf dessen Arbeit er ausdrücklich verwies (Bravais 1850, 94).
- 15 Die moderne Definition der Bravaisysteme arbeitet bekanntlich mit Raumgruppentypen und entsteht durch Vergrößerung der Einteilung in arithmetische Kristallklassen [Neubüser e.a. 1981]. Die Einteilung beruht aber bei geometrischer Interpretation auf der generischen Symmetrie des zugehörigen Gitters. Insofern steht die moderne Einteilung (der ebenen oder räumlichen Gruppen) in Bravaisystemen in unmittelbarer Parallele zu Bravais’ Einteilung der Punktgitter in Symmetrietypen. Letztere wird daher i.f. als “Gittersysteme” bezeichnet (vgl. auch Anhang).
- 16 Entsprechend für die 14 semidirekten Erweiterungen der Raumgitter mit ihren jeweiligen Minimalsymmetrien.
- 17 Dieses Generizitätsprinzip bestimmt nicht in allen Fällen das Gittersystem eines hypothetischen Moleküls in eindeutiger Weise. Die offen bleibenden Fälle stehen im Zusammenhang mit der Nichteindeutigkeit der Einteilung von Raumgruppen in das trigonale bzw. hexagonale System, je nachdem der Weißsche Standpunkt (Klassifikation nach dem orthogonalen Anteil der Raumgruppe) oder der Bravais’sche Standpunkt (Symmetrietyp des Gitters) eingenommen wird (s.u.).
- 18 Die hochgestellte “4” im Symbol $[\Lambda^2, 0C, 0P]^4$ repräsentiert diese in Bravais’ Notationen fixierbare Paradoxie: eine Achse mit reinem Rotationsanteil der Ordnung 2, dennoch im tetragonalen (“quarternären”) System.
- “J’ai exclu les polyèdres qui offriraient ce singulier genre de symétrie de l’étude générale que j’ai faite des polyèdres symétriques, avec d’autant moins de scrupules qu’il ne paraît pas que ce cas singulier se rencontre dans la nature.”* (Bravais 1851, 229)
- 19 In Anlehnung an Miller (1839) verwendete Bravais für eine Fläche mit Normale (g, h, k) im Punktgitter die Notation $(g h k)$, für die zugehörige holoedrische einfache Gestalt $\{g h k\}$ und für meriedrische Gestalten $\mu\{g h k\}$ (Bravais 1851, 218).

- 20 Einschließlich der Gestalten der sonst nicht berücksichtigten Kristallklasse \bar{C}_4 ; vgl. Anm. 19.
- 21 Unter der Voraussetzung, daß Bravais eine einigermaßen vollständige Übersicht für seine Zeit geben konnte, scheint die sichere Identifizierung von 18 empirisch auftretenden Kristallklassen, 7 holoeдрische und 11 meriedrische (O^* , T_d , T_h ; D_{6h} , C_{6h} ; D_{3d} , D_3 , C_{3v} ; D_{4h} , C_{4h} , D_{2d} , D_4 ; D_{2h} , C_4 ; D_2 ; C_{2h} , C_2 ; $\bar{C}_2 = C_i$) keine wesentliche Erweiterung in dieser Hinsicht seit Hessel zu signalisieren, der schon 17 Kristallklassen als sicher identifiziert ansah: zwei weniger (D_4 und C_2), dafür aber eine andere mehr ($\bar{C}_6 = C_{3i}$, identifiziert als "Apotomes Eisen" — Ilmenit $FeTiO_3$). Es waren also nicht neue empirische Erkenntnisse, die Bravais Theorie erforderlich machten.
- 22 Insgesamt sind 73 der 230 Raumgruppentypen in natürlicher Weise als semidirektes Produkt ihres Translationsgitters mit ihrem orthogonalen Anteil darstellbar (vgl. Anhang). Zwei davon konnte Bravais nicht erhalten, weil er die zugehörige Kristallklasse als "Anomalie" behandelte: $\mathbb{Z}(4P) * \bar{C}_4$ und $\mathbb{Z}(4I) * \bar{C}_4$ (int. Not. $P\bar{4}$, $I\bar{4}$). Natürlich läßt sich die Bravaissche Tabelle auch so lesen, daß darin die Klassen möglicher Erweiterungen von 31 Kristallklassen mit den 14 Gittertypen angedeutet sind; das entspräche einem impliziten Hinweis auf 71 (der 73) arithmetischen Kristallklassen. Jedoch wäre diese Interpretation weiter vom Bravaisschen Text entfernt, da Bravais lediglich Deckisometriesysteme einfacher Punktgitter, evtl. reduziert durch die "Molekülsymmetrien" diskutierte. Die Möglichkeit verschränkter Erweiterungen tauchte bei ihm dagegen (verständlicherweise) nicht auf.
- 23 Das entspricht zunächst der Beobachtung, daß allein für die Kristallklassen $K = C_3$, D_3 , C_{3i} , C_{3v} , D_{3d} Raumgruppen durch semidirekte Produktbildungen mit Gittern aus verschiedenen Gittersystemen gebildet werden können, nämlich jeweils $G = \mathbb{Z}(3P) * K$ und $G' = \mathbb{Z}(3R) * K$. Während G' unter beiden Gesichtspunkten dem trigonalen System zugehört, ist G dem hexagonalen Bravaissystem, aber natürlich dem trigonalen Kristallsystem zuzuordnen. Vom Standpunkt des entwickelten Raumgruppenkonzepts sind insgesamt diejenigen 18 Raumgruppentypen betroffen (d.h. werden je nach Klassifikation gemäß Kristallsystem bzw. Bravaissystem verschiedenen Systemen zugeordnet), die durch Erweiterung eines Gitters Γ mit Elementarzelle vom Typ $3P$ (Holoedrie D_{6h}) durch eine orthogonale Gruppe aus dem trigonalen Kristallsystem (Holoedrie D_{3d}) entsteht (vgl. etwa [Brown e.a. 1978, 19f.]).

Anmerkungen zu §4

- 1 H. Wußing beschreibt diesen Sachverhalt durch eine zu große Antizipation in der "Intension" des Begriffes gegenüber dem historisch erreichten Stand von dessen "Extension" [Wußing 1967].
- 2 Erst 1873 wurde Jordan Dozent und Examiner der Ecole Polytechnique, 1876 Professor der Analysis. 1885 trat er von seiner Funktion als Ingenieur zurück [Lesbesgue 1923, Dieudonné 1973]. Für seine früheren Arbeiten zur Galoistheorie siehe [Wußing 1969, 100ff.], zur Flächentopologie [Scholz 1980, 154ff.].
- 3 Die explizite Forderung der Existenz von Inversen und damit die formelle Trennung der (unendlichen) Gruppen von den Halbgruppen erfolgte erst ein bis zwei Jahrzehnte später. In den frühen Arbeiten der 1870er Jahre verwendeten Lie und Klein als explizite Forderung an Transformationsgruppen lediglich die Abgeschlossenheit unter Komposition; stillschweigend gingen sie aber immer von der Existenz von Inversen und Neutralem aus. Das gilt insbesondere für Lies erste Arbeiten zu seinem Klassifikationsprogramm kontinuierlicher Transformationsgruppen (1874; 1876a,b; 1878 a,b usw.). Erst in der zweiten Hälfte der 1870er Jahre entdeckte er, daß in der Deduktion der Existenz von Inversen im Fall unendlicher Gruppen ein größeres Problem lag als vorhergesehen (Lie 1880, 5). Aber selbst dann glaubte er zunächst noch für einige Zeit daran, daß zumindest bei einer geeigneten Explizierung des Attributs "kontinuierlich" die Existenz von Inversen beweisbar sein könnte. Sein Schüler F. Engel erschütterte diese Annahme durch ein einfaches Gegenbeispiel, das Lies Bedingungen an kontinuierliche Transformationsgruppen genügte (Lie 1884, 500). In der Konsequenz deuteten Lies spätere Bemerkungen zur axiomatischen Charakterisierung des Gruppenbegriffs eine Unterscheidung zwischen dem Konzept einer allgemeinen "Gruppe von Operationen", von denen er bewußt lediglich Halbgruppeneigenschaften forderte (Lie 1895, 597), und den spezielleren Transformationsgruppen an, die in seinen Arbeiten behandelt wurden und (in unserem Sinne) die vollen Gruppeneigenschaften besaßen (Lie 1891). Auf diesen bisher wenig studierten Sachverhalt, daß Lie und auch andere Mathematiker des ausgehenden 19. Jahrhunderts zum Teil auch noch nach der Klärung der Unterscheidung der Eigenschaften von Halbgruppen und Gruppen bewußt von "Gruppe" sprachen, wenn sie lediglich Halbgruppeneigenschaften

forderten, weist dankenswerterweise K.H. Hoffmann hin [1983, 1985]. Zur Ausformulierung der vollen Gruppeneigenschaften bei Lie siehe auch [Wußing 1969, 166–171].

- 4 Seien B_r und $B'_{r'}$ Rotationsanteile der Schraubenbewegungen $A_{r,t}$ und $A'_{r',t'}$ um Achsen $B \parallel A$ und $B' \parallel A'$ durch einen vorgegebenen festen Punkt. Dann rechnete Jordan wie folgt (bis auf kleine Abweichungen in der Notationsweise):

$$A_{r,t} = t \cdot A_{r,0} = (t + t_1) \cdot B_r = (\tilde{t}, B_r) \quad \text{im semidirekten Produkt}$$

mit Notation der Translationen durch t, t_1, \tilde{t} usw., t_1 orthogonal zu A und $\tilde{t} = t + t_1$,

$$\begin{aligned} A'_{r',t'} &= t' \cdot A'_{r',0} = (t' + t'_1) \cdot B'_{r'} = (\tilde{t}', B'_{r'}) \\ A'_{r',t'} \cdot A_{r,t} &= (\tilde{t}' + B'_{r'}\tilde{t}, B'_{r'}B_r) = (\tilde{t}'', B''_{r''}) \\ &= (t'' + t''_1, B''_{r''}) = A''_{r'',t''} \\ \text{mit } B''_{r''} &= B'_{r'}B_r \quad \text{in } O(3, \mathbb{R}) \quad \text{und } t'' \parallel B'' \end{aligned}$$

(Jordan 1869, 234).

- 5 “*Cette proposition présente une analogie remarquable avec un théorème fort utile dans la théorie des substitutions, qui a été donnée par Cauchy et par M. Betti, et que j’ai retrouvé depuis au début de mes recherches sur le même sujet.*” (Jordan 1869, 235)

- 6 Jordan klassifizierte in 6 Kategorien, je nachdem der rotative Anteil G_o einer Bewegungsgruppe

- (i) von einer endlichen oder unendlich kleinen Rotation erzeugt wird: $G_o \cong C_n, S^1$,
- (ii) dito, zusätzlich noch eine orthogonale binäre Rotation $G_o \cong D_n, S^1 \oplus C_2$,
- (iii)–(v) eine Deckbewegungsgruppe der platonischen Körper bildet: $G_o \cong T, O, I$,
- (iv) $G_o \cong SO(3, \mathbb{R})$.

- 7 Reine Translationsgruppen also isomorph zu $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \mathbb{R}, \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{R}^3$.

- 8 $C_n, S^1, D_n, S^1 \oplus C_2, T, O, I, SO(3, \mathbb{R})$ — vgl. Anm. 6.

- 9 Bei einer Darstellung von G_o durch Terme $P_i(\rho_1, \dots, \rho_k)$, $1 \leq i \leq |G_o|$, stellen dann die Translationen, die sich aus den Relationen der Gruppentafel ergeben, also etwa für $h = P_i$, $h' = P_j$, $hh' = P_l \in G_o$

$$f_{h,h'} = P_i(\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_k)P_j(\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_k)P_l(\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_k)^{-1} \in \Gamma$$

die Werte des Faktorensystems der Erweiterung von Γ durch G_o dar. Die Assoziativitätsbedingung

$$\varphi(h)f_{h',h''}f_{hh',h''}^{-1}f_{h,h'h''}f_{h,h'}^{-1} = 1$$

ist durch die Realisierung als Operationensystem (zunächst Halbgruppe) in $\text{Isom}^+(\mathbb{E}^3)$ gewährleistet. Die Gruppeneigenschaft folgt aus der Erweiterungstheorie von Gruppen — vgl. z.B. [Suzuki 1982, 192ff.] oder auch Anhang, Theorem 8. Für Jordan war die Gruppeneigenschaft natürlich durch die Definition qua geometrischer Erzeugung evident.

- 10 Beispiele (Zusammenfassung des Resultats) in (Jordan 1869): “93. Art” kristallographischer Raumgruppentyp internationale Notation $P2_12_12$ erzeugt aus $\Gamma = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ mit 3 paarweise orthogonalen Translationen a_1, a_2, a_3 durch Erweiterung mit $D_2 (= 222)$; Erzeugende ρ_1, ρ_2 , von D_2 , wobei

$$\tilde{\rho}_1 = \left(\frac{a_1}{2}, X_\pi \right), \quad \tilde{\rho}_2 = \left(\frac{a_2}{2}, Y_\pi \right), \quad \text{Isom}^+(E^3) \cong R^3 * SO(3, R)$$

Dabei seien in Anlehnung an Jordan $X_\alpha, Y_\beta, Z_\gamma$ Rotationen vom Winkel α, β, γ um die $x/y/z$ -Achsen respektive, parallel a_1, a_2, a_3 . Die Relationen reduzieren sich hier im wesentlichen auf

$$\rho_1^2 = \rho_2^2 = (\rho_1\rho_2)^2 = 1.$$

$$\text{Mit } \rho_3 := \rho_1\rho_2, \quad \tilde{\rho}_3 := \tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2 = \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2}, Z_\pi \right)$$

Mit $\rho_3 := \rho_1\rho_2$, $\tilde{\rho}_3 := \tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2 = \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2}, Z_\pi \right)$ ist dann die o.a. Bedingung evident:

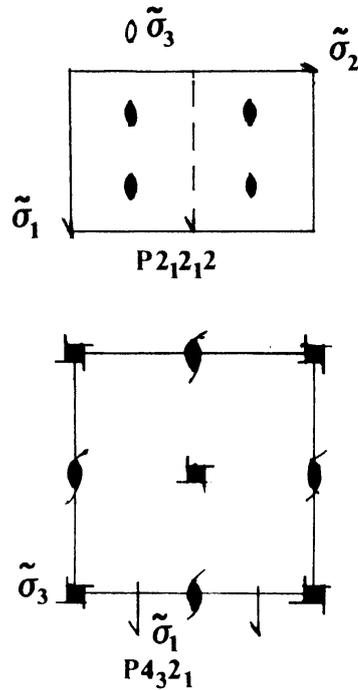
$$\begin{aligned} f_{\rho_1\rho_2} &= a_1, & f_{\rho_1\rho_2} &= 0, & f_{\rho_1\rho_3} &= a_1, \\ f_{\rho_2\rho_1} &= -a_1 + a_2, & f_{\rho_2\rho_2} &= a_2, & f_{\rho_2\rho_3} &= -a_1, \\ f_{\rho_3\rho_1} &= -a_2, & f_{\rho_3\rho_2} &= -a_2, & f_{\rho_3\rho_3} &= 0. \end{aligned}$$

Analog in den anderen Fällen, von denen etwa ein verwickelterer Fall bei Jordans "124. Art" (1869, 268f.) — internationale Notation $P4_32_12$ — auftrat. Diese wird durch Erweiterung von $\Gamma = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ mit paarweise orthogonalen Translationen und $|a_1| = |a_2|$ mittels D_4 (= 422) erzeugt, wobei die Erzeugenden ρ_3 (Rotation der Ordnung 4) und ρ_1 (Ordnung 2) von D_4 bei der Raumgruppe zu Schraubenbewegungen

$$\tilde{\rho}_3 = \left(\frac{4}{3}a_3, Z_{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$\tilde{\rho}_1 = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}, X_{\frac{\pi}{2}} \right)$$

führen. (Zur geometrischen Konstellation erzeugender Symmetrieelemente siehe Skizze mit Symbolik wie in der Kristallographie üblich; vgl. etwa [Buerger 1963]).



- 11 Vgl. Anm. 8.
- 12 So gab Jordan bei den kristallographischen Raumgruppen mit Schraubenbewegungen verschiedene Darstellungen derselben Gruppe in verschiedenen "Arten" an. Er zählte etwa in der 3. Kategorie (rotativer Anteil Tetraedergruppe T) 15 (eigentlich) diskontinuierliche Gruppen mit dreidimensionalem Translationsgitter (also relativ kompakten Fundamentalbereich) auf. Es gibt aber nur 5 kristallographische Raumgruppentypen in dieser "Kategorie" ($P23$, $F23$, $I23$, $I2_13$, $P2_13$). Die Liste enthält also 10 "Arten", die durch Doppelzählung zustande kommen.
- 13 Es fehlen im regulären System $I4_132$ im trigonalen (Kristallsystem) $P312$, $P3_112$, $P3_212$ und im orthorhombischen $P2_12_12_1$ und $C222_1$. Darauf wurde schon von Sohncke und Schoenflies (1887) hingewiesen. Schoenflies behauptete dabei, daß $P222_1$ (Schoenflies' V_7 , später D_2^2) bei Jordan auch fehlt. Das stimmt jedoch nicht: sie ist Jordans Nr. 95.

-
- 14 Von den 24 kristallographischen Raumgruppentypen aus eigentlichen Bewegungen fehlte eine in Jordans Liste, nämlich $P321 = \mathbb{Z}(3P) *_k D_3$. Dagegen ist $P312 = \mathbb{Z}(3P) *_d D_3$ die "130" Art. Dabei ist $P321$ als semidirekte Erweiterung durch die Operation von D_3 auf $\mathbb{Z}(3P)$ definiert, bei der die binären Achsen von D_3 längs der Kanten des ($60^\circ/120^\circ$ -) Basisrhombus von $\mathbb{Z}(3P)$ liegen; bei $P312$ liegen sie dagegen zu dessen Diagonalen parallel.
- 15 Dieses Manuskript (Klein Ms XXII G) wird demnächst von D. Rowe publiziert und ausführlich ausgewertet. Zur Problematik der Beziehung zwischen Klein und Lie — insbesondere deren rapide Verschlechterung nach 1889 — siehe [Rowe o.D.]. Zu Lies und Kleins Beiträgen zur Herausbildung des Transformationsgruppenkonzepts siehe auch [Yaglom 1988], das mir erst während der Fahnenkorrektur zugänglich wurde.
- 16 Klein war als Schüler Plückers (während 1865 bis 1868) und nach einer ersten kurzen, aber intensiven Beeinflussung durch Clebsch (während Kleins Göttingen Aufenthalt vom Januar bis August 1869) in dieser Hinsicht von großer Bedeutung für die mathematische Entwicklung des bis dahin weitgehend autodidaktisch gebildeten, aber um 7 Jahre älteren Lie; vgl. [Noether 1900, Freudenthal 1973, Rowe o.D.], sowie (Klein 1921, 50–52) und (Klein Ms XXII G).
- 17 "Es war durchaus naturgemäss, dass Lie in unserem wissenschaftlichen Verkehr die führende Rolle zufiel, während ich mehr für die klare Durcharbeitung und geeignete Darstellung seiner nur theilweise fertigen Gedanken sorgte" (Klein Ms XXII G).
- 18 So Klein in (Ms XXII G).
- 19 Wir verwenden hier die von Klein in (1872a) eingeführte Notation $M_n^{(m_1, \dots, m_k)}$ für eine n -dimensionale projektive Varietät in $P(n+k, \mathbb{C})$, die als simultane Nullstellenmenge von k Gleichungen des Grades m_1, \dots, m_k ausgezeichnet ist.
- 20 Vgl. (Klein XXII G)
- 21 (Klein 1871) wurde am 19.8.1871 fertiggestellt, (Klein 1872a) im Oktober 1871.

- 22 Dabei ist anzumerken, daß der erste Teil der Dissertation (Lie 1871a) ursprünglich norwegisch verfaßt und publiziert worden ist und erst bei der Aufnahme in die Gesammelten Abhandlungen Lies von Engel/Heegard ins Deutsche übertragen wurde. Das wurde dadurch möglich und nahegelegt, daß der zweite Teil (Lie 1871b) von Lie selbst für die Erstpublikation auf deutsch verfaßt wurde. Lie sprach hier von einer "Klasse von Transformationen (Classe geometriske Transformationer)" — so auch noch in der Selbstanzeige (Lie 1871c) der Dissertation — und verwendete "Gruppe" rein umgangssprachlich etwa für n -Tupeln von Variablen (1871a, 146), Geradenkonfigurationen (1871b, 207) usw. Über Gesamtheiten von Transformationen sprach er als "allgemeine Transformation, die n Konstanten enthält" (1871a, 146ff.).
- 23 Auf den historischen Stellenwert dieser Andeutung weist auch Wußing [1969, 159] hin. Jedoch scheint ihm die Tatsache und die Bedeutung des terminologischen Bruchs bei Lie entgangen zu sein, der deutlich auf das Gewicht der Jordanschen Arbeit (1869) für die Formulierung dieser Programmidee verweist.
- 24 So soll die relativ ausführliche Terminologiediskussion an dieser Stelle verstanden werden. Die Terminologie ist ja "an sich" nicht von solcher Bedeutung, sondern eher formelle Hülle des mathematischen Gedankens. Erst als sichtbarer sprachlicher Ausdruck von Einflüssen und kontextuellen Bedeutungen bekommt sie hier Gewicht für die Historiographie.
- 25 Klein selber schilderte den Unterschied von Lies und seiner Arbeitsweise folgendermaßen:
- "Lie hat immer nur seine eigenen Probleme gekannt und mit Ausschliesslichkeit verfolgt. Eben hierin liegt die Stärke und die Grösse seines Erfolgs. Meine Art ist umgekehrt, fortzuschreiten, indem ich die Untersuchungen Anderer von meinem Standpuncte aus auffasse, zu producieren, indem ich recipiere. Mein Plan muß sein, wechselnd die verschiedenen Gebiete der neueren Mathematik zu durchwandern, um schliesslich, soweit das gelingen mag, eine Gesamtübersicht zu erreichen, von der aus sich eine allseitige Wirkung ermöglicht."* (Klein Ms XXII G) — Vgl. Anm. 15.
- 26 Vgl. dazu [Russo 1968].
- 27 Insbesondere die Thesen (ii) und (iii) lassen sich natürlich im Lichte der weiteren Entwicklung nicht ganz ohne Einschränkungen teilen.
- 28 Siehe dazu die ausführliche Diskussion in [Hawkins 1984].

- 29 Seine Sprechweise war hier noch die von “Zyklus der wirklichen Bewegungen” für die Gruppe der eigentlichen Bewegungen, von “dreifach unendlicher Schar linearer Transformationen”, “Zyklus linearer Transformationen im Raume” usw. (Klein 1871, 282, 302).
- 30 Möglicherweise spielte bei Lies Reaktion zusätzlich eine Rolle, daß Lie kaum zur Formulierung gewissermaßen metageometrischer Ideen neigte, wie sie Kleins “Erlanger Programm” nun einmal enthielt. Lie sah möglicherweise keine Notwendigkeit für die Explizierung von Überlegungen oberhalb der Ebene von forschungsprogrammatischen Zielen. Zum Vergleich des Lieschen Klassifikationsprogramms kontinuierlicher Transformationsgruppen mit dem “Erlanger Programm” siehe [Hawkins 1984].
- 31 Das “Erlanger Programm” besaß selber nicht die Eigenschaften eines Forschungsprogramms (darauf weist etwa auch Hawkins in [1984] hin). Klein versuchte in ihm jedoch, eine Ordnung in die verschiedenartigen geometrischen Forschungsprogramme seiner Zeit zu bringen und eine übergeordnete gemeinsame Orientierung zu formulieren. In diesem Sinne war es ein Stück “Metamathematik” in einem anderen Sinne als später bei Hilbert: nicht zur formellen Grundlagensicherung, sondern zur Verständigung auf gemeinsame Forschungsorientierungen in einem komplexer werdenden, arbeitsteiligen Wissenschaftssystem. In diesem Sinne war es ab den 1890er Jahren für einige Jahrzehnte auch durchaus effizient. Das scheint Hawkins in [1984] zu übersehen, wo das “Erlanger Programm” ohne weiteres mit Lies oder Killings Programm der Klassifizierung der kontinuierlichen Transformationsgruppen verglichen wird und dabei natürlich schlecht abschneidet.
- 32 Das schließt natürlich nicht aus, daß Klein die Arbeit eventuell schon vorher sah, ohne daß dies sichtliche Konsequenzen für seine eigene Arbeit gehabt hätte.
- 33 Jordan übertrug die aus der Kristallographie adaptierte Bezeichnung für Untergruppen als “groupes méridriques” (1869, 302) auch in geänderter Zusammenhang auf Isomorphismen/Homomorphismen (mit nicht-trivialem Kern), als er im “Traité des Substitutions” von “isomorphisme holédrique” und “isomorphisme méridrique” sprach (Jordan 1870, 56). Diese zunächst für Substitutionsgruppen verwendeten Konzepte wurden später von F. Klein (1884, 8) auf strukturgleiche Gruppen verschiedenartiger Realisierungen übertragen (“holoedrischer/meriedrischer Isomorphismus”) und ging in die Fachterminologie des ausgehenden 19. Jahrhunderts ein [Wußing 1969, 151].
- 34 Vgl. Anm. 31.

Anmerkungen zu §5

- 1 Vgl. [Burke 1976].
- 2 Gadolin verwendete zwar die Terminologie “groupes cristallographiques” für die Kristallklassen; diese Terminologie bezeichnete aber lediglich die Gesamtheiten gleichberechtigter Richtungen bzw. Flächen in einem Kristall. Das entspricht dem Orbit einer Gruppe; dieser wurde von Gadolin ohne explizite operative Struktur verwendet — und damit die Bezeichnung “Gruppe” im umgangssprachlichen Sinne.
- 3 Gadolin identifizierte drei von F. Naumann im tetragonalen System aufgezählte Symmetrietypen als schon bekannte Kristallklassen des orthorhombischen Systems, nämlich Naumanns “rhombotypische Hemiedrie” des tetragonalen Systems als D_{2h} (Holoedrie des orthorhombischen Systems), die “rhombotypische Tetartoedrie” als D_2 (in Gadolins Terminologie: “sphenoidale Hemiedrie des rhombischen Systems”) und die “Hemimorphie der sphenoidalen Hemiedrie des tetragonalen Systems” als C_{2v} (Gadolin: “Hemimorphie des rhombischen Systems”). Unter den von G. Rose angegebenen Symmetrietypen identifizierte er sowohl die “Meroedrie des tetragonalen Systems” als auch die “Meroedrie des monoklinen Systems” als C_{2h} (Holodrie des monoklinen Systems). Darüberhinaus verwarf er, wie andere vor ihm, die Existenz eines in der Mohs-Tradition zunächst angenommenen “diklinen Systems” und analysierte die zugehörigen Kristallgestalten und Klassen als solche des monoklinen Systems mit speziellen Winkelparametern der Achsen (Gadolin 1871, 60ff.).
- 4 Zur Bedeutung der Dyckschen Arbeiten als Ausgangspunkt für die kombinatorische Gruppentheorie endlich präsentierbarer Gruppen siehe [Chandler/Magnus 1982].
- 5 Darauf weist schon Engel in [1984, 210] hin.
- 6 Diskontinuierliche Bewegungsgruppen ohne relativ kompakten Fundamentalbereich charakterisierte Sohncke entsprechend durch die Bedingung “... welche Punktsystemen entsprechen, die nicht nach allen 3 Dimensionen unendlich ausgedehnt sind” (Sohncke 1879, 25).

-
- 7 Vgl. §4.2, insbesondere Anm. 13.
 - 8 Raumgruppe $C222_1$ trat bei Sohncke als “zusammengesetztes rhombisches 2-Punktschraubensystem” (Nr. 9) und als “System der Rhombensäule 2. Art” (Nr. 13) auf.
 - 9 Eine entsprechende Idee hatte vor ihm schon C. Wiener (1869, 82ff.) formuliert.
 - 10 Zur Biographie vgl. [Šafranovskij 1980, 273ff.; Spangenberg 1933; Meniaïlov 1972] und die mir nicht zugängliche Arbeit [Šafranovskij 1963].
 - 11 Berichtet in (Fedorov 1900, 468ff.) — vgl. auch [Šafranovskij 1980, 277].
 - 12 Fedorov griff dabei die Innovationsfeindlichkeit an, die er im unmittelbaren Einfluß der zaristischen Bürokratie auf die Akademie begründet sah [Šafranovskij 1980, 274]. Er stand über diese fachpolitische Haltung hinausgehend in einer grundsätzlichen politischen Opposition zum zaristischen Absolutismus, die sich auf populistische Grundüberzeugungen gründete [Šafranovskij 1980, 274f.; Meniaïlov 1972].
 - 13 Siehe dazu die Diskussion von (Fedorov 1885) in [Galiulin/Senechal 1984].
 - 14 Fedorov ging also anscheinend davon aus, daß jede monoedrische Pflasterung im \mathbb{E}^2 bzw. \mathbb{E}^3 isoedrisch ist, d.h. ziegeltransitive Symmetriegruppe besitzt. Das ist für eine Anfang der 1880er Jahre geschriebene Arbeit, fast zwei Jahrzehnte vor der Formulierung von Hilberts 18. Problem (vgl. §5.6), mehr als verständlich.
 - 15 Siehe [Galuilin/Senechal 1984, 13ff.] für eine Übersetzung der zentralen Passage des Beweises im ebenen Fall und deren Diskussion.
 - 16 Die von Fedorov gewählte Bezeichnung “Triparallelogramm” verweist auf die affin invarianten 3 Paare paralleler Kanten des Hexagons.
 - 17 Die Fedorovsche Terminologie des “ n -Paralleloeders” ($n = 3, 4, 5, 6$) verweist auf die jeweilige (affin invariante) Anzahl von Paaren paralleler Seitenflächen. Siehe für eine erneute Herleitung auch (Fedorov 1896, 124ff.) und — in etwas anderer Vorgehensweise — (Schoenflies 1923, 505ff.); vgl. auch [Aleksandrov 1958; Tòth 1965, 114-119, 121-123].

- 18 Minkowski klassifizierte vor seiner Fragestellung herkommend die "Paralleloeder" unabhängig von Fedorov. Er glaubte dabei kurzzeitig an die Existenz eines Dodekaparalleloeders. Schoenflies, der Minkowskis und Fedorovs Arbeiten kannte, stellte eine Verbindung zwischen beiden Ansätzen her (Schoenflies an Fedorov 15.5.1892, 3.6.1892, 9.6.1892). Vgl. auch Minkowskis Sicht in seinem Brief an Hilbert vom 11.6.1892 (Minkowski 1973, 47) und [Burckhardt 1969].
- 19 In (1892, 29) schrieb Fedorov, daß er "erst vor kurzem seine (Hessels; E.S.) Arbeiten kennen zu lernen und zu studieren das Vergnügen gehabt" habe.
- 20 Fedorovs Darstellung läßt sich als eine effiziente symbolische Zusammenfassung der Darstellungen von Symmetriebeziehungen auffassen, die Frankenheim und J. G. Graßmann verwendeten. Fedorov kannte deren Arbeiten allerdings zu diesem Zeitpunkt sicherlich nicht.
- 21 Der erste erhaltene Brief Schoenflies' an Klein stammt vom 5.5.1885 (Codex Ms. Klein, Göttingen, 11:728).
- 22 Zur Beziehung Schoenflies-Fedorov vgl. auch Burckhardts Darstellung [1967/68], die jedoch noch ohne Kenntnis des von ihm selber wenige Jahre später deutsch herausgegebenen Briefwechsels (Fedorov/Schoenflies 1970) entstanden ist und dementsprechend an einigen Stellen offen bzw. unklar blieb.
- 23 Zweite überarbeitete Auflage (Schoenflies 1923) und Reprint der 1891er Ausgabe im Jahre 1984.
- 24 Siehe dazu [Johnson 1979, 174ff.].
- 25 Da $\mathbb{R}^3 \cong \text{Isom}(\mathbb{E}^3)/O(3, \mathbb{R})$ homogener Raum mit lokalkompakter Gruppe $\text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ und kompakter Untergruppe ist, sind für $G < \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ äquivalent:
- (i) G diskrete Untergruppe von $\text{Isom}(\mathbb{E}^3)$,
 - (ii) G diskontinuierlich,
 - (iii) G eigentlich diskontinuierlich.
- Für Schoenflies erschienen diese Unterscheidungen daher zurecht bestenfalls als verschiedene Aspekte desselben grundlegenden Sachverhaltes.
- 26 Wie eine Korrektur am ursprünglichen Manuskript zeigt, reichte Schoenflies diese Arbeit (1887a, b) über Felix Klein im Sommer 1886 ein (Schoenflies an Klein 1.9.1886; Codex Ms. Klein 11:729).

- 27 Reduzierte Operation einer Achse ist die Erzeugende der Stabilisators der Achse in der Raumgruppe; analog für Ebenen — vgl Definition 6.
- 28 Die Bedingung (i) sichert den für die Erweiterung von G durch $\langle \beta \rangle < \text{Isom}^+(\mathbb{E}^3)$ notwendigen Homorphismus $\langle \beta \rangle \rightarrow \text{Aut}(G)$, Bedingung (ii) die Existenz eines Faktorensystems mit Werten in Γ und damit eine Erweiterung von G ohne Änderung des Translationsgitters (vgl. Anhang Lemma 7, Thm. 8).
- 29 So Schoenflies in (1890, 239) und im Brief an Fedorov am 4.7.1890 (Fedorov/Schoenflies 1970, Brief #540). Ein geeigneter Anlaß bot sich etwa anlässlich des Erscheinens von (Schoenflies 1887).
- 30 *“Die Krystallelemente erfüllen entweder den Raum stetig, oder wenn dies nicht der Fall ist, so sind sie als punktuelle resp. körperliche discrete Atome zu betrachten, die sich in irgendwelcher Weise bewegen. Die Gleichwerthigkeit aller Punkte bietet den Vorzug, daß die vorstehend auseinandergesetzte Theorie (die mit kristallographischen Raumgruppen und zugehörigen Pflasterungen arbeitet; E.S.) mit jeder hierüber möglichen Hypothese ohne jede Modifikation vereinbar ist.”* (Schoenflies 1888b, 499)
- 31 Pa und Ia repräsentieren die Erweiterungen von $\mathbb{Z}(2P)$ bzw. $\mathbb{Z}(2I)$ durch die Gleitspiegelung $S(a/2)$ [Buerger 1963, 298ff.]. Im übrigen sind etwas andere Darstellungen (und damit auch Symbolisierungen) dieser Raumgruppen im Gebrauch: $Im = Am = Bm$, $Ia = Aa = Bb$.
- 32 Diese Erzeugung von $I\bar{4}3d$ gab Schoenflies in seinem Brief an Fedorov vom 17.3.1891 an (Schoenflies/Fedorov 1970, 112), in dem er nach anfänglichen Einwänden die Existenz dieser von Fedorov im November 1890 entdeckten Raumgruppe anerkannte (vgl. §5.4). In (1891) wählte er dann eine andere Erzeugungsweise.
- 33 $P\bar{4}2_1c$ (in (Schoenflies 1891a) V_d^4 bzw. D_{2d}^4) erschien in (1889) in der Version “ V_8^d ” und “ V_8^q ” als Erweiterung von “ V_8 ” ($P2_12_12$) durch eine Diagonalspiegelung (V_8^q) bzw. eine Drehspiegelung S_q , deren Achse mit der der reinen Drehungsachse von $P2_12_12$ übereinstimmt (V_8^d) (1889, 196f.). Darauf wurde Schoenflies von Fedorov (1890, 118) und Brief vom 21.10. 1890 (alten Stils) (Schoenflies/Fedorov 1970, 97) hingewiesen (vgl. §5.4).

- 34 Schoenflies wies auf eine solche “im Prinzip” genannte Gruppe in seinem Brief an Fedorov vom 29. 10.1890 hin. Die Angabe der Raumgruppen mit zyklischer Kristallklasse in (Schoenflies 1889) war völlig unübersichtlich. Es gibt deren 63, Schoenflies zählte am Ende des Absatzes 62. Diese Zählung erweist sich als praktisch unüberprüfbar, weil die gebildeten Gruppen und die dabei auftretenden Äquivalenzen zum Teil nur angedeutet und nicht einzeln aufgelistet sind. Schoenflies durchschaute in seinem Briefwechsel mit Fedorov die eigene Zählung nicht mehr (Schoenflies an Fedorov 17.11.1890 und 28.11. 1890; in: Fedorov/Schoenflies 1970, 96, 100, 106ff.). Nachdem er die Zahl der zyklischen Gruppen zunächst korrekt auf 63 erhöht hatte, ging er weiter auf 64 hoch und glaubte, damit eine endgültige Übereinstimmung mit Fedorovs Ergebnissen erzielt zu haben. Dieser entdeckte kurz darauf jedoch eine Doppelzählung unter seinen eigenen Symmetriesystemen in der Kristallklasse C_{2v} (vgl. §5.4). Das zeigt, wie “anpassbar” die Lesweise des Abschnittes über Erweiterung Sohnckescher Gruppen mit zyklischer Kristallklasse in (Schoenflies 1889) war.
- 35 “Alter Stil” bezieht sich auf die Angabe vor der Kalenderreform von 1918. Im uns interessierenden Zeitraum ergibt sich das reformierte Datum durch “Datum neuen Stils” = “Datum alten Stils” +12 Tage. Im folgenden sind Datumsangaben bezüglich Fedorov entweder stets im alten Stil oder als Doppelangaben zur besseren Vergleichbarkeit vermerkt. Zitate vom Typ (Fedorov an Schoenflies, “Datum”) bzw. (Schoenflies an Fedorov, “Datum”) beziehen sich im folgenden stets auf (Fedorov/Schoenflies 1970).
- 36 *“Pod prabilnuju sistemoju figur ja podrazuměvaju takuju beskonečnuju vo včech naprabilenijach sovokupnost’ konečnych figur, što esli my privedem po zakonam simmetrii v sovmečenie dve is figur, vchodščich v sostav sistemy, to sovmeštjatsja i sami sistemy.”* (Fedorov 1890/91a, 10)
- 37 Zum Beispiel in [Grünbaum/Shephard 1987, 34], wo als “reguläre Pflasterung” eine Pflasterung mit ziegel- und fahnentransitiver Symmetriegruppe bezeichnet wird (“Fahne” im Sinne eines 4-tupels aus paarweise inzidierenden Ziegeln, Seitenflächen, Kanten und Ecken von Ziegeln).
- 38 *“Predstaviv sebě, što my proizveli včě vozmoznyja dvizenija sovměščeni-ja, my vměstě s těm polučaem sovokupnost’ vseh ètich èlementov simmetrii, opredělenno raspoloživsichsja v prostranstvě i vpolně točno obuslovlivajuščich zakon simmetrii sistemy. Zakon ètot budet soveršenno toždestven kak dlja simmetrii někotoroj pravil’noj sistemy figur, tak i dlja simmetrii vyvedennoj iz neja pravil’noj sistemy toček. Po ètomu zakonu my možem raspologat’ v prostranstvě netol’ko točki, gruppy toček,*

proizvol'nyja figury, no daže voobšče proizvol'nye geometričeskije obrazy" (Fedorov 1890/91a, 11; Hervorhebung im Original) — Im Text angegebene Übersetzung V. Scholz. Dieses Zitat, wie auch das von Anm. 37, in englischer Übersetzung in (Fedorov 1890/91/1971, 53).

- 39 In der heutigen kristallographischen Literatur werden diese Gruppen in Anlehnung an Fedorovs Terminologie als "symmorphe Gruppen" bezeichnet [Wondratschek 1983] — vgl. Anhang 1.4.
- 40 "Konjugierte Netzebene" einer Translation $\tau_1 \in \Gamma < G$ ist eine Ebenenrichtung, die zwei Translationen, $\tau_1, \tau_2 \in \Gamma$ enthält, sodaß $\Gamma = \langle \tau_1, \tau_2, \tau_3 \rangle$. Eine solche existiert immer. Fedorovs Beobachtung war: Hat eine p -zählige Drehachse A mit elementarer Translation τ keine *orthogonale* konjugierte Netzebene und ist τ' eine konjugierte Translation, dann ist die Komponente von τ' längs A gerade $\tau/2$ bzw. $\tau/3$, je nachdem p gerade ist oder $p = 3$ (Fedorov 1890/91a, Thm. 7; 1971, 61).
- 41 Fedorov gab direkt mit der Einführung des Systems an, welchem Schoenflieschen es entsprach (Fedorov 1890/91b, 1891b). In der Symbolik von (Schoenflies 1889) handelte es sich um " V_2^i ", später (Schoenflies 1891a) als " V_h^{27} " bzw. " D_h^{27} " bezeichnet.
- 42 So gab Fedorov dem neuen System zunächst die Bezeichnung "55h" (hemimorph) (Fedorov 1890b, 1891b) und änderte sie später nach einer Neustrukturierung seiner Bezeichnung zu "21a" (asymmorph) ab [Šafranovskij 1980, 286ff.].
- 43 Vgl. Anm. 36.
- 44 Am 15./27.12.1890 schrieb er an Schoenflies in einem nichterhaltenen Brief von dieser Entdeckung. Schoenflies nahm später ausdrücklich darauf Bezug (Schoenflies an Fedorov 17.3.1891).
- 45 Die Übersetzung (Fedorov 1971) ist leider schlecht ediert. Das Original (1890/91a) wurde in mehrfacher Hinsicht ohne Hinweis geändert ("aktualisiert"): Im Vorwort (Fedorov 1890/91/1971, 51) ist von 230 Systemen die Rede, dagegen in der Originalversion von (1890/91a, 4) von 229. Die Doppelzählungen und Lücken wurden bei der Übersetzung eliminiert und die späteren Fedorovschen Bezeichnungen für die Gruppen eingesetzt. So ist nach all den im Text angebrachten Änderungen unklar, was durch die am Ende des Textes (Fedorov 1971, 119) angefügte Korrekturnote (Fedorov 1890/91b) überhaupt noch korrigiert werden soll!

- 46 (Fedorov 1890/91a, 4, Anm. 2), in der Übersetzung (Fedorov 1971) ungeändert als Anmerkung 9 angegeben. Daß diese schon im Vorabdruck von 1890 enthalten war, geht aus Schoenflies' Brief an Fedorov vom 29.10.1890 hervor.
- 47 Fedorovs Briefe #235 und #242 an Schoenflies sind undatiert. Sie sind der Numerierung entsprechend in (Schoenflies/Fedorov 1970/71) hinter #234 vom 25.11./6.12.1890 eingeordnet. Beide lassen sich aber grob datieren und sind eindeutig *vor* #234 geschrieben. #242 wurde unmittelbar nach #235 verfaßt; das geht aus dem ersten Satz zweifelsfrei hervor. #242 ist eine direkte Antwort auf Schoenflies' Brief #543 vom 10.11.1890. Die Brieflaufzeiten Göttingen–St. Petersburg waren etwa 3 bis 4 Tage (Fedorov antwortete etwa am 21.10./2.11.1890 auf einen Brief Schoenflies' vom 29.10.1890); frühestes Datum für #242 ist also der 14.11.1890, für #235 demnach etwa der 11.11.1890 (neuen Stils). Schoenflies antwortete am 17.11. auf #235, ohne #242 zu erwähnen, den er wiederum am 18.11. — anscheinend nicht unverzüglich nach Eintreffen — beantwortete. Die Laufzeiten in umgekehrter Richtung waren höchstens einen Tag länger (Schoenflies' Antwort #548 vom 22.1.1891 auf Fedorovs Anfrage vom 5./17.1.1891). #235 ist also zwischen dem 12.11. und 14.11.1890 (neuen Stils) geschrieben, #242 demgemäß zwischen dem 14.11. und 17.11.1890 (neuen Stils). Die Reihenfolge der Briefe ist also abweichend von der publizierten folgende:
- Sch. an F. #543 (10.11.1890) — F. an Sch. #235 — Sch. an F. #544 (17.11.1890) — F. an Sch. #242 (evtl. Überschneidung mit #544) — Sch. an F. #545 (28.11.1890) — F. an Sch. #234 (25.11./6.12.1890).
- 48 Vgl. (Schoenflies an Fedorov 14.12.1889, 4.7.1890 usw.).
- 49 Das geschah zunächst mit dem Schreiben vom 17.11.1890 vor Ankunft des Antwortbriefs Fedorovs, auf den Schoenflies am 28.11. erneut reagierte
- 50 Die "Zapiski" geben im Inhaltsverzeichnis als Datum dieser Sitzung den 16./28.11.1890 an; dagegen wird im Text über dem Protokoll der 13./25.11.1890 angegeben.
- 51 Insofern ergibt sich aus den Quellen für Ende November 1890 ein etwas widersprüchliches Bild von Fedorovs aktueller Position. Es lohnt sich jedoch nicht, die möglichen Erklärungsvarianten davon zu diskutieren. Die Lage klärte sich wenig später endgültig durch Fedorovs nicht erhaltenen Brief an Schoenflies vom 15./27.12.1890 (Anm. 45) und Schoenflies' Reaktion darauf. Fedorov hatte seiner Notiz (1890/91b) dem mathematischen Sachverhalt nach so bald nichts mehr hinzuzufügen. Auf der Sitzung der Petersburger Mineralogischen Gesellschaft vom 11./23.12.1890

trug er über die Einordnung mineralogischer Beobachtungen in sein neues Raumsymmetriekonzept vor; die 230er Liste wurde nun von ihm vorausgesetzt (Fedorov 1889/90c).

52 Fedorov hatte schon im Tafelanhang an sein (1890/91a) zur Charakterisierung der "Symmetriearten" (Kristallklassen) die graphische Darstellung von Symmetrieelementen verwendet, die sich später in der kristallographischen Literatur international durchgesetzt hat.

53 Int. Not.	P1	P2	Pm	Cm	Pg		
Fedorov	1ps	4ps	2ps	3ps	1pa		
Jordan	2	27	28	32	30		
Sohncke	–	XI	–	–	–		
Int. Not.	Pmm	Cmm	Pgm	Pgg	P4	P4mm	P4gm
Fedorov	5ps	6ps	2pa	3pa	7ps	8ps	4pa
Jordan	86	87	90	88	53	115	123
Sohncke	X	VI	XIII	XII	IV	VII	V
Int. Not.	P3	P31m	P3m1	P6	P6mm		
Fedorov	9ps	10ps	11ps	12ps	13ps		
Jordan	60	129	–	46	107		
Sohncke	III	IX	II	I	VIII		

(Fedorov 1891a, 387)

54 Bekannter wurden die erneuten Ableitungen der ebenen Ornamentgruppen durch Pólya (1924). Dabei wies schon Speiser (1956, 86) darauf hin, daß sie von Fricke schon fast 30 Jahre früher angegeben worden waren (Fricke/Klein 1897, 222–234). Die Fricke/Kleinsche Darstellung geht von der Kleinschen Ableitung der hyperbolischen, parabolischen (euklidischen) und elliptischen Geometrie aus der projektiven Geometrie aus und gibt in der Tat im euklidischen Fall eine vollständige Liste der ebenen Ornamentgruppen. Dazu werden noch drei Friesgruppen hinzugefügt (in der Ebene also mit unbeschränktem Fundamentbereich); das erklärt die zusammenfassende Bemerkung, daß die vorgestellte Liste 20 Gruppen enthält (Fricke/Klein 1897, 234). — Burckhardt [1967/68] und Delone [1976] verwiesen auf die noch frühere vollständige Angabe der ebenen Ornamentgruppen durch Fedorov.

55 Schoenflies nahm an dieser Stelle die Einteilung der Kristallklassen nach dem "Symmetriotypus" der orthogonalen Gruppen vor, zunächst *ohne Bezug zur Symmetrie von Raumgittern*, also etwa vom Weißschen Standpunkt aus. Er gab dabei 6 Systeme an:

- reguläres System: vier 3-zählige Achsen,
- hexagonales System: 6-zählige oder 3-zählige *Hauptachse*,

- tetragonales System: 4-zählige *Hauptachse*
- und falls höchstens 2-zählige Achsen auftreten:
- orthorhombisches System: mehrere Achsen bzw. Spiegelebenen,
 - monoklines System: eine Achse bzw. Spiegelebene,
 - triklines System: keine Achse oder Spiegelebene (1891a, 128).

Das “hexagonale System” unterteilte er allein unter dem Aspekt der Punktsymmetrie in “hexagonalen Typus” ($D_{6h}, D_6, C_{6v}, C_{6h}, C_6, D_{3d}, C_{3i}$) und “trigonalen Typus” ($D_{3h}, D_3, C_{3h}, C_3, C_{3v}$).

Im zweiten Abschnitt seines Buches ergänzte er dies durch die für die Raumgruppen wesentliche Diskussion der Symmetrie von Raumgittern und leitete die 7 Bravaisysteme ab (1891a, 290ff.). Das führte ihn auf die zugehörige Unterteilung der Kristallklassen (und Raumgruppen) in die 7 Kristallsysteme (siehe auch Anhang 1.2) mit der Unterteilung “trigonal” ($D_{3d}, D_3, C_{3i}, C_{3v}, C_3$) und “hexagonal” ($D_{6h}, D_6, C_{6h}, C_{6v}, C_6, D_{3h}, C_{3h}$) (1891a, 519ff.).

56 “Unter einer endlichen Gruppe von Operationen verstehen wir eine endliche Reihe nicht äquivalenter Operationen von der besonderen Beschaffenheit, dass das Product von irgend zweien derselben stets einer Operation der Reihe äquivalent ist.” (Schoenflies 1891a, 54)

57 Siehe §4, Anm. 3.

58 Die von Schoenflies bis Bieberbach verwendete Definition war: $G < \text{Isom}(\mathbb{E}^n) \cong \mathbb{R}^n * O(n, \mathbb{R})$ “enthält unendlich kleine Operationen”, genau dann wenn

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists g \in G \quad g = (t, \alpha) \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in O(n, \mathbb{R})$$

$$\text{und} \quad |t| < \epsilon, \quad |\alpha - 1|_{\text{sup}} < \epsilon$$

(Schoenflies 1891a, 628, $n=3$; Bieberbach 1910b, 313).

59 Die Irrationalität des Drehwinkels verletzt nämlich die Diskretheitsbedingung von G (führt auf “unendlich kleine Operationen”) (Schoenflies 1891a, 631–636).

60 Rohn bewies, daß eine kristallographische Gruppe keine Schraubungen mit Winkel $< (2\pi/6)$ (1899, 454ff.) und genauer nur mit Winkeln $\alpha = (2\pi/k)$ ($p = 1, 2, 3, 4, 6; k \in \mathbb{Z}$) enthält (1899, 454f.; 1900). Schoenflies rechnete daraufhin in seinem Bericht für die “Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften” den gesamten Existenzbeweis für

das Translationsgitter Rohn zu (Schoenflies 1905, 463) — eine freundliche Untertreibung seines eigenen Beitrages. Der Spezialfall des Satzes von Bieberbach für $n = 3$ könnte also als “Satz von Schoenflies-Rohn” bezeichnet werden.

61 Schoenflies formulierte die Bedingung in geometrischer Form als:

λ läßt das Achsensystem und das System der Symmetrieebenen von G invariant.

Damit ist $\lambda^{-1}g\lambda \in G$ für $g \in G \setminus \Gamma$ gesichert. Bei Berücksichtigung der stillschweigend als selbstverständlich vorausgesetzten Annahme, daß der rotative Anteil $\rho(\lambda) =: \rho_\lambda$ das Punktgitter von Γ invariant läßt, $\rho_\lambda\Gamma = \Gamma$, gilt auch $\lambda^{-1}\Gamma\lambda = \Gamma < G$.

62 Schoenflies formulierte lediglich die Bedingung $l' \in G$. Das reicht jedoch offensichtlich nicht aus, wie etwa das Beispiel mit $G = \mathbb{Z}(4P)$, $\tilde{G} = P4_1$ und $\tilde{G}' = P4_2$ zeigt.

63 Zum Vergleich der verschiedenen Bezeichnungsweisen von Raumgruppen siehe [Šafranovskij 1980, 286ff.; Henry/Lonsdale 1969, 545-553].

64 Für $G(T)$, die zu erweiternde Raumgruppe der Kristallklasse T , können nur 4 Gruppen auftreten, von denen bei Erweiterung durch die Diagonalspiegelung $S(d)$ bzw. die zugehörige Schubspiegelung $S_d(\tau)$ mit $\tau = (1/2)(t_1 + t_2 + t_3)$ jeweils nur drei in Frage kommen.

$G(T)$	$P23$	$F23$	$I23$	$I2_13$
$G(D_2)$	$P222$	$F222$	$I222$	$I2_12_12_1$

Erweiterung durch S_d

$G(D_{2d})$	$P\bar{4}2m$	$I\bar{4}2m2$	$I\bar{4}22m$	—
$G(T_d)$	$P\bar{4}23m$	$F\bar{4}23m$	$I\bar{4}23m$	—
	$=: T_d^1$	$=: T_d^2$	$=: T_d^3$	—

Erweiterung durch $S_d(\tau)$

$G(D_{2d})$	$P\bar{4}22c$	$I\bar{4}2c2$	—	$I\bar{4}22d$
$G(T_d)$	$P\bar{4}23n$	$F\bar{4}23c$	—	$I\bar{4}23d$
	$=: T_d^4$	$=: T_d^5$		$=: T_d^6$

(Schoenflies 1891a, 540f.).

65 Wie weit er dabei Erfolg hatte, ist schwer zu entscheiden, weil seine Klassifikationskriterien implizit blieben und seine Klassifikationsmethoden stark auf geometrischer Intuition beruhten. Es tritt hinzu, daß seine spezifische Restriktion durch die Fedorovschen Strukturarten nach Entdeckung der Röntgenstrahlbeugungsmethoden als kristallphysikalische Hypothese ihre Bedeutung verlor und auch mathematisch meines Wissens nicht weiter verfolgt wurde.

66 Fedorov trug anscheinend durch eine kleine Stilisierung des Sachverhalts ungewollt zur Mythenbildung einer völlig getrennten Entdeckung bei (Fedorov 1892, 25f.). Er erwähnte zwar, daß er Schoenflies' Artikel über Raumteilungen (1888a) gelesen hatte und davon angeregt wurde, setzte dann aber in etwas einseitiger Pointierung fort:

“Damals kannte Schoenflies noch nichts über meine russisch geschriebenen Werke, deren eines (Fedorov 1885; E.S.) den Inhalt jenes Artikels schon lange vorher bekannt gemacht hatte. Wir setzten unsere wissenschaftliche Tätigkeit fast unabhängig (weder hier noch an anderer publizierter Stelle weiter ausgeführt; E.S.) fort und nun, nachdem wir Beide die ersten Resultate dieser Tätigkeiten publiziert hatten, tritt eine höchst wundersame Thatsache zu Tage: eine solche Uebereinstimmung in der Arbeit zweier Forscher, wie vielleicht die Geschichte der Wissenschaft kein anderes Beispiel aufzustellen vermöchte.” (Fedorov 1892, 26)

Der letzte Satz ist angesichts der in der Wissenschaftsgeschichte relativ häufig auftretenden Doppelentdeckungen und der Probleme, die Fedorov und Schoenflies hatten, bevor die Übereinstimmung der Resultate wirklich erzielt war, als Legende anzusehen. Darauf wies schon Schwarzenberger [1980, 132f.] hin.

67 Barlow verwies in (1894) sowohl auf (Schoenflies 1891a) als auch auf (Fedorov 1892), erklärte allerdings bei der Ausarbeitung der Ideen, die in seinem Artikel dargestellt wurden, lediglich Fedorovs kurze Zusammenfassung (1892) zur Hand gehabt zu haben, nicht dagegen Schoenflies' ausführliche Darstellung in Buchform [Holser 1970, 762].

68 Die Entdeckung wurde von Max Laue und Mitarbeitern (W. Friedrich, P. Knipping) gemacht. Die Namensänderung in “Max von Laue” erfolgte erst im Jahre 1914. Sie hatte im übrigen nichts mit Max' wissenschaftlichen Verdiensten zu tun, sondern ergab sich als Folge einer seinem Vater zugedachten Ehrung, der sich in der Militärgerichtsbarkeit um den Wilhelminischen Staat verdient gemacht hatte [Hermann 1973, 51].

- 69 Bis 1912 — und tatsächlich noch einige Jahre später — war eine Bestimmung des Raumgruppentyps eines Kristalls unmöglich. Volle Ausnutzung morphologischer und kristallphysikalischer Daten gestatteten bestenfalls eine Bestimmung von Raumgittertyp und Kristallklasse. Bei der naheliegenden Annahme, daß der Gittertyp keine Scheinsymmetrie (vom Standpunkt der aufzustellenden Raumgruppe aus betrachtet; vgl. Anhang 1.2) aufweist, war dadurch — außer für die Kristallklassen D_{3d} , D_{3h} , D_3 , C_{3v} , D_{2d} , C_{2v} — die arithmetische Kristallklasse bestimmbar. Bei den genannten Kristallklassen sogar weniger, weil sie in jeweils zwei wesentlich verschiedenen Weisen auf zugehörigen Gittern operieren können und damit auf jeweils zwei arithmetische Kristallklassen führen. Das war also im Prinzip nicht mehr, als schon Frankenheim (1842) versucht hatte (vgl. §2.5); allerdings durch Verbesserung der Meßmethoden verlässlicher.
- 70 William Henry Bragg teilte dabei anfangs noch eine korpuskulare Auffassung der Röntgenstrahlung und ging erst nach der erfolgreichen Erklärung der Laue-Diagramme durch Reflexion von Teilwellen und Interferenz durch seinen Sohn William Lawrence (1913) zum elektromagnetischen Standpunkt über. Nach erster Nutzung des neuentdeckten Phänomens zur spektrometrischen Untersuchung von Emission und Absorption von Röntgenstrahlen (W.H. und W.L. Bragg 1913a, W.H. Bragg 1913) kehrten die beiden die Zielrichtung der Nutzung um und bestimmten nun mit Röntgenstrahlen bekannten Spektrums die Gitterstruktur von Diamant (Raumgruppe $Fd\bar{3}m = O_h^7$) einschließlich der metrischen Parameter (W.H. und W.L. Bragg 1913b) [Ewald 1962b; Forman 1969].
- 71 Implizit wies Bieberbach also nach, daß

$$|H^2(G_u, \mathbb{Z}^n)| < \infty.$$

Er arbeitete aber natürlich noch nicht mit einer gruppenhomologischen Charakterisierung der Faktorensysteme, sondern entwickelte sie analog der Schoenfliesschen Vorgehensweise durch die jedem $g \in G_u$ in natürlicher Weise zugeordnete reduzierte Bewegung

$$\begin{aligned} \tilde{g} \in G_a; \text{ mit } \tilde{g} = (t_g, g), \quad |t_g|_{\text{sup}} < 1 \\ f_{g,g'} = t_g - t_{g''} + gt_{g'}g^{-1} \text{ mit } g'' = gg' \end{aligned}$$

- 72 Burckhardt war der Pionier in der Verwendung arithmetischer Methoden für den klassischen dreidimensionalen Fall (1930, 1934). Das gipfelte in seinem — wegen des Krieges und anderer äußerer Umstände erst verzögert publizierten — bekannten Buch (Burckhardt 1947). Bei

der Einführung arithmetischer Konzepte (insbesondere der arithmetischen Kristallklassen) in die Kristallographie kam Niggli's Einsatz besondere Bedeutung zu (Niggli/Nowacki 1935). Zur von Niggli begründeten Züricher Schule der Kristallographie siehe [Burckhardt 1988]; vgl. auch [Burckhardt 1985]. Die Berechnung der kristallographischen Raumgruppentypen für $n > 3$ wurde durch Arbeiten von Burckhardt (1936/37) und Zassenhaus (1948) vorbereitet. Nach ersten Studien der Punktsymmetrien und der Gitter maximaler Symmetrie im vierdimensionalen Fall von Hermann (1949, 1952) sowie verschiedene Teiluntersuchungen wurde die Klassifikation für $n = 4$ mit einem auf Zassenhaus (1948) zurückgehenden Algorithmus gelöst (Bülow e.a. 1971, Brown e.a. 1978). Teilschritte für eine Klassifikation bei $n = 5, 6, 7$ wurden seit den 1970er Jahren gemacht [Brown e.a. 1978, 1–4; Schwarzenberger 1980, 132–135].

- 73 Schon die Klassifikation isoedrischer Pflasterungen der euklidischen Ebene erwies sich als relativ verwickelt. In (1931) zeigte Laves, daß es 11 topologisch unterschiedliche Typen von Randnetzen ebener isoedrischer Pflasterungen gibt. Auf eine sinnvolle feinere Unterteilung durch Berücksichtigung der "Adjazenz" wies Delone hin; das bedeutet die Berücksichtigung der Zuordnungsstruktur der (evtl. orientierten) Kanten aneinanderliegender (verallgemeinerter) Polygone. Implizit wurde eine solche Unterscheidung ebener Pflasterungen schon in (Sinogowitz 1938) vorgenommen. In (1968) gab Heesch eine Klassifikation in 93 Typen isoedrischer Pflasterungen der Ebene an, die von Grünbaum und Shepard (1977) im wesentlichen als Adjazenzklassifikation rekonstruiert wurde. Während Delone in (1961) die Endlichkeit der Anzahl topologischer Typen isoedrischer Pflasterungen im Raum nachwies, steigt die Komplexität der zu bewältigenden Probleme bei Adjazenzklassifikation schon für $n = 3$ so beträchtlich an, daß eine Durchführung bestenfalls auf der Grundlage besserer Formalisierungen möglich erscheint (Dress/Scharlau 1984). Siehe dazu auch die mit detaillierten historischen Anmerkungen versehene Monographie [Grünbaum/Shephard 1986].

Anmerkungen zu §6

- 1 Vgl. [Grattan-Guinness 1984; Hänseroth 1985; Kurrer 1987b; Mauersberger 1980, 1985; Straub 1949/1964; Wagner/Egermann 1987].
- 2 Vgl. zu Poncelet etwa [Zweckbronner 1981].
- 3 Oder sogar noch zu Beginn des 19. Jahrhunderts, etwa bei Eytelwein [Kurrer 1987b].
- 4 Herr K.-E. Kurrer wies mich darauf hin, daß dieser Entwicklung umgekehrt auch große Bedeutung aus der Sicht der Disziplinbildung der Bau-
statik zukommt. Eine unter diesem Gesichtspunkt verfaßte komparative
Studie der von Mathematikern (etwa A. Clebsch (1862)) und Physikern
vorgetragenen Auffassungen der Elastizitätstheorie und denen von Tech-
nikwissenschaftlern wie Winkler, Mohr, Müller-Breslau im deutschspra-
chigen Raum, Saint-Venant in Frankreich, Rankine in Großbritannien,
Castigliano in Italien u.a. wäre daher sicherlich sehr aufschlußreich für
diese Frage.
- 5 Am ehesten noch — ansatzweise und indirekt — in theoretisch orientier-
ten technikhistorischen Studien wie [Klemm 1966, Timoshenko 1956] und
jüngeren wie K.-E. Kurrers und [Wagner/Egermann 1987]. I. Grattan-
Guinness hat in seinen jüngeren Arbeiten von seiten der Mathematikge-
schichte begonnen, dieses sonst fast unerforschte Terrain zu betreten.
- 6 Eine hoch interessante Debatte über die Nützlichkeit der mathematisch-
statischen Analyse entzündete sich etwa anlässlich der Erstellung von
Gutachten über die Sanierung der Peterskuppel, nachdem dort größere
Risse aufgetreten waren [Straub 1964, 146ff.].
- 7 So blieben etwa auch Coulombs Untersuchungen über Gewölbetheo-
rie, Erddruck und Biegung von Balken, in denen Elastizität, Reibung
und Kohäsion berücksichtigt wurden, zunächst ohne praktische Wirkung
[Straub 1964, 186ff.].
- 8 Hinweis von K.-E. Kurrer.

- 9 Hier ist also die Rede vom Fachwerk als *statischem System*, das als gedankliches und damit idealisiertes Modell der realen *Tragstruktur* Fachwerk fungiert. Bei Culmann findet sich diese Unterscheidung nicht; H.-E. Kurrer wies mich aber darauf hin, daß sie von dem zu Culmann etwa zeitgleich arbeitenden J.W. Schwedler (1823–1894) und allgemein etwa ab den 1880er Jahren beachtet wurde.
- 10 Bei Wahl kartesischer Koordinaten mit Ursprung auf einer Ecke und x -Achse längs eines davon ausgehenden Stabes seien die Ecken des Fachwerks gegeben durch (x_i, y_i) ($0 \leq i \leq e-1$). Bei Normierung $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $x_1 = 1$ verbleiben $2e-3$ freie Parameter: x_2, \dots, x_{e-1} , y_1, \dots, y_{e-1} . Die durch die Stablängen definierten Bedingungen sind von der Form

$$f_j(x_2, \dots, x_{e-3}, y_1, \dots, y_{e-1}) = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 = l_j^2,$$

wobei die Ecken i und k mit dem Stab j der Länge l_j inzidieren ($1 \leq j \leq 2e-3$). Zusammengefaßt:

$$f(z) = l^2 \quad \text{mit} \quad f = (f_1, \dots, f_{2e-3}), \quad l = (l_1, \dots, l_{2e-3})$$

$$z = (z_1, \dots, z_{2e-3}) := (x_2, \dots, x_{e-3}, y_1, \dots, y_{e-1}).$$

Das Fachwerk mit den Parametern $z, l, f(z) = l^2$ ist also bei $\det f'(z) \neq 0$ bestimmt. Anderenfalls sind "infinitesimale Bewegungen" des Fachwerks ohne Längenänderungen der Stäbe möglich. Vgl. etwa (Föppl 1900, 204ff.).

- 11 Hinweis von K.-E. Kurrer, der dieser Entwicklung eine relativ große Bedeutung im Disziplinbildungsprozeß der Baustatik zubilligt.
- 12 Theoretische Analysen der Bestimmtheitsbedingungen von Fachwerken gab Möbius in seinem "Lehrbuch der Statik" (1837, 2, Kap. 4/5) später Maxwell (1864a, 516; 1864b, 598f.). In die ingenieurwissenschaftliche Literatur wurde das "Fachwerk" als Konzept und Bezeichnung durch Culmann eingeführt (1851, 1852); er verstand darunter — auch später noch (1866, 360ff.) — ausdrücklich lediglich statisch bestimmte Dreiecksfachwerke. Entscheidend war seine Betrachtung der Knoten von Fachwerken als — idealisiert — gelenkige Stabverbindungen; das schaffte erst die Voraussetzung für eine Theorie der bestimmten Fachwerke [Werner 1980, 121], vgl. auch [Henneberg 1903, 385ff.].
In die deutschsprachige Ingenieurliteratur wurde die Unterscheidung von bestimmten und unbestimmten Fachwerken in ausgearbeiteter Form

durch Mohr (1874, 511; 1885, 295f.) eingeführt (seine Terminologie: “einfaches” bzw. “zusammengesetztes” Fachwerk). Mohr war auch entscheidend in der Entwicklung elastizitätstheoretischer Methoden für die Analyse der Kräfteverteilung im unbestimmten Fachwerk beteiligt (vgl. §9.1). Natürlich war den Ingenieuren auch vorher schon die Bedeutung der statischen Bestimmtheit in weniger formalisierter Weise geläufig; vgl. etwa (Culmann 1866, 360). In der englischsprachigen Literatur legte Bow (1873) die Unterscheidung von bestimmten und unbestimmten Fachwerken seiner Klassifikation der Fachwerktypen zu Grunde. Er verwendete dabei für bestimmte Fachwerke die Charakterisierung $k = 2f + 1$ die sich aus der Eulercharakteristik $e - k + f = 1$ ergibt und die er vermutlich von Maxwell übernommen hatte (Bow 1873, 15). Eine frühere, weniger stark formalisierte Charakterisierung findet sich etwa schon bei Jenkin (1869, 441, 444f.).

- 13 Ein Onkel C. Culmanns war Professor an der Artillerieschule in Metz. Carl Culmann hatte im Alter von 16 Jahren begonnen, sich dort unter dessen Rat und Anleitung auf eine Aufnahmeprüfung für die Ecole Polytechnique vorzubereiten. Eine schwere Krankheit hinderte ihn jedoch daran. Nach seiner Erholung trat er mit 17 Jahren (1838) in die Ingenieurschule des Karlsruher Polytechnikums ein, unter Umgehung der sonst üblichen beiden mathematisch-naturwissenschaftlichen Eingangsklassen [Tetmajer 1882, 4f.].
- 14 (de la Gournery 1859, 1860/1862; Fiedler 1860, 1863; Schlesinger 1870 u.a.)
- 15 Namentlich von A. Clebsch, L. Cremona und F. Klein (Clebsch an Fiedler 9.2.1864, 9.11.1871, Hs 87:154, 170; Cremona an Fiedler 9.6. und 29.6.1871, Hs 87:183, 187; Klein an Fiedler 4.2.1872, 2.2.1873, 10.6.1881, Hs 87:574, 576, 585, u.a.).

Zwei Zitate aus Briefen von Clebsch und Cremona mögen hier als Beleg ausreichen:

“Ihre Beschäftigung mit der darstellenden Geometrie wird gewiss sehr fruchtbar werden. Der Fehler, der immer gemacht wird, indem man spezielle Projectionsarten ausschliesslich behandelt und die wahre Quelle nicht angibt, aus der alles zusammenfliesst, muss sich in vielem empfindlich rächen ...” (Clebsch an Fiedler, 9.2.1864; Hs 87:154)

Cremona hob an Fiedlers (1871) nach einer ersten Sichtung die

“Eleganz, die Präzision und didaktische Effektivität (l’eleganza, la precisione e l’efficacia didattica)” hervor und fuhr fort: *“... Dieses Buch wird eine wahre Revolution in den technischen höheren Lehranstalten*

bewirken, an denen die darstellende Geometrie gelehrt wird. (*Questo libro opererà una vera rivoluzione nelle scuole tecniche superiori, anche dovunque esiste un insegnamento di geometria descrittiva.*)” (Cremona an Fiedler, 9.6.1871; Hs 87:183)

- 16 Das Manuskript (Hs 2997:10) ist wahrscheinlich Ende der 1860er Jahre geschrieben; vgl. [Scholz 1984].
- 17 Zur Biographie Culmanns siehe u.a. [Hartenberg 1971, Stüssi 1971, Tetmajer 1882].
- 18 Liegen die Stäbe in den Kanten a_1, a_2, a_3 sei $A := a_1 \cdot a_2$ der Schnittpunkt von a_1, a_2 (vgl. Konventionen/Notationen) und p' die zu zerlegende Kraft längs der Geraden p so zerlege man p' im Schnittpunkt $B := p \cdot a_3$ längs a_3 und in Richtung $B \cdot A$ (Komponenten p'_3, \tilde{p}). \tilde{p} zerlegt sich dann in natürlicher Weise in Komponenten p'_1, p'_2 längs a_1, a_2 .
- 19 Kommutativität explizit, Assoziativität implizit.
- 20 Drehmomente hatte Poinot (1804) als Kräftepaare (“couples”) analysiert und durch Klassen orientierter Parallelogrammflächen repräsentiert.
- 21 Das wird von Reye bezeugt, der in der Zeit 1862–1867 enger mit Culmann zusammenarbeitete (Reye 1868, V). In der zweiten Auflage seines Werkes bezog sich Culmann selber ausdrücklich auf v. Staudt, hier jedoch auf sein neues Werk (Staudt 1856–60) sowie auf Salmon/Fiedler (Culmann 1875, XIVf., 227).
- 22 Korrespondierende Seiten in Kräfte- und Seilpolygon sind parallel (n -Polygone). Eine evtl. in Frage kommende projektive Abbildung φ der Ebene hätte für $n \geq 3$ die unendlich ferne Gerade als Fixgerade, wäre also affin und bildete Geraden auf parallele Geraden ab. φ wäre also Ähnlichkeitsabbildung; das ist im allgemeinen aber nicht der Fall.
- 23 Dabei bedeutet “perspektivische Korrespondenz” einer Geraden g und eines Punktes $P' = \psi(g)$ daß ein Punkt Q von g auf die Gerade g' des Büschels durch P' mit $g \cdot g' = Q$ abgebildet wird.

- 24 Speziell ergibt sich die Fortsetzung wie folgt: Die p_i seien alle aus einem Büschel, etwa durch O . Für eine beliebige Gerade a aus einem Büschel $G \neq O$ liegt $\psi(a)$ auf $\psi(a \cdot g_\infty)$ also (wegen $\psi : g_\infty \rightarrow O'$ perspektivisch) auf der Parallelen zu a durch O' . Wähle A' auf dieser Parallelen beliebig, dann ist ψ durch $(***)$ und $\psi(a) = A'$ bestimmt. Für eine Gerade g durch O ist $\psi(g) = g \cdot g_\infty$. Für $Q \in a$ ist $\psi(Q)$ als Verbindungsgerade von $\Psi(O \cdot Q)$ und A' bestimmt, also $\psi(Q)$ die Parallele zu $O \cdot Q$ durch A' . Für eine beliebige Gerade g nicht aus G und nicht aus O sowie $g \nparallel a$ ist $\psi(g)$ durch $\psi(g \cdot a)$ und $\psi(g \cdot g_\infty)$ bestimmt, also der Schnittpunkt von $\psi(g \cdot a)$ und der Parallelen zu g durch O' . Damit ist nun auch $\psi(P)$ für einen beliebigen Punkt P der Ebene zu bestimmen und dann auch das Bild der noch nicht diskutierten Geraden (Culmann 1875, §7.4).
- 25 Ist nämlich Q ein beliebiger Punkt im Urbild, etwa auf der Geraden $g := Q \cdot O'$ so ist $\alpha(Q)$ bis auf Variation auf der Geraden $\alpha(g)$ bestimmt; nach der Fixierung des Bildes $\alpha(Q)$ eines Punktes $Q \neq O'$ ist α als projektive Kollineation also vollständig determiniert.
- 26 Das "Fugenbüschel" f_i entsteht dadurch, daß das Gewölbe interpolierend zu den wirklichen Fugenrichtungen in unendlich dünne Schichten zerlegt wird. Das "Druckbüschel" t_i entsteht als Tangentialbüschel an die "Drucklinie" d des Gewölbes, dem kontinuierlichen Analogon zum Seil- bzw. Stabpolygon eines diskreten Kräftesystems. Jede Schicht des Gewölbes trägt durch Eigengewicht eine äußere Kraft längs der Vertikalen p_i durch den Schwerpunkt der Schicht bei. Die Tangente t_i an d in $p_i \cdot d$ ist die Wirkungslinie des Resultierenden aus p_i und den direkten angrenzenden Kräften im Gewölbe. Der Schnitt $s_i = t_i \cdot f_i$ gibt daher den Angriffspunkt der im Gewölbe wirkenden Stützkräfte in der Schicht f_i an. Die Stützlinie ist die Gesamtheit dieser Punkte.

Anmerkungen zu §7

- 1 Rankines Beschäftigung mit klassischer Philosophie blieb, wie Channell [1982] ausführt, nicht ohne Bedeutung für seine spätere Arbeitsweise. Insbesondere scheinen seine Aristoteles-Studien einen kategorialen Rahmen geliefert zu haben, in dem er später die besondere Aufgabe technikwissenschaftlichen Wissens verorten konnte. — Zur allgemeinen biographischen Information siehe auch [Parkinson 1975].
- 2 Bezeichnung nach Maxwell (1864a).
- 3 Das sichert das globale Gleichgewicht und das lokale in den Ecken E_i ($1 \leq i \leq \mu$). Gleichgewicht in jedem Stab k_j (inzident E_{j-1}, E_j) ist gewährleistet, weil zu k'_j zwei Teilpyramiden Π'_{j_1}, Π'_{j_2} mit gemeinsamer Seitenfläche korrespondieren, also zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte ($1 \leq j \leq \nu$).
- 4 Vgl. zur Maxwell-Biographie etwa [Everitt 1974].
- 5 Rankines Arbeit (1864) erschien im Februarheft des Philosophical Magazin 27 (1864) und Maxwells (1864a) in der Aprilauslieferung desselben Bandes.
- 6 *“Reciprocal figures are such that the properties of the first to the second are the same as those of the second relative to the first.”* (Maxwell 1864a, 514)
- 7 Maxwell führte darüberhinaus in Anlehnung an Rankines Stabilitätssatz an räumlichen Fachwerken auch die Reziprozität räumlicher Figuren (“figures in three dimensions”, modern dreidimensionaler endlicher linearer Zellenkomplexe) ein. Nämlich bei zwei “räumlichen Figuren” mit

Ecken A_i ($1 \leq i \leq \mu$)	bzw.	A'_i ($1 \leq i \leq \mu'$),
Kanten a_i ($1 \leq i \leq \nu$)	bzw.	a'_i ($1 \leq i \leq \nu'$),
Seitenflächen α_i ($1 \leq i \leq \lambda$)	bzw.	α'_i ($1 \leq i \leq \lambda'$),
3-Zellen A_i ($1 \leq i \leq \chi$)	bzw.	A'_i ($1 \leq i \leq \chi'$)

durch die Bedingungen

- (i) $\mu = \chi', \chi = \mu', \nu = \lambda', \lambda = \nu'$;
- (ii) $a_i \perp \alpha'_i, \alpha_i \perp a'_i$;
- (iii) A_j inzidiert genau mit $a_{i_1}, \dots, a_{i_m} \Leftrightarrow$
 A'_j wird genau von $\alpha'_{i_1}, \dots, \alpha'_{i_m}$ berandet;
 A_j wird genau von $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}$ berandet \Leftrightarrow
 A'_j inzidiert genau mit a_{i_1}, \dots, a_{i_n}

(Maxwell 1964a, 523).

Diese strukturelle Pointierung der von Rankine betrachteten Relation trug anscheinend zur Klärung von Maxwells Ideen über die Dualität in den Diagrammen der Statik bei; sie hatte in unserem Rahmen aber keine weiteren Konsequenzen.

- 8 Um hier keine falsche Betonung entstehen zu lassen, ist anzumerken, daß Maxwell sich ebensowenig wie Rankine auf die statische Analyse bestimmter Fachwerke beschränkte, sondern sich auch um eine Auswertung der Elastizitätstheorie Lamés in einer für die Theorie statisch unbestimmter Fachwerke geeigneten Form bemühte (Maxwell 1864b). Vgl. dazu [Timoshenko 1953, 202ff.; Niles 1950].
- 9 Maxwells Arbeitsweise zeichnete sich auch in anderen Gebieten durch sich schubweise vertiefende, durch andere Themen unterbrochene, mehrfache Arbeitsphasen zu einem Thema aus [Everitt 1974, 199].
- 10 Die Orientierung auf die Anwendungspraxis und Publikation in einem Ingenieurorgan ist wohl auch der Grund, obgleich keine Rechtfertigung dafür, daß dieser Artikel bei der Zusammenstellung von Maxwells "Scientific Papers" durch W. P. Niven (Maxwell 1890) nicht mit aufgenommen wurde.
- 11 Er eröffnete die Arbeit sogar durch eine Darstellung des Rankineschen Satzes über das Gleichgewicht an räumlichen Fachwerken (Satz 1). Gemeint als Grundlage und Motivation für die Dualität ebener Fachwerke, die Maxwell als Grenzfall hieraus ableitete, dürfte diese Einführung wohl wenig zur Motivation für Ingenieure gewirkt haben. Sie blieb ein bloß theoretischer Aufhänger, der in die Behandlung der ebenen Situation dann nicht weiter hineinwirkte.
- 12 Damit waren natürlich Schubkräfte etwa an Eisenbahnbrücken oder aus Winddruck resultierende Seitenkräfte in diesem Rahmen zunächst einmal nicht zu behandeln (siehe aber §7.3).

- 13 In der Parallelebene zur Basis durch die Spitze und auf einer Parallelen zu den äußeren Kraftlinien.
- 14 Maxwell verwies bei diesem Argument ausdrücklich auf die in (1864a) aufgestellte These über die Äquivalenz der Zulässigkeit einer Figur mit der Eigenschaft, Bild eines Eulerpolyeders ($\chi = 2$) unter Zentralprojektion zu sein, brauchte hier aber lediglich den trivialen aber richtigen Teil der These: Das ebene zentralprojektive Bild eines Eulerpolyeders ist eine zulässige Figur.
- 15 Die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt im Prinzip aus der Bestimmtheit des zugrundegelegten Fachwerks, ist aber bei der zeichnerischen Lösung von der geschickten Wahl der Reihenfolge der Konstruktions-schritte abhängig und nicht immer möglich. Dagegen ist die prinzipielle Aussage von Lemma 1 nicht an bestimmte Fachwerke gebunden.
- 16 *“The construction of such diagrams is easy, and affords a security against errors, since if any mistake is made the diagram cannot be completed.”* (Maxwell 1869, 402)
- 17 (Jenkin 1869), vgl. §7.4.
- 18 Siehe den Verweis auf eine diesbezügliche Mitteilung an die British Association for the Advancement of Science im September 1867 in (Maxwell 1870, 164). Unklar ist, ob Maxwell zu diesem Zeitpunkt direkt oder indirekt von Culmanns Programm erfahren hatte.
- 19 Zum Stand der topologischen Flächentheorie in den 1860/70er Jahren vgl. [Scholz, 1980, Kap. 4].
- 20 An einem Beispiel dargestellt von Maxwell in (1870, 165f.).
- 21 Die von Maxwell angegebene Dualität ist in homogenen Koordinaten offenbar $E = (a_1, a_2, a_3, a_0) \rightarrow$ Punkt $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_0) = (ca_1, ca_2, -a_0, -a_3)$

$$\xi = TE \quad \text{mit} \quad T = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die von Maxwell zur Charakterisierung der Dualität zunächst angegebene bilineare Gleichung hat nun für einen Punkt $x = (x_1, x_2, x_3, x_0)$ der Ebene E zur Folge:

$$xTE \Leftrightarrow xTT^{-1}\xi \Leftrightarrow x_1\xi_1 + x_2\xi_2 - c(x_3\xi_0 + x_0\xi_3) = 0.$$

Und x liegt auf der ihm dualen Ebene, falls

$$x \top T^{-1} x \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2cx_3x_0;$$

also genau dann, wenn x auf einem Rotationsparaboloid liegt.

- 22 Elementare Konstruktion von $\varphi(\mathbf{E})$ zur Ebene \mathbf{E} nach Einführung cartesischer Koordinaten x, y, z und Wahl von $\tilde{O} = (0, 0, c)$ durch Betrachtung der Normalen n_E von \tilde{O} auf \mathbf{E} . Der Schnitt von n_E mit der (x, y) -Ebene sei (ξ, η) . Dann ist

$$\varphi(\mathbf{E}) = (\xi, \eta, -c).$$

- 23 Abbildung einer Geraden g etwa durch Betrachtung zweier Ebenen \mathbf{E}, \mathbf{E}' mit $g = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}'$ und Verbindung der Bildpunkte $\varphi(g) = \varphi(\mathbf{E}) \cdot \varphi(\mathbf{E}')$. Die Orthogonalprojektion von $\varphi(\mathbf{E})$ in die (x, y) -Ebene liegt in der Normalen von \tilde{O} auf \mathbf{E} ; entsprechend für \mathbf{E}' . Die Orthogonalprojektion des Bildes $\varphi(g)$ der Geraden liegt daher in der Orthogonalebene von \tilde{O} auf g . Demnach ist sie orthogonal zur Orthogonalprojektion von g in die (x, y) -Ebene (Maxwell 1870, 168f.).

- 24 Diese Eigenschaft nützte Föppl später für die Theorie der statisch bestimmten räumlichen Fachwerke ("Flechtwerke") (Föppl 1880; 1900, 241ff.).

- 25 Maxwell diskutierte kurz die Konsequenz einer Annahme von n Löchern im Inneren des Dreiecksnetzes. Das lieferte wegen $\chi = 1 - n$ jedoch $\nu = -e_2 - 3n$, "verschlimmert" also die Unbestimmtheit der untersuchten Fachwerkstruktur (Maxwell 1870, 175).

- 26 Vgl. Anm. 33.

- 27 Die Behauptung folgt unmittelbar aus

$$mf = 2k, \quad \chi = e - f + k = 4 - 2n, \quad \nu = 2e - k - 3.$$

- 28 Natürlich ließe sich die Relation weiter auswerten

$$\nu = 0 \Leftrightarrow 4n = 5 + (m - 4) \frac{k}{m}.$$

Also ist die Bestimmtheitsrelation gegebenenfalls doch erfüllbar, wenn $4|(5 + (m - 4)(k/m))$, also schon bei

$$m = 5, \quad k = 5k', \quad k' \equiv 3 \pmod{4}, \quad n = \frac{1}{4}(5 + k')$$

usw.

Dies ließe mögliche geometrische Konfigurationen durchspielen (z.B. 14 nichtplane Fünfecke auf einem Torus usw.). Die durch Projektion erzeugbaren zulässigen ebenen Netze wären jedoch wohl für Ingenieurzwecke ungeeignet. Maxwell verfolgte diese Idee dementsprechend auch nicht weiter.

29 Die sonstige Aufnahme dieser Maxwellschen Idee kann im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt werden, wäre aber sicherlich weiterer Untersuchung wert.

30 Vergleiche §6.3, Anm. 15, und §9.1.

31 Das war Cremonas Formulierung für eine Koordinatenwahl im projektiven Raum derart, daß die schiefsymmetrische Korrelation T

$$E = (a_1, a_2, a_3, a_0) \rightarrow \text{Punkt } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_0)$$

die Normalform

$$T = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

annimmt.

32 Eine Ausnahme bildete lediglich die - periphere Konstruktion der Belastungskurve am elliptischen Bogen (vgl. §6.4).

33 Bow klassifizierte die Fachwerke nach den Gesichtspunkten bestimmt ("class I"), kinematisch unbestimmt ("class II"), kinematisch über-, statisch unbestimmt ("class III") und sonstige, d.h. teils über-, teils unterbestimmte etc. ("class IV"). Von den 137 in "class I" angegebenen Typen ist jedoch eine, Nr. 125, nach dem Maxwellschen Kriterium über bestimmte Dreiecksfachwerke, (§7.3, Satz 6) sofort als statisch unbestimmt zu identifizieren.

34 Ein größerer Teil der deutschsprachigen Literatur sprach jedoch von "Cremona-Plänen" (Ritter 1890, 8ff.), eine auch heute noch in der Literatur der Bauingenieure verwendete Bezeichnung.

-
- 35 Maxwell etwa war als Wissenschaftler eher bekannter als Cremona, Culmanns Stellung für die Herausbildung des technischen Hochschulwesens in der Schweiz, Österreich und Süddeutschland war in etwa, wenn auch nicht völlig, vergleichbar mit der Cremonas in Italien. Maxwells Arbeiten zur graphischen Statik bekamen ihre Wirksamkeit jedoch erst indirekt durch spätere Darstellungen anderer Wissenschaftler-Ingenieure (Jenkin 1869, Bow 1873, Cremona 1872 usw.); Culmanns wurden gespalten aufgenommen (vgl. §9.1).
- 36 Vgl. etwa die Literaturdiskussion “Die graphische Statik” von J. Weyrauch (1874), der an Cremonas Darstellung die “... Allgemeinheit und Eleganz, wie man es von dem gefeierten italienischen Mathematiker erwarten konnte ...” und deren Bedeutung für die “theoretische Entwicklung der graphischen Statik” hervorhob (Weyrauch 1874, 375).
- 37 Cremona betonte die praktische Nutzbarkeit der Ergebnisse seiner Analyse durch ein längeres Zitat aus (Jenkin 1869), das auf die Entwicklung der analogen Idee in Cochranes Ingenieurbüro verwies (Cremona 1872, §11, pp. 111f.).

Anmerkungen zu §8

- 1 (Hs 2997:10) ist wahrscheinlich gegen Ende der 1860er Jahre geschrieben. Das ergibt sich aus einem Vergleich mit (Culmann 1866, 1870, 1875). Siehe dazu [Scholz 1984]. Die folgende Darstellung stützt sich in weiten Teilen auf diese Auswertung.
- 2 Mit Orientierung durch Auswahl der Halbgeraden a_+ , sodaß das geordnete Paar $(a_+, \text{grad}(\alpha x + \beta y))$ mit der Orientierung der Ebene übereinstimmt.
- 3 In (1866) rein synthetischer Beweis, in (1875) ergänzt um die entsprechende analytische Betrachtung.
- 4 Vgl. (Culmann 1875, §§85ff.).
- 5 Das heißt, Kraft in der k -ten Kante des Seilpolygons.
- 6 Die Plückerschen Geradenkoordinaten sind bekanntlich so definiert, daß in der projektiven Ebene ein Punkt $[x_0, x_1, x_2]$ genau dann auf der Geraden $[\xi_0, \xi_1, \xi_2]$ liegt, wenn

$$\sum_{i=0}^2 \xi_i x_i = 0$$

Also in inhomogener Schreibweise mit Koordinaten (x, y) beziehungsweise (ξ, η) im Endlichen:

$$x\xi + y\eta + 1 = 0.$$

Entsprechend für Plückersche Ebenenkoordinaten $[\xi_0, \dots, \xi_3]$: Ein Punkt $[x_0, \dots, x_3]$ liegt genau dann auf der Ebene, wenn

$$\sum_{i=0}^3 \xi_i x_i = 0$$

gilt, beziehungsweise im Endlichen $(x_0 \neq \xi_0, \neq 0; \text{Koordinaten } (x, y, z)$ beziehungsweise $(\xi, \eta, \zeta))$

$$x\xi + y\eta + z\zeta + 1 = 0.$$

Für einen im Unendlichen ($x_0 = 0$) gelegenen Punkt $(0, x_1, x_2, x_3)$ ist die Inzidenz über den zugehörigen Punkt im Endlichen $(x, y, z) := (x_1, x_2, x_3)$ auszudrücken:

$$x\xi_1 + y\eta_2 + z\zeta_3 = 0.$$

7 Bis auf den konstanten Faktor $\sin \omega$.

8 Zu Culmanns Plan für Band 2 der Neuauflage der "Graphischen Statik" vgl. (Ritter 1888, IIff.).

9 Natürlich bei Cauchy komponentenweise geschrieben mit

$$\text{Spur } dy = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y_i}{\partial x_i}, \quad (\text{div } T)_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \text{ usw.}$$

10 Siehe dazu etwa [Todhunter/Pearson 1886, 319ff.; Timoshenko 1953, 108ff.; Truesdell 1968; Szabó 1976, 393ff. und die in Kürze erscheinende genauere Auswertung von A. Dahan-Dalmedico, von der ihr [1985] nur eine erste Vorankündigung ist.

11 Die erste theorieorientierte Aufnahme der Elastizitätstheorie in die Ingenieurwissenschaften scheint gegen Ende des Jahrhunderts einer ähnlichen "Bereinigung" unterworfen worden zu sein wie das Culmannsche theoretische Programm (vgl. §9.2) [Timoshenko 1953, 238].

12 Auch Cauchy hatte wesentlich ein Drehmomentargument verwendet, jedoch durch Betrachtung des Oberflächenintegrals über eine geschlossene infinitesimale Fläche (Cauchy 1827a). Bei Clebsch findet sich schon die Elementarisierung des Arguments durch Diskussion der Oberflächenkräfte an einem Parallelepiped (Clebsch 1862, §3), das Culmann dann am Tetraeder entwickelte.

13 Genauer: Culmann zeigte, daß die Korrespondenz, die einer Ebene E die Gerade $\psi(E)$ zuordnet, längs der die Kraft auf E wirkt, inzidenzerhaltend ist (1875, 538f.). Weiter betrachtete er zu jedem ebenen Strahlenbüschel durch O das zugehörige Ebenenbüschel aus den Ebenen durch die Normale zur Ebene des Strahlenbüschels. Die Zuordnung der Kraft zu jeder dieser Ebenen und nachfolgende Projektion in die Ebene des Strahlenbüschels liefert nach Culmann eine involutorische Korrespondenz im Strahlenbüschel (Culmann 1875, 540).

- 14 Da der Spannungstensor T auf der Normalen des Schnittes operiert, ist im ebenen Fall die von Culmann betrachtete Korrespondenz darstellbar durch $\varphi = T\rho$ mit

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daß φ eine Involution ist, $\varphi^2 = \lambda Id$, folgt nun aus der Symmetrie von T .

- 15 Culmanns Kräfteellipsoid (bzw. Kräfteellipse) war mit keiner der beiden von Cauchy mit dem Spannungstensor T verbundenen Quadriken identisch. Cauchy verwendete die Spannungsquadrik $\langle Tx, x \rangle = 1$ und das Spannungsellipsoid mit $|Tx| = 1$. Culmanns Kräfteellipsoid war dagegen $\{Tx \mid |x| = 1\}$.
- 16 Etwa bei der statischen Berechnung des mittleren Fachwerkbogens der Münstener Brücke (Rieppel 1897, 1327f.).
- 17 Zu diesem Streit siehe etwa [Kötter 1901, 160ff; Pedoe 1975b; Gray 1987, 28ff.].
- 18 Möbius verwies in der Vorrede zum "Barycentrischen Calcul" darauf, daß er erst bei Drucklegung seines Werkes von der Existenz analoger Studien in der französischen Mathematik erfahren hatte (1827, 11); dagegen war ihm die ältere Pol-Polaren Theorie einschließlich Brianchons Ergebnis natürlich bekannt (1827, 367).
- 19 Möbius sprach in (1833) von einer "besonderen Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raum", bei der jedem Punkt eine "Gegenebene" und jeder Ebene ein "Gegenpunkt" zugeordnet wird. In (1837) führte er die Formulierung "Nullebene" und "Nullpunkt" ein; die betrachtete Reziprozität wurde durch von Staudt dann zur Abgrenzung von "gewöhnlichen Polarsystemen" als "Nullsysteme" bezeichnet (Staudt 1847, 191).
- 20 Vgl. dazu auch [Ziegler 1985, 32ff.].
- 21 Dies entspricht in vektorieller Auffassung der bekannten Reduktion auf einen resultierenden Kraftvektor x und ein Drehmoment m , ohne Möglichkeit den Drehmomentanteil durch Translation wegzutransformieren. Möbius verwendete in (1837) eine analoge implizit vektorielle Charakterisierung durch Streckenrechnung in cartesischen Koordinaten. Sind

etwa die Kräfte P_i mit Angriffspunkten (x_i, y_i, z_i) und deren "Endpunkte" $(x_i + X_i, y_i + Y_i, z_i + Z_i)$ gegeben ($1 \leq i \leq n$), dann wird das Kräftesystem durch die 6 Parameter

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{i=1}^n X_i, & B &:= \sum_{i=1}^n Y_i, & C &:= \sum_{i=1}^n Z_i, \\ L &:= \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i), & M &:= \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i), \\ N &:= \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) \end{aligned}$$

charakterisiert. Gleichgewichtsbedingung ist:

$$A = B = C = L = M = N = 0$$

(Möbius 1837, 91f.).

- 22 Dies erlaubt ein graphisches Verfahren zur räumlichen Kräftezusammensetzung: Jede Kraft eines Systems wird in eine Komponente durch den fest vorgegebenen Punkt P und eine in der fest vorgegebenen Ebene E zerlegt; dann erfolgt die Zusammensetzung durch das Kräfteparallelogramm bezüglich P und ein Seilpolygon in E . So verfahren etwa Culmann in (1875, §57) und in seiner Nachfolge Föppl (1900, 113ff.). Siehe §8.4.
- 23 Dies ist eine zusammenfassende Formulierung für die von Möbius einzeln aufgeführten Inzidenz- und Involutionssätze (Möbius 1833, §§5, 11, 12, 15; 1837, §§85ff.).
- 24 Möbius' Analyse erfolgte durch eine Rechnung, die sich in Vektorschreibweise folgendermaßen zusammenfassen läßt (vgl. auch Anm. 21). Sei $a = (A, B, C)$ der Vektoranteil des Kräftesystems, $m = j(L, M, N)$ das Drehmoment mit der bei Orthonormalkoordinaten im euklidischen Raum natürlich gegebenen Abbildung

$$j : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3$$

Die beiden Kräfte, durch die das Kräftesystem dargestellt wird, seien $p = (X, Y, Z)$, $p' = (X', Y', Z')$ mit den jeweiligen Angriffspunkten x, x' . Dann sind die Bedingungen

$$p + p' = a, \quad x \wedge p + x' \wedge p' = m$$

zu erfüllen. Daher gilt auch

$$m \wedge (x' - x) = x \wedge p \wedge x' - x' \wedge p' \wedge x = (p + p') \wedge x' \wedge x = a \wedge x' \wedge x$$

Das entspricht Bedingung (*). Möbius' Rechnung folgte — in anderer Notation — genau diesem Aufbau (Möbius 1837, 97).

- 25 Insbesondere die Inzidenz $P \top \psi(P)$, $E \top \psi(E)$ für jeden Punkt P und jede Ebene E des Raumes.
- 26 Vgl. [Freudenthal 1974], auch bezüglich der späteren feineren Unterscheidung durch Berücksichtigung von Automorphismen und Antiautomorphismen des Grundkörpers zusätzlich zu den linearen Abbildungen.
- 27 Von den 3 Schnittpunkten können zwei imaginär sein.
- 28 Plücker entwickelte darüberhinaus in seiner "Neuen Geometrie des Raumes" (1868, 25ff.) in seinem Konzept des "linearen Komplexes" einen weiteren geometrischen Gesichtspunkt der Nullsystem-Korrelationen. Dabei charakterisierte er eine solche Korrelation durch die Gesamtheit der sich selbst dualen Geraden ("Nullgeraden"). Deren Plücker-Koordinaten erfüllen eine lineare Bedingung, bilden also einen "linearen Strahlenkomplex". Siehe dazu [Ziegler 1985, 66ff.]. Obwohl Plückers "linearer Komplex" für eine statische Interpretation eher geeignet ist als die Staudtsche "Ordnungskurve", nahm Culmann keinen Bezug darauf. Ihm scheint Plückers Spätwerk unbekannt geblieben zu sein.
- 29 Vergleiche Anm. 6.
- 30 Umgekehrt gilt nämlich, wenn ψ bekannt ist, bei Reduktion des Kräftesystems auf eine Komponente ρ_P durch einen vorgegebenen Punkt P und eine Kraft ρ_E in einer vorgegebenen Ebene E :
- a) Wird P variiert (das entspricht einer Variation der Richtungslinie ρ_E in E), so schneidet die Wirkungslinie von ρ_P die Ebene E stets im Punkt $\psi(E)$.
 - b) Wird E variiert (das entspricht einer Variation der Richtungslinie von ρ_P bei festem P), dann ist ρ_E offenbar immer der Schnitt von E und $\psi(P)$.
- 31 Culmann über Cremona (1875, V), siehe §8.2.

Anmerkungen zu §9

- 1 Im deutschsprachigen Raum (einschließlich Böhmen/Prag, deutschsprachiger Schweiz und Österreich) etwa (Ott 1870, 1884/85; Bauschinger 1871; Winkler 1872; Weyrauch 1874; Mohr 1875; Culmann 1875; Müller-Breslau 1881; Hauck 1887; Ritter 1888–1906; Föppl 1900), in Großbritannien (Jenkin 1869; Bow 1873; Graham 1883; Hoskins 1892; Dobbs 1897), in Frankreich (Lévy 1874; Maurer 1882; Koechlin 1889) und die Übersetzung (Cremona 1885), in Italien (Cremona 1872; Favaro 1877; Padeletti 1879; Saviotti 1885, 1888), in den USA (Du Bois 1875; Eddy 1877, 1878) und in Skandinavien neben anderen (Zeuthen 1877). Es handelt sich hier natürlich nicht um eine vollständige Publikationsliste zur graphischen Statik; sie reicht aber vielleicht dazu, die internationale Breite der Beschäftigung mit diesem Problemfeld zu dokumentieren. (Nicht alle Publikationen von mir eingesehen.)
- 2 Beide schrieben auf der Grundlage ihrer Vorlesungen später vielbeachtete Lehrbücher (Reye 1868, Fiedler 1871, 1875).
- 3 Vgl. §6.3, Anm. 15.
- 4 Der Einfluß nach Deutschland wirkte insbesondere über F. Klein, der sich in seiner Erlanger Zeit (1872–1875) und später in München (1875–1880), Leipzig (1880–1886) und Göttingen (1886–1913) für die Einführung von Kursen in darstellender Geometrie für Mathematikstudenten sowie in graphischer Statik und allgemein angewandter Mathematik für Lehramtsstudenten einsetzte. Klein stand zwischen 1872 und 1893 in Briefwechsel mit Fiedler, erhalten im Fiedler-Nachlaß (19 Briefe, eine Karte, Codex Ms Fiedler Hs 87:574–593). Eine Zusammenfassung der Briefe findet sich in [Wild 1958, 68, 126–129]. Vgl. auch §6, Anm. 15.
- 5 Frühere Überlegungen in diese Richtung finden sich schon bei Clebsch (1862) und bei Maxwell (1864b), dessen Arbeit jedoch weitgehend unbeachtet blieb [Timoshenko 1953, 204ff.; Niles 1950].

- 6 Mohrs Ergebnis folgt etwa aus der Bedingung stationärer Formänderungsarbeit E wie folgt:

$$\begin{aligned} E &= (S, \Delta l) = (S', \Delta l') + (S'', \Delta l'') \\ &= (S', S' \cdot r') + (S'', S'' \cdot r'') \\ &= (\tilde{S} + US'', (\tilde{S} + US'') \cdot r') + (S'', S'' \cdot r''). \end{aligned}$$

Ableitung der Energie nach S'' ergibt:

$$dE|_{S''_0}(Z) = 2(Z, {}^t U \tilde{S} r') + 2(Z, {}^t U U S''_0 \cdot r') + 2(Z, S''_0 \cdot r')$$

E wird also stationär für S mit

$${}^t U \tilde{S} \cdot r' + {}^t U U S''_0 \cdot r' + S''_0 \cdot r'' = 0.$$

Mohr stand natürlich die Matrixschreibweise nicht zur Verfügung; er rechnete komponentenweise. Darüberhinaus ist dies auch methodisch eine Umformulierung. K.-E. Kurrer wies mich darauf hin, daß die Variationsprinzipien der elastizitätstheoretischen Baustatik aus zwei — auch historisch - unterschiedlichen und komplementären Gesichtspunkten entwickelt werden können, dem “Prinzip der virtuellen Kräfte” oder dem “Prinzip der virtuellen Verschiebungen” (siehe auch [Kurrer 1987a]). Mohrs Argument basierte auf dem letzteren, während Argumente stationärer Energiezustände unter das erstere subsumiert worden wären (“Kräfte” noch im Sinne “lebendiger Kräfte” alias Energiebilanzänderungen). Weitere Untersuchungen zu diesem Thema wären sehr wünschenswert (vgl. §6, Anm. 2).

- 7 Mohr machte durch die Behandlung der Elastika als Seilkurve die Analyse elastischer Verformungen durch graphisch-statische Methoden erst möglich (Hinweis von K.-E. Kurrer). Darüberhinaus verbesserte er die von Culmann begonnene graphische Repräsentation des ebenen Spannungszustandes elastischer Baumaterialien (Mohr 1882; Culmann 1866, 224ff.). Sie diente ihm zur graphischen Darstellung von Scherkräften in Querschnitten eines gebogenen Balkens und bekam ab den 1880er Jahren in der empirischen und konstruktiven Festigkeitslehre große Bedeutung [Timoshenko 1953, 285ff.]. Projektiv-geometrische Konzepte spielten dabei aber keine Rolle mehr.
- 8 Wilhelm Ritter erkrankte 1902 schwer. Der letzte Band seines Werkes (Ritter 1906) wurde nach seinen Aufzeichnungen von seinem Sohn H. Ritter ediert, während er an sein Krankenbett gefesselt war.

-
- 9 “Ältere technikwissenschaftliche Disziplinen” heißt hier aufbauend auf wissenschaftliche Kenntnisse und industrielle Praktiken, die zu Jahrhundertbeginn schon in wesentlichen Zügen vorlagen. Das Muster gilt also etwa nicht für die Elektrotechnik.
 - 10 Etwa (Weisbach 1846).
 - 11 Etwa (Karmarsch 1837). Zu Karmarschs (1803–1879) Bedeutung für die Entwicklung der Polytechnischen Schule Hannover siehe [Manegold 1970]. Vgl. auch [Kurrer 1987b].
 - 12 Dem theoretisch-wissenschaftlichen Gründungskonzept des Eidgenössischen Polytechnikums entsprach eine Konzentration theorieorientierter Technikwissenschaftler in den ersten Jahrzehnten nach dessen Gründung: Culmann (1855–1880), Reulaux (1855–1863), Zeuner (1855–1871). Dazu kam eine entsprechende Berufungspraxis in den Grundlagenfächern, insbesondere der Mathematik: Dedekind (1858–1862), Christoffel (1862–1869), H.A. Schwarz (1869–1875), Frobenius (1875–1892), Schottky (1882–1892) und Fiedler (1867–1908) — in der Physik nicht zu vergessen R. Clausius (1855–1867) [Urner 1980].
 - 13 Das erste Materialprüfungslabor einer Hochschule wurde 1871 von J. Bauschinger an der Technischen Hochschule München in Zusammenarbeit mit der Maschinenfabrik Nürnberg eröffnet [Timoshenko 1953, 276ff.]. Es folgten Berlin (1871), Wien (1873), Zürich (1879 – Tetmajer) und Stuttgart (1879 – Bach). Ab dieser Zeit entwickelte sich auch eine enge Verbindung zwischen den entstehenden Industrie- und Hochschullaboratorien [Manegold 1969].
 - 14 Im deutschen System wie international dominierte bis in die 1870er Jahre die Techniker Ausbildung für den Staatsektor (einschließlich Eisenbahnbau), während erst in den 1880er Jahren der Übergang zur primären Ausrichtung auf die Ausbildung von Ingenieuren für den privaten Sektor erfolgte. Diese von P. Lundgreen in seinen Diskussionsbeiträgen auf dem 17. Internationalen Kongreß für Wissenschaftsgeschichte 1985 vertretene Einschätzung korrespondiert gut mit Manegolds Beobachtung der engen Verbindung zwischen Technischen Hochschulen und privater Industrie beim Aufbau der technischen Laborforschung ab den 1870/80er Jahren. Vgl. Anm. 13.
 - 15 Mohrs Beitrag (1875) markiert etwa den Beginn einer offenen kritischen Auseinandersetzung mit Culmanns Theoretisierungsprogramm. Hinzu trat in den 1880er Jahren ein Streit zwischen Mohr und Müller-Breslau

um die Grundlegung der klassischen Baustatik [Kurrer 1987a]. — Hinweise auf die zeitliche und sachliche Distanz zwischen der Umorientierung der Bauwissenschaften und des Maschinenbaus verdanke ich T. Hänseroth und K.-E. Kurrer.

- 16 Die Konfrontation wurde unter anderem durch die Weltausstellung 1893 in Chicago vermittelt und schlug sich im Eindruck nieder, den insbesondere die US-Exponate auf deutsche Ingenieure machten. Das Konkurrenzmotiv fand direkten Eingang in die "Aachener Erklärung" des VDI:
"... Es handelt sich also jetzt nicht um sogenannte akademische Erörterungen über die Ausbildung der Ingenieure, sondern wir stehen einer drückenden Notwendigkeit gegenüber, welche uns der Wettbewerb des Auslandes in Verbindung mit unseren vielfach schwierigen Verhältnissen auferlegt. Es heisst jetzt einfach, sich der eigenen Haut zu wehren ..."
(VDI 1895a, 1212)
- 17 Über die Rolle Felix Kleins im Hintergrund der Meinungsbildung im VDI vgl. [Manegold 1970, 136ff.].
- 18 Neben den Artikeln von A. Riedler (1895, 1896), der sich zum — häufig polemischen und etwas konfusen — Sprecher der "Ingenieurbewegung" machte, ohne jedoch die instrumentalistische Verkürzung von Theorie und Mathematik in den Technikwissenschaften inhaltlich voll mitzutragen, siehe etwa die in Anm. 19 angegebenen Diskussionsbeiträge.
- 19 Die instrumentalistische Position findet sich in verschiedenen Varianten bei (Brückmann 1895, Mohr 1897). Dagegen steht die Position von Mathematikdozenten an den Technischen Hochschulen (Dyck/Henneberg/Krause 1897, Henneberg 1897), die von 7 Ingenieurwissenschaftlern in einem gemeinsamen Schreiben mit gewissen Einschränkungen unterstützt (Dietz u.a. 1897), jedoch in einer weiteren Erklärung von 44 Ingenieurwissenschaftlern etwa so radikal wie von Mohr angegriffen wurde (Arnold u.a. 1897).
- 20 Siehe unter institutionellem beziehungsweise methodischen Gesichtspunkt [Manegold 1969, 1970; Braun 1977], unter dem der Mathematik [Hensel/Purkert 1986/87] und insbesondere die materialreiche und sorgfältige Studie [Hensel 1987a, b]. W. Purkerts Vortrag über das Thema in Bielefeld im Juni 1985 sowie Gesprächen mit ihm verdanke ich viele wertvolle Hinweise.
- 21 Vgl. dazu etwa A. Stodolas Vortrag auf dem 1. Internationalen Mathematikerkongreß in Zürich (Stodola 1897).

-
- 22 Die Akzentverschiebung in Föppls Darstellung gegenüber Culmann könnte u.U. ein indirekter Niederschlag des von Plückers Auffassung des “linearen Strahlenkomplexes” geprägten “geometrischen Mechanik” der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts sein. — Vgl. dazu [Ziegler 1985].
- 23 Momente als “freie Vektoren”, Kräfte als “linienflüchtige Vektoren”, d.h. an die Wirkungslinie gebunden. Analytische Darstellung komponentenweise, ähnlich wie schon bei Möbius (vgl. §8.3) (Föppl 1900, 120ff., 140ff.).
- 24 Hilbert verteidigte an dieser Stelle die Cantorsche Mengentheorie gegen Angriffe aus dem intuitionistischen Lager durch Hinweis auf deren *Fruchtbarkeit*. Er charakterisierte dabei “Fruchtbarkeit” einer Theorie durch die Fähigkeit, vor Entwurf der Theorie schon gestellte Probleme zu lösen (gewissermaßen die historisierte Variante von (*)) und ein inhaltliches Äquivalent zur Bedingung (**) (Hilbert 1926).
- 25 Das ging wiederum ein bis zwei Jahrzehnte später (also in der “Konsolidierungsphase”) bis zu einer gezielten Ausarbeitung geeigneter mathematischer Grundlagen aus dem baustatischen Kontext heraus, insbesondere mit dem Ziel der Gewinnung praktikabler Lösungsmethoden linearer Gleichungssysteme (Hertwig 1912, Pirlet 1909 u.a.) — Hinweis von K.-E. Kurrer.
- 26 Das erscheint mir als die wahrscheinlichere Variante. Die Entscheidung darüber, welche der Varianten historiographisch korrekter ist, muß allerdings anderen Untersuchungen überlassen bleiben.

Anmerkungen zu §10

- 1 Ähnliches gilt darüberhinaus für die Ausbildung vektorieller Systeme (vgl. §§2.1, 2.2).
- 2 Diese Formulierung ist einer Passage entliehen, in der Herbart die Beziehung von Philosophie und Einzelwissenschaften diskutierte (Herbart 1807, 230).
- 3 Natürlich war der weiterreichende Erfolg in der modernen Kristallographie des 20. Jahrhunderts ganz wesentlich von der Entwicklung röntgenometrischer Methoden und den neuen Möglichkeiten empirischer Beobachtung abhängig. Er ist also durch die theoretische Fruchtbarkeit der Mathematisierung allein nicht zu erklären (vgl. §5.6).
- 4 “Regelmässige Ungleichförmigkeit im Innern eines Körpers nennen wir Structur.” (Frankenheim 1826, 498)
- 5 Berichtet etwa von Courant in (1981, 164).
- 6 Die zweitgenannte Abänderung (“abgewandt–angewandt”) verweist stattdessen eher auf ein Stück wissenssoziologischer Wahrheit.
- 7 In der Diderot-d’Alembertschen “Encyclopédie” wurden die Gebiete der “Mathématiques mixtes” auch als “Physico-Mathématiques” klassifiziert (Statik, Dynamik, Optik, Astronomie, Geographie, Harmonielehre, Akustik, sowie “Mutmaßungskunst” als Vorläufer der Wahrscheinlichkeitstheorie) und auf die Probleme hingewiesen, die aus der notwendigen Kombination empirisch-phänomenologischen Wissens mit mathematisch-ableitender Argumentation entspringen (Encyclopédie 1751ff.). Häüys Gewinnung der 18 elementaren Kristallformen (die den “hypothetischen Kernen” entsprachen) kann als ein schönes und typisches Beispiel der “mathématiques mixtes” in unserem Kontext angesehen werden — vgl. §1.2.
- 8 Vgl. dazu auch §11.1.
- 9 Vom Standpunkt der Mathematik als eigenständiger Wissenschaft ist dabei auch schon die Verfolgung der Erkenntnisziele einer anderen Wissenschaft als heteronome Anbindung an einen vorgegebenen Zweck zu verstehen. Dies ist frei von einer a-priori Wertung zu verstehen.

- 10 Es ließe sich also zwischen “*stark fremdreferentiell*” mathematischen Wissen, das von Begründung *und* Bedeutung des Außenbezuges bedarf, und “*schwach fremdreferentiell*”, das selbstreferentiell begründet ist, aber seine Bedeutung erst aus der Fremdreferenz bezieht, unterscheiden. Dies ist nicht mit der Situation zu verwechseln, daß eine mathematische Theorie sowohl innerhalb der Mathematik als auch im Außenbezug Bedeutung besitzt oder gewinnt (das ließe sich vielleicht einmal provisorisch als “*bireferentiell*” bezeichnen).
- 11 Nicht ganz zutreffend Ende des 19. und Anfang unseres Jahrhunderts als “Arithmetisierungstendenz” bezeichnet. Vgl. auch die weiteren Bemerkungen dazu in §11.
- 12 Um nur einige der jüngeren Zeit zu nennen: Heaviside-Diracsche δ -Funktion [Lützen 1982, Kap. 4.20], die weiterverwendeten Leibnizschen Differentiale in technikwissenschaftlichen oder heuristisch-physikalischen Arbeiten, divergente Reihen der Quantenfeldtheorie usw.
- 13 So machte Fedorov bei der Verwendung des Gruppenbegriffs nicht mit und gab eine heteronom begründete Einschränkung der von ihm als wesentlich angesehenen Pflasterungen durch seine Parallelitätshypothese (§5.4).

Anmerkungen zu §11

- 1 Das wurde anfangs keineswegs als im strikten Gegensatz zur fremdreferentiellen Bedeutsamkeit der mathematischen Theorien angesehen, sondern als eine notwendige Ergänzung.
- 2 [Gray 1979, Toth 1980, Kötter 1901, Reich 1979]
- 3 Vgl. etwa die scharfe Kritik an Cauchys Konzept für die Fundierung der Analysis, die dieser in den Kursen der Ecole Polytechnique zu entwickeln begann [Belhoste 1985, 107f.], oder auch die Neigung, selbstreferentiell ausgerichteten Arbeiten einen “angewandten” Titel voranzustellen, wie es etwa Cauchy bei seiner Untersuchung über die Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen tat [Hawkins 1975, 21].

- 4 Gauß bildete in dieser, wie in nahezu jeder anderer Hinsicht, eine monumentale Ausnahme.
- 5 Der herausragendste unter ihnen war zweifelsfrei B. Riemann (1826–1866).
- 6 Etwa bei der oben angeführten Polemik Jacobis gegen Fourier.
- 7 Vgl. dazu [Jahnke 1982; Eccarius 1976, 1977 u.a.].
- 8 Der Vergleich zwischen der Kameralistik-Ausbildung und einem Studium an der Ecole Polytechnique sowie nachfolgender Spezialschule ist keineswegs schief, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag, da auch die letztere neben der Selbstrekrutierung von Naturwissenschaften, Mathematik und technischen Fächern im wesentlichen der Ausbildung höherer Staatsbeamter diene.
- 9 Jahnke in Anlehnung an eine Beobachtung Gillispies über die Bedeutung naturwissenschaftlichen Wissens für die industrielle Revolution [Jahnke 1982, 99ff.; Gillispie 1957].
- 10 [Brock 1975; Richards 1979; Todt 1979b; Scholz 1980, 100ff.]
- 11 [Dieudonné 1974, 42ff., Reich 1979; Struik 1934; Vincensini 1972; Pont 1974; Scholz 1980]
- 12 [Wußing 1969; Purkert 1971, 1972, 1973; Edwards 1980]
- 13 Es scheint unwahrscheinlich, daß in anderen europäischen Ländern überhaupt keine entsprechende Anpassungsprobleme auftraten; jedoch wurden sie allem Anschein nach weniger lautstark und konfliktreich bewältigt. Die im folgenden mehrfach zitierte Studie L. Pyensons [1983] ist insgesamt sehr stark, meines Erachtens zu stark, auf die kulturelle und soziale Seite des entstehenden Konflikts im deutschsprachigen Raum ausgerichtet und vernachlässigt die kognitiv-disziplinäre Seite zu sehr.

Anhang

Anhang 1: Überblick Kristallographische Raumgruppen

Dieser Anhang enthält einen knappen Abriss der Klassifikation und der erweiterungstheoretischen Konstruktion kristallographischer Gruppen. In Hinsicht auf die historischen Arbeiten des 19. Jahrhunderts wird auf die Konzepte der geometrischen Theorie besonderer Wert gelegt. Vieles läßt sich natürlich heute leichter verstehen, wenn Grundideen der arithmetischen Theorie und der Gruppenerweiterungen hinzugezogen werden. Da andererseits aus den modernen Darstellungen in der Regel die klassische Theorie mit ihrem geometrischen Zugang zu den zentralen Konzepten verschwunden ist, wird man in diesem Anhang eine sonst wohl selten anzutreffende Kombination der geometrischen und der arithmetischen Aspekte der kristallographischen Raumgruppen finden. Dazu gehört auch die Verwendung einer an einigen Stellen von der Literatur etwas abweichenden Terminologie. Die betreffenden Stellen sind entsprechend gekennzeichnet. Ich hoffe, daß diese Abweichungen nicht zur terminologischen Konfusion führen, sondern dazu beitragen, daß die *Beziehungen und Unterschiede* zwischen modernen (arithmetischen) und historischen (geometrischen) Klassifikationskonzepten der kristallographischen Symmetrien klarer hervortreten.

Aufbau von Anhang 1:

- 1.1 Grundlegende Begriffe
- 1.2 Geometrische Klassifikation
- 1.3 Arithmetische Klassifikation
- 1.4 Geometrische Erweiterungen

1.1 Grundlegende Begriffe

Im folgenden sei G stets eine *diskrete Untergruppe* der Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{E}^3) \cong \mathbb{R}^n * O(n, \mathbb{R})$ und $\Gamma < G$ der *Normalteiler der Translationen* in G , $\Gamma = G \cap \mathbb{R}^n$. G operiert also diskontinuierlich und sogar eigentlich kontinuierlich mit Fundamentalbereich auf \mathbb{E}^n . Dabei können wir ausgehen von

Definition 1:

- a) $G < \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ heißt genau dann *diskontinuierlich* (genauer: operiert diskontinuierlich auf \mathbb{E}^n), wenn alle Punkt orbits $G(x)$ für $x \in \mathbb{E}^n$ ohne Häufungspunkt sind.
- b) G heißt genau dann *eigentlich diskontinuierlich*, wenn für x, y aus verschiedenen G -Orbits stets Umgebungen U von x , U' von y existieren, sodaß $G(U) \cap U' = \emptyset$.

In unserem Fall können wir auf die sprachliche Unterscheidung zwischen diskret, diskontinuierlich und eigentlich diskontinuierlich weitgehend verzichten, weil $\mathbb{E}^n \cong \text{Isom}(\mathbb{E}^n)/O(n, \mathbb{R})$ homogener Raum zur lokalkompakten Gruppe $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ und der kompakten Untergruppe $O(n, \mathbb{R})$ ist, und *daher* hier diese drei Attribute äquivalent sind.

Offensichtlich kann es in einer diskontinuierlichen Gruppe keine beliebig kleine Translationen geben; das heißt, es gibt stets ein $\epsilon > 0$, sodaß $|t| > \epsilon$ für alle Translationen $t \in \Gamma$. Darüberhinaus gilt sogar

Lemma 1:

Eine diskontinuierliche Translationsgruppe $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ ist endlich erzeugt, freie abelsche Gruppe mit $\text{rang}(\Gamma) \leq n$.

In der Kristallographie spielen nun aufgrund der 3-fachen Periodizität des Aufbaus der kristallinen Materie (bei $n = 3$) diejenigen diskontinuierlichen Gruppen eine ausgezeichnete Rolle, deren Translationsuntergruppen ein Gitter im \mathbb{E}^n (im strikten Sinne) bilden, d.h. von maximalem Rang sind. Das ist der Grund für

Definition 2:

- a) Eine diskontinuierliche Gruppe $G < \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ heißt genau dann *kristallographische Raumgruppe* (kurz: n -dimensionale Raumgruppe), wenn ihre Translationsuntergruppe Γ von maximalem Rang ist, also $\text{rang}(\Gamma) = n$.
- b) Eine diskrete Translationsgruppe maximalen Rangs im \mathbb{E}^n oder \mathbb{R}^n heißt (Translations-) *Gitter*.

Es gibt verschiedene andere Möglichkeiten, kristallographische Raumgruppen unter den diskontinuierlichen Isometriegruppen auszuzeichnen. Die wichtigsten davon ergeben sich aus

Lemma 2 (Bieberbach):

Folgende Bedingungen sind für eine diskontinuierliche Gruppe G von Isometrien im \mathbb{E}^n mit Translationsuntergruppe Γ äquivalent:

- (i) Γ bildet ein Gitter.
- (ii) Γ ist maximal abelsch.
- (iii) \mathbb{E}^n ist als G -Modul unzerlegbar.
- (iv) Der Fundamentalbereich von G ist relativ kompakt.

Nun gibt es natürlich sehr viele kristallographische Gruppen, die sich “nicht wesentlich” unterscheiden, zum Beispiel wenn es eine Gitterisomorphie gibt, deren affine Fortsetzung auf \mathbb{E}^n einen Isomorphismus der Raumgruppen induziert. Diese Überlegung führt auf den Anfang von

Definition 3:

Zwei kristallographische Raumgruppen G, G' heißen genau dann

- a) *vom selben Raumgruppentyp*, wenn sie in der affinen Gruppe $\text{Aff}(\mathbb{E}^n)$ konjugiert sind;
- b) *vom selben eigentlichen Raumgruppentyp*, wenn sie in $\text{Aff}^+(\mathbb{E}^n)$, also orientierungserhaltend affin, konjugiert sind;
- c) *enantiomorph*, wenn sie affin, aber nicht orientierungserhaltend affin konjugiert sind.

Enantiomorphe Gruppen repräsentieren die Symmetrien von Kristallstrukturen, die sich zueinander in gewissem Sinne spiegelbildlich verhalten. Raumgruppen ein- und desselben Typs können sich außer durch die Lage insbesondere auch durch *metrische Parameter des Gitters* unterscheiden. Jeder Raumgittertyp enthält also unendlich viele einzelne Raumgruppen (sogar eine “mehrfach unendliche”, stetig parametrisierbare Schar).

Von metrischen Parameter zu reden, hat nur unter Bezug auf Gitterbasen Sinn, die in spezifischem Sinne normiert sind. Dabei ist zu beachten, daß in der kristallographischen Literatur schon eine Basis $\{a_1, \dots, a_n\}$ des \mathbb{R}^n , deren additive Hülle im Gitter Γ liegt, als *kristallographische Gitterbasis* bezeichnet wird. Wird Γ davon erzeugt, handelt es sich also im mathematischen Sinne um eine *Basis des Gitters*, so ist von einer *primitiven Basis* die Rede

[Wondratschek 1983, 715]. Die konvexe Hülle einer kristallographischen Basis a_1, \dots, a_n im \mathbb{R}^n wird als *Einheitszelle* (bezüglich der Basis) bezeichnet. Zur Beschreibung eines *kristallographischen Musters*, das heißt eines geometrischen Objektes, das unter der Operation einer Raumgruppe G invariant ist, reicht es offensichtlich aus, das Muster innerhalb einer Einheitszelle zu kennen. Daraus entsteht das gesamte Muster durch n -fach periodische Fortsetzung.

Im mathematischen Sinne gibt es natürlich unendliche viele Möglichkeiten zur Basiswahl im Gitter (Koordinatenwechsel durch $GL(n, \mathbb{Z})$). Die genannte Normierung der Gitterbasis (im mathematischen Sinne) erfolgt am einfachsten über die Bestimmung einer Minimalbasis im Sinne von

Definition 4:

Eine *Minimalbasis* a_1, \dots, a_n des Gitters Γ im \mathbb{R}^n entsteht rekursiv durch n Schritte folgender Art:

- Auswahl eines Elementes a_1 von $\Gamma < \mathbb{R}^n$ minimaler Länge (bezüglich der euklidischen Metrik),
- sind a_1, \dots, a_k als Elemente der Minimalbasis bestimmt, so wird a_{k+1} aus den Gitterelementen minimalen Abstandes zur linearen Hülle $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ ausgewählt.

Eine *reduzierte Basis* kann nun wie in der arithmetischen Reduktionstheorie positiv definiter quadratischer Formen durch weitere Normierung unter den nun noch vorhandenen Auswahlmöglichkeiten der Minimalbasen ausgezeichnet werden [Engel 1986, 46ff.; Burckhardt 1947, 94ff.; Bachmann 1923, 180ff.; Klemm 1982, 161]. Damit ist ein Gitter in unserem Kontext durch einen von der Gittersymmetrie abhängigen Satz reeller metrischer Parameter determiniert. Ist ein Raumgruppentyp vorgegeben, so sind Kristallklasse und die Erweiterungsdaten (s.u.) festgelegt. Die Variation der Raumgruppen innerhalb desselben Raumgruppentyps wird also im wesentlichen durch die Gitterparameter und zusätzlich noch die Lage des Gitters (Konjugation in $\text{Isom}(E^n)$) erfaßt.

Der Übergang zum Standpunkt der Raumgruppentypen reduziert den Spielraum der verschiedenartigen Objekte beträchtlich. Das zeigt

Theorem 1 (Bieberbach; Fedorov/Schoenflies; Brown/Köhler):

- a) In jeder Dimension n gibt es nur endlich viele kristallographische Raumgruppentypen.
- b) Für $n = 2$ gibt es 17 eigentliche Raumgruppentypen; für $n = 3$ gibt es 219 Raumgruppentypen und 230 eigentliche Raumgruppentypen.
- c) Für $n = 4$ gibt es 4783 Raumgruppentypen und 4895 eigentliche Raumgruppentypen.

Interessanter als die bloßen Anzahlen sind natürlich Informationen über Eigenschaften und Beschreibungsmöglichkeiten von Raumgruppen, die neben anderem auch deren Konstruktion ermöglichen. Dabei sind zwei grundsätzlich verschiedene Zugänge möglich, ein geometrisch-algebraischer, der für die Fälle $n = 2, 3$ entwickelt und angewendet wurde (Schoenflies 1891a) und ein arithmetisch-algebraischer, der für $n = 3$ gewisse formale Vorteile hat (allerdings ohne den geometrischen Aspekt etwas kahl bleibt) [Burckhardt 1947; Klemm 1982], leichter auf den n -dimensionalen Fall übertragbar ist und für $n = 4$ auch den technischen Rahmen zur konstruktiven Klassifikation geliefert hat.

Im folgenden können nur kurz einige Grundbegriffe der beiden Zugänge resümiert werden. Der geometrische Zugang ist im Kontext der hier vorliegenden Studie von ausschlaggebender Bedeutung; der arithmetisch-algebraische ist hingegen in der heutigen mathematisch-kristallographischen Literatur aus guten Gründen dominant, sodaß er in diesem Kurzfresümee ein größeres Gewicht bekommen muß als in der historischen Darstellung. Für genauere Information siehe die entsprechende Fachliteratur [Burckhardt 1947; Klemm 1982; Schwarzenberger 1980; Brown e.a. 1978 und andere].

1.2 Geometrische Klassifikation der kristallographischen Raumgruppen

1.2.1 Geometrische Kristallklassen

Aufgrund der Inklusionen einer Raumgruppe G und ihres Gitters Γ in $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ ist die Faktorgruppe G/Γ in natürlicher Weise einer orthogonalen Gruppe isomorph:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \text{Isom}(\mathbb{E}^n) & \xrightarrow{\rho} & \text{Isom}(\mathbb{E}^n)/\mathbb{R}^n \cong O(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/\Gamma & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Definition 5a:

Der *orthogonale Anteil* der Raumgruppe G wird gegeben durch $\rho(G) \cong G/\Gamma$ mit $\rho(G) < O(n, \mathbb{R})$ wie oben.

Affine Konjugation der Raumgruppen zieht für die orthogonalen Anteile Konjugation in $O(n, \mathbb{R})$ nach sich. Man wird also zu entsprechenden Äquivalenzklassen übergehen. Andererseits sind in unserem Kontext nicht alle Konjugationsklassen orthogonaler Gruppen relevant, da $\rho(G)$ bei Konjugation stets ein Gitter invariant läßt und dies nicht für alle orthogonalen Gruppen der Fall ist. Wir können uns also im folgenden so einschränken, wie in

Definition 6a:

Eine Konjugationsklasse \bar{K} von Untergruppen K in $O(n, \mathbb{R})$ heißt genau dann *geometrische Kristallklasse_I* (der Dimension n), wenn K ein Gitter Γ invariant läßt, das heißt: Zu jedem K aus \bar{K} gibt es ein Gitter Γ mit

$$\alpha\Gamma\alpha^{-1} = \Gamma \quad \text{für alle } \alpha \in K.$$

Die hier gegebene Definition ist ein wenig “altmodisch”. In der neueren Literatur ist es üblicher statt der Konjugationsklassen orthogonaler Gruppen die zugehörigen Raumgruppentypen als “Kristallklassen” zu bezeichnen. Das entspricht dann der

Definition 6b:

Ist \bar{K} Konjugationsklasse von Untergruppen K von $O(n, \mathbb{R})$, die ein Gitter Γ invariant lassen, so wird als *geometrische Kristallklasse_{II}* von \bar{K} die Menge aller Raumgruppentypen \bar{G} mit $\rho(G) = K$ bezeichnet.

Andererseits läßt sich damit die Zuordnung eines “orthogonalen Anteils” konsistent auf Raumgruppentypen übertragen.

Definition 5b: Der *orthogonale Anteil* eines Raumgruppentyps \bar{G} ist die (geometrische) Kristallklasse_I des orthogonalen Anteils $\rho(G)$ eines Repräsentanten G von \bar{G} .

Die beiden Sprachverwendungen der Definitionen 6a, 6b ergänzen sich gegenseitig. Die Angabe einer Kristallklasse durch die orthogonale Gruppe K erlaubt es, je nach Kontext darin einen Bezeichner für Kristallklassen_I oder für Kristallklassen_{II} zu lesen. Das reduziert den sprachlichen Aufwand und macht Bezüge leichter formulierbar. In unserer historischen Darstellung sind in der Regel geometrische Kristallklassen_I gemeint, wenn einfach von “Kristallklassen” die Rede ist. Der Leser kann mit der Assoziation $K_I - K_{II}$ spielen, sollte aber den historischen Kontext im Auge behalten. In ähnlicher Weise werden im folgenden häufig Doppel- (oder sogar Vierfach-)Erklärungen angegeben.

Erfreulicherweise gelten für die geometrischen Kristallklassen zwei starke Endlichkeitsaussagen.

Theorem 2:

- (i) Die geometrischen Kristallklassen werden durch endliche Untergruppen von $O(n, \mathbb{R})$ repräsentiert.
- (ii) Die Anzahl der geometrischen Kristallklassen der Dimension n ist endlich.
- (iii) Speziell für $n = 2$ gibt es 10 Kristallklassen, für $n = 3$ sind es 32 (vgl. auch Anhang 2, Tab. 9).

Die Endlichkeitsaussage (i) folgt aus der Diskontinuitätsbedingung von G , die auch Diskontinuität von $K < O(n, \mathbb{R})$ zur Folge hat. (ii) folgt aus der Endlichkeit der Anzahl endlicher Untergruppen von $GL(n, \mathbb{Z})$ und der Erweiterungstheorie (s.u.). Die Begründung von (iii) erfordert die detaillierte Auswertung der Gitterinvarianz für die zulässigen Rotationen in $O(2, \mathbb{R})$ bzw. $O(3, \mathbb{R})$.

1.2.2 Holoedriegruppen und Kristallsysteme

Ein Gitter Γ einer Raumgruppe G gegebenen Raumgruppentyps \bar{G} kann selber auf seine maximale orthogonale Symmetrie H_Γ unter Konjugation in $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ untersucht werden. Es zeigt sich, daß innerhalb eines Raumgruppentyps die dabei auftretenden H_Γ im allgemeinen repräsentantenabhängig sind. Um diesen Mangel zu beheben, verwenden wir zunächst

Definition 7a:

Die *geometrische Holoedrie* eines Gitters $\Gamma < \mathbb{E}^n$ sei definiert durch

$$H_\Gamma := \{g | g \in O(n, \mathbb{R}), g\Gamma g^{-1} = \Gamma\}.$$

Die (geometrischen) Holoedrien sind per definitionem spezielle (geometrische) Kristallklassen $_I$. Innerhalb der halbgeordneten Menge der Kristallklassen $_I$ markieren sie gewisse Elemente (eben als Holoedrien). Das gestattet die Einteilung der Kristallklassen in "Kristallsysteme" gemäß

Definition 8a:

- (i) Zwei geometrische Kristallklassen $_I$ K, K' gehören genau dann demselben *Kristallsystem* $_I$ an, wenn jede K enthaltende (geometrische) Gitterholoedrie auch K' enthält und vice versa.
- (ii) Als *Holoedrie eines Kristallsystems* $_I$ werde nun die Gesamtheit der nach (i) zu bildenden kleinsten Gitterholoedrien (zu K, K' aus dem betreffenden Kristallsystem $_I$) bezeichnet.
- (iii) Unter *Holoedrie einer (geometrischen) Kristallklasse* $_I$ K wird entsprechend die Holoedrie des zugehörigen Kristallsystems $_I$ verstanden, geschrieben H_K .

Bemerkungen: Zunächst ist nur die Gitterholoedrie als Gruppe definiert, die Holoedrie eines Kristallsystems oder einer Kristallklasse dagegen als Menge von Gitterholoedrien. Für $n = 2, 3$ gibt es aber immer ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element in der Menge der Holoedrien größer als eine Kristallklasse K . Dort ist H_K tatsächlich als Holoedriegruppe (bzw. die Konjugationsklasse) zu lesen, nicht als 1-elementige Menge von ... Für höhere n ist das jedoch nicht mehr immer der Fall ($n = 7$, vgl. [Neubüser, Plesken, Wondratschek 1981]).

Falls das auch für höhere n gilt; würde das die Sprache vereinfachen.

Die hier gewählte Definition ist in der aktuellen Literatur nicht üblich, sie entspricht aber einer modernisierten Fassung der Terminologie des 19. Jahrhunderts, die sich statt auf Gitter für lange Zeit auf "Achsensysteme" bezog (und damit auf endliche Punktsymmetriekonstellationen). Ganz ähnlich wie im Fall der Kristallklassen läßt sich die Einteilung von den orthogonalen Gruppen via orthogonalen Anteil auf die Raumgruppen übertragen. Das führt auf

Definition 8b:

- (i) Zwei Raumgruppentypen \bar{G}, \bar{G}' gehören genau dann *demselben Kristallsystem_{II}* an, wenn die orthogonalen Anteile $\rho(\bar{G})$ und $\rho(\bar{G}')$ demselben Kristallsystem_I angehören.
- (ii) Als *Holoedrie eines Kristallsystems_{II}* bzw. eines Raumgruppentyps \bar{G} des Systems wird die Holoedrie des zugehörigen Kristallsystems_I $H_{\rho(\bar{G})}$ bezeichnet.
- (iii) Die *orthogonale Holoedrie einer Raumgruppe G* (bzw. eines Raumgruppentyps \bar{G}) ist die Holoedrie des zugehörigen orthogonalen Anteils $H_{\rho(\bar{G})}$.

Die Kristallsysteme des zwei- und dreidimensionalen Falls sind gut bekannt.

Theorem 3:

- (i) In der Dimension $n = 2$ gibt es 4 Kristallsysteme, ausgezeichnet durch die Holoedrien D_6, D_4, D_2, C_2 die in dieser Reihenfolge als ebenes hexagonales, tetragonales, orthogonales und monoklines System bezeichnet werden.
- (ii) Für $n = 3$ gibt es 7 Kristallsysteme, ausgezeichnet durch die Holoedrien $O^*, D_{6h}, D_{3d}, D_{4h}, D_{2h}, C_{2h}, C_i$, in dieser Reihenfolge als kubisches (auch isometrisches oder reguläres), hexagonales, trigonales, tetragonales, orthorhombisches, monoklines und triklines System bezeichnet.

1.2.3 Gittersysteme, Bravaisysteme, Kristallfamilien

Die Holoedriegruppen wurden als orthogonale Symmetriegruppen von Gittern eingeführt. Dadurch wird eine Klassifikation der Gitter nach ihrem Symmetriotyp nahegelegt.

Definition 9a:

Zwei Gitter Γ, Γ' gehören genau dann demselben *Gittersystem* $_I$ (bzw. *Bravaisystem* $_I$) an, wenn ihre geometrischen Holoedrien (Def. 7a) übereinstimmen:

$$H_\Gamma = H_{\Gamma'}.$$

Bei dem Versuch der Übertragung dieser Klassifikation auf die Raumgruppentypen analog der Vorgehensweise bei Kristallklassen und Kristallsystemen ergibt sich zunächst das Problem, daß die Gitter der Repräsentanten eines Raumgruppentyps \bar{G} je nach Wahl der Gitterparameter verschiedene Holoedrien besitzen können. Allerdings entstehen diese Unterschiede lediglich dadurch, daß zusätzlich zur Gittersymmetrie, die von der Raumgruppenstruktur erzwungen wird, bei spezieller Parameterwahl weitere Symmetrien der Gitter hinzugefügt werden, die für die Raumgruppenstruktur ohne Bedeutung sind. Die Erhöhung stellt sich also unter dem Blickwinkel der Raumgruppenstruktur als *Scheinsymmetrie* des Gitters dar.

Es zeigt sich, daß die bei den unterschiedlichen Gruppen eines Raumgruppentyps auftretenden Holoedrien der zugehörigen Gitter zumindest in den Dimensionen 2 und 3 ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element $H_\Gamma(\bar{G})$ haben (bezüglich der von der Inklusion auf Konjugationsklassen von Untergruppen in $O(n, \mathbb{R})$ induzierten Ordnungsrelation). Dies wird im Sinne der Gitterparameter sogar generisch angenommen, d.h. lediglich für spezielle Gitterparameter (Bedingungen der Kodimension ≥ 1 im Parameterraum) erhöht sich die Gitterholoedrie. Wir halten daher fest

Definition 7b ($n = 2, 3$):

Die (geometrische) *generische Gitterholoedrie* eines Raumgruppentyps \bar{G} sei für $n = 2, 3$ das eindeutig bestimmte kleinste Element $H_\Gamma(\bar{G})$ der durch die Inklusion halbgeordneten Menge

$$\{H_\Gamma | \Gamma \text{ Gitter von } G, G \in \bar{G}\}.$$

Um es noch einmal deutlicher zu sagen, die Möglichkeit dieser Definition beruht auf

Lemma 3:

Die geometrischen Holoedrien der Gitter von Raumgruppen eines Raumgruppentyps \bar{G} besitzen für $n = 2, 3$ ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element

$$H_{\Gamma}(\bar{G}) = \bigcap_{G \in \bar{G}} H_{\Gamma(G)}.$$

Dieses wird generisch angenommen, d.h. lediglich für spezielle Werte der Gitterparameter (Bedingungen der Kodimension ≥ 1) erhöht sich die Gitterholoedrie.

Damit wird nun die gewünschte Übertragung der Einteilung der Raumgruppentypen analog der Einteilung der Gitter in Gittersysteme möglich.

Definition 9b ($n = 2, 3$):

Zwei Raumgruppentypen \bar{G}, \bar{G}' gehören genau dann demselben *Bravaisystem_{II}* (bzw. *Gittersystem_{II}*) an, wenn die generischen (geometrischen) Gitterholoedrien nach Definition 7b) gleich sind:

$$H_{\Gamma}(\bar{G}) = H_{\Gamma}(\bar{G}').$$

Es gibt also ebensoviele Kristallsysteme wie Gitter/Bravaisysteme, und beide werden durch dieselben Holoedriegruppen charakterisiert. Aber *das Zuordnungsverfahren der Holoedriegruppe zu einem Raumgruppentyp ist je nach dem zugrunde gelegten Aspekt verschieden*. Beim ersten erfolgt die Klassifikation nach dem Gesichtspunkt des orthogonalen Anteils (geometrische Kristallklasse) eines Raumgruppentyps, beim zweiten wird die zugehörige strukturelle Gittersymmetrie klassifiziert. Und darüberhinaus sind nicht nur die Zuordnungsverfahren verschieden, sondern zuweilen auch die Resultate. Daher die

Warnung: Es gilt nicht allgemein

$$H_{\rho(\bar{G})} = H_{\Gamma}(\bar{G}) !$$

Beispiele sind in der Dimension $n = 3$ alle Raumgruppentypen, die durch Erweiterung eines Gitters vom Typ $\mathbb{Z}(3P)$ (also der Holoedrie $H_{\mathbb{Z}(3P)} = D_{6h}$ — vgl. Anhang 2, Tab. 10) durch eine Kristallklasse K des trigonalen Systems (also der Holoedrie $H_K = D_{3d}$) entstehen.

Es ist nun naheliegend, die aus diesen Unterschieden hervorgehende feinste gemeinsame Vergrößerung der Einteilung der Kristallklassen zu betrachten, das heißt, Kristallsysteme mit Holoedrien H, H' genau dann zu einer neuen klassifizierenden "Familie" zusammenzufassen, wenn es einen Raumgruppentyp gibt, dessen orthogonale Holoedrie bzw. generische Gitterholoedrie mit H bzw. H' übereinstimmt. Das führt auf

Definition 10:

- a) Zwei Kristallklassen_I K, K' gehören genau dann derselben *Kristallfamilie*_I an, wenn es einen Raumgruppentyp \bar{G} gibt mit

$$H_K = H_{\rho(\bar{G})}, \quad H_{K'} = H_{\Gamma(\bar{G})}$$

oder $H_K = H_{\Gamma(\bar{G})}, \quad H_{K'} = H_{\rho(\bar{G})}$.

- b) Zwei Raumgruppentypen gehören genau dann derselben *Kristallfamilie*_{II} an, wenn dies für ihre orthogonalen Anteile der Fall ist.

Beim Übergang zu Familien werden offenbar immer ganze Kristallsysteme miteinander vereinigt (man nehme nur für Kristallklassen K ein- und desselben Systems der Holoedrie H als Raumgruppe etwa das semidirekte Produkt aus K und einem Gitter mit Symmetrie H). Zwei Kristallsysteme der Holoedrien H, H' werden genau dann zu einer Familie vereinigt, wenn es einen Raumgruppentyp gibt, für den orthogonale Holoedrie und generische Gitterholoedrie verschieden sind und gerade die Werte H, H' annehmen.

1.2.4 Raumgittertypen (Bravaischaren)

Die bisherige Klassifikation der kristallographischen Raumgruppen folgte bis hierher problemlos einem geometrischen Zugang, der zwar von der in der aktuellen mathematisch-kristallographischen Literatur vorgezogenen arithmetisch-algebraischen Methode abweicht, aber im Resultat nichts wesentlich anderes liefert und dabei der Mathematik und Kristallographie des 19. Jahrhunderts näher steht. Bei der nun folgenden Einteilung der Raumgruppentypen in Bravaischaren ist die Identität des Resultates für $n > 3$ nicht mehr offensichtlich; sie gilt aber für die uns hauptsächlich interessierenden Fälle $n = 2, 3$. Da in der mathematisch-kristallographischen Literatur "Bravaischaren" für die Klassifikation im Sinne der arithmetischen Theorie verwendet wird, soll der Klarheit halber hier von "Gittertypen" gesprochen werden.

Der geometrische Zugang zur Klassifikation in Gittertypen beruht auf Bravais' Idee, danach zu fragen, wann zwei Gitter desselben Gittersystems durch eine 1-Parameterschar von Gittern, die dieses System nie verläßt (also ohne Symmetriebruch), verbunden werden können. Vom Standpunkt der affinen Konjugation von Raumgruppen beruht das auf der Beobachtung, daß durch wegweise Verbindung zweier Raumgruppen desselben Typs in einer Wegzusammenhangskomponente des Parameterraumes (des "Modulraumes" des Raumgruppentyps) die zugehörigen Gitter entsprechend deformiert werden. Umgekehrt sind freilich Raumgruppen, deren Gitter ohne Symmetriebruch ineinander deformiert werden können, nicht notwendigerweise affin äquivalent, sondern es entsteht eine neue Äquivalenzbeziehung von (eigentlichen) Raumgruppentypen.

Definition 11:

- a) Zwei Gitter Γ, Γ' desselben Gittersystems, also mit $H_\Gamma = H_{\Gamma'}$ gehören genau dann demselben *Gittertyp_I* an, wenn es eine 1-Parameterschar von Gittern $\{\Gamma(t) | 0 \leq t \leq 1\}$ konstanter Holoedrie gibt, durch die beide miteinander verbunden werden:

$$\Gamma(0) = \Gamma, \quad \Gamma(1) = \Gamma', \quad H_{\Gamma(t)} = H_\Gamma = H_{\Gamma'} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

- b) Zwei Raumgruppentypen \bar{G}, \bar{G}' derselben generischen Gitterholoedrie H , also desselben Bravaisystems, gehören genau dann demselben *Gittertyp_{II}* an, wenn die Gitter Γ, Γ' zweier Repräsentanten G, G' von \bar{G}, \bar{G}' von generischer Gittersymmetrie ($H_\Gamma = H_{\Gamma'} = H$) demselben *Gittertyp_I* angehören.

Es ergibt sich damit

Theorem 4 (Bravais):

Für $n = 2$ gibt es 5, für $n = 3$ gibt es 14 Gittertypen.

Die Gittertypen lassen sich in übersichtlicher Weise durch Angabe von Einheitszellen, die standardisierte Rotationssymmetriebedingungen erfüllen, und die Angabe eventuell vorhandener weiterer Gitterpunkt in der Einheitszelle charakterisieren.

Dabei treten folgende Fälle auf [Burckhardt 1947; Buerger 1963; Schwarzenberger 1980 u.a.] (vgl. Anhang 2, Tab. 10):

- die Einheitszelle wird durch eine Gitterbasis im mathematischen Sinne aufgespannt (symbolisch: P),
- zusätzliche Gitterpunkte liegen lediglich im Schwerpunkt der Zelle (“Innenzentrierung” — Symbol I),
- zusätzliche Gitterpunkte liegen auf den Drittelpunkten einer Raumdiagonalen im trigonalen Fall (“rhomboedrische Zentrierung” — Symbol R),
- zusätzliche Gitterpunkte liegen in den Schwerpunkten von Seitenflächen (“Flächenzentrierung” — Symbole: F bei Zentrierung aller Seitenflächen der Einheitszelle, A, B, C bei Zentrierung eines Paares einander gegenüberliegender Seitenflächen in Achsenrichtung).

1.3 Arithmetische Klassifikation

1.3.1 Arithmetische Charakterisierung von Raumgruppen

Bei einer Gewinnung der Raumgruppen durch Gruppenerweiterungen, die nicht wie etwa bei Jordan, Fedorov und Schoenflies entscheidend auf der geometrischen Konfigurationsanalyse von Symmetrieelementen beruht, ist es sinnvoll, das Translationsgitter $\Gamma < G$ nach einer Basiswahl durch \mathbb{Z}^n zu parametrisieren. Man hat es dann mit der kurzen exakten Sequenz

$$(*) \quad 0 \rightarrow \Gamma \cong \mathbb{Z}^n \rightarrow G \rightarrow B \cong G/\mathbb{Z}^n \rightarrow 1$$

zu tun. Für die Gewinnung von G als Erweiterung ist anzugeben:

- eine Abbildung

$$B \xrightarrow{\tau} \text{Aut}(\Gamma)$$

die hier wegen Kommutativität von Γ sogar schon ein Homomorphismus ist (innere Automorphismen $\text{Int}(\Gamma) = 0$),

- und ein Faktorensystem $f : B \times B \rightarrow \Gamma$, $f(a, b) = f_{a,b}$, bezüglich τ , das die Assoziativitäts- bzw. Kozykelbedingung erfüllt:

$$\delta f_{a,b,c} = \tau(a)f_{b,c} - f_{ab,c} + f_{a,bc} - f_{a,b} = 0,$$

modulo der trivialen Faktorensysteme, die aus injektiven Abbildungen $c : B \rightarrow \Gamma$ durch Korandbildung

$$\delta c_{a,b} = \tau(a)c_b - c_{ab} + c_a$$

entstehen — kurz: ein Element der Gruppenkohomologie $H_\tau^2(B, \mathbb{Z}^n)$ von B mit Werten in \mathbb{Z}^n bezüglich τ .

Da τ von der Konjugation in G induziert und Γ maximal abelsch ist (Lemma 2), ist $\tau : B \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$ ein injektiver Homomorphismus. Daraus folgt

Lemma 4:

G/Γ kann nach Basiswahl in Γ auf natürliche Weise durch eine endliche Untergruppe von $GL(n, \mathbb{Z})$ beschrieben werden. Dem Basiswechsel in Γ korrespondiert Konjugation in $GL(n, \mathbb{Z})$.

Da durch Mittelwertbildung umgekehrt zu jeder endlichen Untergruppe A von $GL(n, \mathbb{Z})$ auf \mathbb{R}^n eine invariante Metrik eingeführt werden kann, entspricht umgekehrt jeder Erweiterung $(*)$ mit $B = A$ eine kristallographische Raumgruppe. Es liegt also nahe, nach dem Vorbild der geometrischen Klassifikation zu vereinbaren

Definition 12:

- a) Die nach Lemma 4 einem kristallographischen Raumgruppentyp G zugeordnete Konjugationsklasse endlicher Untergruppen von $GL(n, \mathbb{Z})$ heiße *unimodularer Anteil* von G , abgekürzt G_u .
- b) Eine Gruppenerweiterung von \mathbb{Z}^n durch eine endliche unimodulare Gruppe (genauer: eine Erweiterungsklasse modulo Korndern) werde im folgenden als *arithmetische Raumgruppenerweiterung* bezeichnet.

Es stellt sich natürlich die Frage, in welcher Beziehung arithmetische Raumgruppenerweiterungen, Isomorphieklassen von Raumgruppen (als abstrakte Gruppen) und kristallographische Raumgruppentypen zueinander stehen. Die Frage nach der ersten Beziehung wird durch Sätze von Frobenius und ein konstruktives Kriterium von Zassenhaus beantwortet. Dabei ist als allgemeines Resultat festzuhalten, daß *einer Isomorphieklassse von Gruppen endlich viele, im allgemeinen mehr als eine, arithmetische Erweiterungsklassen entsprechen*. Der Rest der Frage wird durch ein Ergebnis von Bieberbach beantwortet:

Theorem 5 (Bieberbach):

Zwei arithmetische Raumgruppenerweiterungen führen genau dann zu demselben Raumgruppentyp, wenn sie als Gruppen isomorph sind.

Die arithmetisch-algebraischen Erweiterungen fangen also die grundlegenden Eigenschaften kristallographischer Raumgruppen so gut ein, daß es naheliegt, große Teile der strukturell orientierten Theorie in diesem Rahmen durchzuführen, insbesondere die Klassifikation und die Konstruktion der Gruppen. Mit Mitteln der Gruppenkohomologie läßt sich etwa zeigen, daß für eine endliche Gruppe A und eine endlich erzeugte abelsche Gruppe Γ schon $H^2_\tau(A, \Gamma)$ endlich ist. Daraus folgt dann die Endlichkeitsaussage von Theorem 1a ("Satz von Bieberbach").

1.3.2 Arithmetische und geometrische Kristallklassen

In der arithmetischen Theorie entspricht den Punktsymmetrien der geometrischen Theorie der unimodulare Anteil G_u einer Raumgruppe. Da sich sowohl Basiswechsel als auch affine Konjugation der Gruppe in unimodularer Konjugation von G_u niederschlagen und — wie schon bemerkt — anders als im orthogonalen Fall jede endliche unimodulare Gruppe als G_u einer Raumgruppe auftritt, liegt es nahe anzugeben

Definition 13a:

Die Konjugationsklassen endlicher Untergruppen A von $GL(n, \mathbb{Z})$ heißen *arithmetische Kristallklassen* $_I$.

Ähnlich wie bei der geometrischen Klassifikation kann diese Begriffsbildung natürlich im Sinne der Raumgruppentypen beziehungsweise Erweiterungsklassen extensionalisiert werden.

Definition 13b:

Zwei arithmetische Raumgruppenerweiterungen G_a, G'_a , beziehungsweise die zugehörigen Raumgruppentypen, gehören genau dann derselben *arithmetischen Kristallklasse* $_{II}$ an, wenn deren unimodularen Anteile derselben arithmetischen Kristallklasse $_I$ angehören.

Aufgrund des Theorems 5 ist es glücklicherweise nicht notwendig, die beiden Extensionalisierungsebenen der arithmetischen Erweiterungen und der Raumgruppentypen noch einmal laufend explizit auseinanderzuhalten. Wenn im folgenden von Raumgruppe die Rede ist, kann dafür auch arithmetische Raumgruppenerweiterung (bzw. Isomorphieklasse von ...) eingesetzt werden und umgekehrt.

Es gilt nun

Theorem 6:

Für jedes n gibt es nur endlich viele arithmetische Kristallklassen, und zwar für

$$\begin{array}{rcccl} n = & 2, & 3, & 4 \\ \text{jeweils} & 13, & 73, & 710. \end{array}$$

Die geometrische Interpretation ($n = 3$) führt auf

Lemma 5:

Gehören zwei kristallographische Raumgruppen G, G' derselben arithmetischen Kristallklasse an, so sind sie auch von gleichem Gittertyp und gleicher geometrischer Kristallklasse. Das umgekehrte gilt dagegen nicht immer.

Die arithmetischen Kristallklassen integrieren also die Information über Gittertyp und geometrische Kristallklasse (im Sinne der geometrischen Theorie) und stellen sie in arithmetischer Form dar. Hinzu tritt noch Information über die Art der Operation der geometrischen Kristallklasse auf dem Gitter (geometrisch: die Lage der Symmetrieelemente relativ zum Gitter). Bei der Bildung der geometrischen Kristallklassen wird demgegenüber die Information über das Gitter gewissermaßen “vergessen”. Das “Vergessen” kann im arithmetischen Zugang durch Konjugation der unimodularen Anteile in $GL(n, \mathbb{R})$ bzw. $GL(n, \mathbb{Q})$ so zum Ausdruck gebracht werden, wie es in der folgenden Definition festgehalten ist.

Definition 5c/d:

Zwei arithmetische Kristallklassen I/II gehören genau dann zu derselben *geometrischen Kristallklasse* III/IV , wenn sie (bzw. ihre unimodularen Anteile) unter Konjugation in $GL(n, \mathbb{R})$ äquivalent sind.

Erfreulicherweise sind die Konzepte “geometrische Kristallklasse III/IV ” koextensional, während sich “geometrische Kristallklassen I/III ” auf endliche orthogonale bzw. unimodulare Gruppen (oder genauer deren jeweilige Konjugationsklassen in der “Muttergruppe”) beziehen. Wir haben es also vom extensionalen Standpunkt nicht mit vier, sondern nur mit drei sich gegenseitig ergänzenden Begriffsvarianten zu tun. Während die moderne mathematisch-kristallographische Literatur bevorzugt die Varianten III/IV verwendet, taucht in unserer historischen Darstellung — wie bei den Autoren des 19. Jahrhunderts — zu Anfang lediglich die Variante I, ab §4 auch die Variante II auf.

1.3.3 Bravaischaren, Kristallfamilien, Bravaisysteme, Kristallsysteme

Analog der Auszeichnung der Holoedrien der geometrischen Theorie lassen sich auch in der arithmetischen Theorie maximale Gittersymmetrien auszeichnen. Dazu betrachtet man die Darstellungen von Gitterholoedrien H_Γ in $\text{Aut}(\Gamma)$. So ergibt sich

Definition 14:

Eine arithmetische Kristallklasse I heißt genau dann *unimodulare beziehungsweise arithmetische Holoedrie* (in der Literatur “*Bravais-Klasse*” [Wondratschek 1983; Brown e.a. 1978]), wenn sie von der Darstellung einer geometrischen (orthogonalen) Holoedrie (Def. 7a) auf einem zugehörigen Gitter induziert wird.

Analog der Einteilung der Kristallklassen in Kristallsysteme im Rahmen der geometrischen Theorie kann man nun durch die Auszeichnung der arithmetischen Holoedrien in der Menge der arithmetischen Kristallklassen diese in Abschnitte einteilen, die man entsprechend wohl 'am besten als "arithmetische Kristallsysteme" bezeichnen sollte. Das ist in der Literatur allerdings nicht üblich; stattdessen ist von "Bravaischaren" die Rede, obwohl Bravais natürlich keine arithmetischen Kristallklassen sondern nur Gittertypen_I kannte, diese allerdings in der Tat durch (Deformations-)Scharen charakterisierte — vgl. §3).

Definition 11c:

Zwei arithmetische Kristallklassen A, A' gehören genau dann derselben *Bravaischar*_I (oder auch demselben *arithmetischen Kristallsystem*_I) an, wenn es eine arithmetische Holoedrie (Bravaisklasse) gibt, die der Kardinalität nach kleinste arithmetische Holoedrie sowohl über A als auch über A' ist.

Diese Definition läßt sich in der bekannten Weise auf die Raumgruppen übertragen (*Bravaischaren*_{II} bzw. *arithmetische Kristallsysteme*_{II}). Dabei stellt sich heraus, daß die Konzepte *Gittertyp*_{II} und *Bravaischar*_{II} in den Dimensionen $n = 2, 3$ koextensional sind. Das könnte für allgemeines n auch gelten; ein Beweis ist mir dafür aber nicht bekannt. *Terminologisch* bleibt die etwas verwirrende Situation, daß in der Literatur "*Bravaischar*" ein Konzept der arithmetischen Theorie bezeichnet, das dem der Kristallsysteme in der geometrischen Theorie parallel gebildet, aber wegen der Unterschiede zwischen arithmetischen und geometrischen Kristallklassen natürlich diesem keineswegs äquivalent ist. Ob die von Bravais eingeführte, für $n = 2, 3$ extensional äquivalente Einteilung der geometrischen Theorie sich auch für allgemeine n als äquivalent erweist, ist mir unbekannt. Solange das unklar ist, erscheint eine terminologische Trennung wohl als angebracht ("*Bravaischar*"–"*Gittertyp*").

Vom Standpunkt der arithmetischen Theorie ist die Einteilung in Bravaisysteme und Kristallsysteme weniger natürlich als die in Kristallfamilien, als der kleinsten gemeinsamen Vergrößerung der Einteilung in Bravaischaren und geometrische Kristallklassen. Folgen wir hier also einer anderen Reihenfolge als im vorangegangenen Abschnitt.

Definition 10c:

*Kristallfamilien*_{III/IV} sind die kleinsten Vereinigungsmengen arithmetischer Kristallklassen_{I/II}, für die gilt:

- mit der arithmetischen Kristallklasse A geht auch jedes A' derselben Bravaischar wie A in die Vereinigung ein,
- mit A geht auch jedes A' derselben geometrischen Kristallklasse in die Vereinigung ein.

Kristallsysteme und Bravaisysteme beruhen dagegen auf den komplementären Betrachtungen von

Definition 8c:

Kristallsysteme_{IV} entstehen durch Vereinigung genau derjenigen geometrischen Kristallklassen_{IV} \bar{G}, \bar{G}', \dots , für die die enthaltenen Raumgruppen bzw. arithmetischen Raumgruppenerweiterungen genau dieselben Mengen von Bravaischaren treffen im Sinne von:

$$\begin{aligned} & \{\text{arithmetische Holoedrie von } G | G \in \bar{G}\} \\ & = \{\text{arithmetische Holoedrie von } G' | G' \in \bar{G}'\}. \end{aligned}$$

Definition 9c:

Bravaisysteme_{IV} entstehen durch Vereinigung genau derjenigen Bravaischaren_{II} \bar{G}, \bar{G}', \dots , für die die enthaltenen Raumgruppen bzw. arithmetischen Raumgruppenerweiterungen genau dieselben geometrischen Kristallklassen_{III} treffen:

$$\begin{aligned} & \{\text{geometrische Kr.klasse}_{III} \text{ von } G | G \in \bar{G}\} \\ & = \{\text{geometrische Kr.klasse}_{III} \text{ von } G' | G' \in \bar{G}'\}. \end{aligned}$$

Auch hier wieder sind bei $n = 2, 3$ die Kristallsysteme_{II/IV} sowie die Bravaisysteme_{II/IV} jeweils unter sich ($II \leftrightarrow IV$) koextensional. Für höhere Dimensionen sollte das auch gelten. Die arithmetische Definition dieser Konzepte hat den Vorteil, mit rein algebraischen Mitteln, d.h. insbesondere ohne das genannte Generizitätsargument auszukommen; dafür ist sie technischer und weniger intuitiv.

1.4 Geometrische Erweiterungen

Natürlich haben die skizzierten Klassifikationsbemühungen nicht primär den Zweck, gewissermaßen aus einem musealen Motiv heraus, ein statisches Ordnungsschema für das Universum der kristallographischen Raumgruppen zu formulieren; vielmehr schaffen sie Voraussetzungen für die systematische Konstruktion aller Raumgruppen zumindest der niedrigen Dimensionen (bisher für $n \leq 4$). Darüberhinaus liefern sie Aspekte, die zum Verständnis und für einen umsichtigen Einsatz konkreter Raumgruppenstrukturen, etwa in der Kristallographie und Festkörperphysik, hilfreich sind. Hier kommt nur der erste Aspekt (Verständnis und mathematische Konstruktion) zur Sprache. Wir wollen uns in diesem letzten Abschnitt des Überblicks über die Raumgruppen auf einige grundlegende Aspekte der geometrischen Erweiterungen beschränken, die — natürlich auf anderem theoretischem Hintergrund — in dem in diesem Buch betrachteten Zeitraum allein auftraten.

Definition 15:

- a) Eine Erweiterung eines bis auf den Gittertyp_I bestimmten Gitters Γ im \mathbb{E}^n durch eine endliche orthogonale Gruppe, genauer einer geometrischen Kristallklasse_I K , zu einer kristallographischen Raumgruppe $G < \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$
- (**) $0 \rightarrow \Gamma \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$ mit Erweiterungshomomorphismus $\tau : K \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$ und Faktorensystem $f : K \times K \rightarrow \Gamma$
- heiße genau dann *geometrische Raumgruppenerweiterung*, wenn τ von der Konjugation in $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ induziert ist.
- b) Kristallographische Raumgruppen, die als semidirektes Produkt, also mit trivialem Faktorensystem nach a) dargestellt werden können, heißen *symmorphe Raumgruppen*.

Offensichtlich kann jede kristallographische Raumgruppe (beziehungsweise jeder Raumgruppentyp) als eine geometrische Raumgruppenerweiterung in diesem Sinne dargestellt werden. Auf der anderen Seite gestattet diese Sichtweise auch im Rahmen der geometrischen Theorie einen konstruktiven Zugang zu den Raumgruppen. Zunächst einmal bringen die Bedingungen von Def. 15a starke Einschränkungen für die Kombinationsmöglichkeiten von Gitter und Kristallklasse mit sich, da wegen der Maximalität von Γ als abelscher Untergruppe τ injektiv und deswegen K ebenso wie deren Holoedrie H_K in der Holoedrie H_Γ des Gitters enthalten sein muß. Ist H_K in H_Γ echt enthalten, so hat das Gitter *in den "meisten" Fällen eine Scheinsymmetrie* im Vergleich zur entstehenden Raumgruppenstruktur G , nämlich dann, wenn sich Γ stetig so in ein Gitter Γ' deformieren läßt, daß dabei nie die Symmetrie H_K gebrochen (unterschritten) wird. Man erhält dann denselben Raumgruppentyp durch eine geometrische Raumgruppenerweiterung des Gitters Γ' durch K .

Warnung: In speziellen Fällen (Minimalsymmetrie von Γ enthalten in H_K ; vgl. p. 86) kann H_K in H_Γ echt enthalten sein, ohne daß sich die Gittersymmetrie in der genannten Weise reduzieren ließe.

Fassen wir das zusammen zu

Lemma 6:

- a) Für die Existenz einer geometrischen Raumgruppenerweiterung vom Typ (**) ist notwendig, daß $H_K \leq H_\Gamma$ gilt.
- b) Ist H_K echt in H_Γ enthalten und Γ durch eine 1-Parameterschar von Gittern so in ein Gitter Γ' der Holoedrie $H_{\Gamma'} = H_K$ (oder zumindest echt kleiner H_Γ) deformierbar, $\Gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\Gamma(0) = \Gamma$, $\Gamma(1) = \Gamma'$, ohne daß dabei die Symmetrie unter die der Kristallklasse gebrochen wird, sondern

stets $H_K \leq H_{\Gamma(t)}$ ($0 \leq t \leq 1$) gilt, so sind die in naheliegender Weise "mitgenommenen" Erweiterungen vom Typ (**) affin äquivalent; Γ hat in diesem Sinne bezüglich der Erweiterung (**) eine Scheinsymmetrie.

- c) In der Dimension $n = 3$ tritt mit Ausnahme der Konstellation $H_K = D_{3d}$, $H_\Gamma = D_{6h}$ bei allen sonstigen echten Inklusionen der beteiligten Holoedrien die Situation b) ein.

Wir beschränken uns im folgenden ganz auf den Fall $n = 3$. Dann sind zur Gewinnung sämtlicher affiner Raumgruppentypen alle geometrischen Raumgruppenerweiterungen zu Tripeln

$$(\Gamma, K, \tau) \text{ mit } H_K = H_\Gamma \text{ oder } H_K = D_{3d}, H_\Gamma = D_{6h}$$

und $\tau : K \rightarrow \text{Aut}\Gamma$ (bis auf Konjugation in $\text{Aut}\Gamma$) zu betrachten. Diese Tripel korrespondieren nun durch die von τ induzierte unimodulare Darstellung von K in natürlicher Weise den arithmetischen Kristallklassen, und dies sogar bijektiv. Es gilt nämlich

Theorem 7:

- a) Um sämtliche kristallographischen Raumgruppentypen der Dimension 3 durch geometrische Erweiterungen (**) zu gewinnen, reicht es aus, alle Tripel (Γ, K, τ) folgender Art zu betrachten:
- Γ Repräsentant eines Gittertyps $_I$,
 - K Repräsentant einer geometrischen Kristallklasse $_I$,
 - $H_K = H_\Gamma$ oder $H_K = D_{3d}$, $H_\Gamma = D_{6h}$.
 - τ bis auf Konjugation in $\text{Aut}\Gamma$ bestimmte und von Konjugation in $\text{Isom}(\mathbb{E}^3)$ induzierte Darstellung $K \leftrightarrow \text{Aut}\Gamma$.

Diese entsprechen bijektiv den arithmetischen Kristallklassen.

- b) Jede arithmetische Kristallklasse führt auf eine endliche Anzahl geometrischer Erweiterungsklassen, die durch $H^2(K, \Gamma)$ parametrisiert werden. Insbesondere gibt es zu jeder arithmetischen Kristallklasse genau eine symmorphie Raumgruppe.

Es bleibt also zu untersuchen, welche verschränkten Produkte zu einer vorgegebenen arithmetischen Kristallklasse gebildet werden können. Dazu sei zunächst ein Repräsentantensystem $r(K)$ in $\rho^{-1}(K)$ gewählt, also $r(a) = (t_\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 * O(3, \mathbb{R})$ für jedes $a \in K$. Dann gilt für beliebige $t \in \Gamma$

$$\tau(a)t = (t_\alpha, \alpha)(t, 1)(-t_\alpha, \alpha^{-1}) = (t_\alpha + \alpha(t - t_\alpha), 1) \in \Gamma,$$

das heißt, t_α muß “modulo Γ ” ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 sein. Demnach gilt in G/Γ

$$a^2 \equiv (t_\alpha, \alpha)^2 \equiv (t_\alpha + \alpha t_\alpha, \alpha^2) \equiv (2t_\alpha, \alpha^2) \pmod{\Gamma}$$

und induktiv

$$a^k \equiv ((k-1)t_\alpha, \alpha^{k-1})(t_\alpha, \alpha) \equiv (kt_\alpha, \alpha^k).$$

Für $m = \text{ord}(\alpha)$ ist

$$a^m \equiv (mt_\alpha, 1) \equiv 0 \pmod{\Gamma}, \quad \text{also } mt_\alpha \in \Gamma.$$

Bezeichnen wir mit Γ' das unterteilte Gitter

$$\Gamma' = \frac{1}{|K|} \Gamma = \{t \in \mathbb{R}^3 \mid |K|t \in \Gamma\}$$

so gilt also $t_\alpha \in \Gamma'$ für alle $\alpha \in K$.

Das Faktorensystem der Erweiterung (**) läßt sich nun wie üblich aus den Translationsanteilen zweier Repräsentanten $a = (t_\alpha, \alpha)$, $b = (t_\beta, \beta)$ von $\rho^{-1}(K)$ berechnen:

$$(t_\alpha, \alpha)(t_\beta, \beta)(-t_{\alpha\beta}, (\alpha\beta)^{-1}) = (t_\alpha + \alpha(t_\beta - \beta t_{\alpha\beta}), 1) \in \Gamma.$$

Also wegen $\alpha\beta t_{\alpha\beta} \equiv t_{\alpha\beta} \pmod{\Gamma}$

$$f_{\alpha,\beta} := t_\alpha + \alpha t_\beta - t_{\alpha\beta} \in \Gamma.$$

Der erste Teil dieser Aussage läßt sich als Korandbedingung im Sinne der Gruppenkohomologie auffassen,

$$f_{\alpha,\beta} = \delta t_{\alpha,\beta},$$

der zweite als

$$t_\alpha + \alpha t_\beta - t_{\alpha\beta} \equiv 0 \pmod{\Gamma}$$

(“Frobeniussche Kongruenz”). Im Sinne der Gruppenkohomologie ist dies wiederum als Kozykelbedingung lesbar, nämlich als

$$\delta t \equiv 0 \pmod{\Gamma}.$$

Das heißt, t ist selber Kozykel in Γ'/Γ

$$t \in Z^1(K, \Gamma'/\Gamma).$$

Es gilt also

Lemma 7:

- a) Das Faktorensystem f einer geometrischen Raumgruppenerweiterung ist Korand eines Systems von Translationsanteilen zu den Elementen der erweiternden Kristallklasse:

$$f_{\alpha,\beta} = t_\alpha + \alpha t_\beta - t_{\alpha\beta} = \delta t_{\alpha,\beta}, \quad \alpha, \beta \in K.$$

- b) Dabei nimmt t Werte in

$$\Gamma' = \frac{1}{|K|} \Gamma$$

an und erfüllt die Frobeniussche Kongruenz

$$t_\alpha + \alpha t_\beta - t_{\alpha\beta} = \delta t_{\alpha,\beta} \equiv 0 \pmod{\Gamma} \text{ für alle } \alpha, \beta \in K.$$

In anderen Worten, die Translationsanteile bilden selber einen Korand $t \in Z^1(K, \Gamma'/\Gamma)$.

Umgekehrt definiert jedes System von Translationsanteilen, das die Frobeniussche Kongruenz erfüllt, schon eine verschränkte Erweiterung; denn die Korandbedingung für f folgt dann aus

$$\delta f = \delta \delta t = 0.$$

Damit erhalten wir

Theorem 8:

Zu jedem Satz von Translationsanteilen t zu den Elementen einer Kristallklasse K , der den Bedingungen von Lemma 7 genügt,

- (i) $t : K \longrightarrow \Gamma' = \frac{1}{|K|} \Gamma,$
(ii) $\delta t \equiv 0 \pmod{\Gamma},$

gibt es eine durch das Faktorensystem $f = \delta t$ eindeutig bestimmte geometrische Raumgruppenerweiterung. Umgekehrt führt jede Erweiterung auf einen solchen Satz von Translationsanteilen.

Betrachten wir nun den Translationsanteil t_α eines Elementes $a \in K$, so können zwei Fälle eintreten.

1. Fall: t_α ist Eigenvektor zum Eigenwert 1, $(1 - \alpha)t_\alpha = 0$.

Dann ist $a = (t_\alpha, \alpha)$ *zentrierte Schraubenbewegung*, mit Achse durch den Ursprung.

2. Fall: $(1 - \alpha)t_\alpha \in \Gamma \setminus \{0\}$

In diesem Fall werde t_α in $t_\alpha = s_\alpha + w_\alpha$ mit $s_\alpha \in \text{Fix}(\alpha) := \{x | \alpha x = x\}$, $w_\alpha \perp \text{Fix}(\alpha)$ zerlegt. $r(a)$ ist dann eine *Schraubenbewegung* beziehungsweise *Schubspiegelung* jeweils mit *Schubanteil* s_α , deren Achse beziehungsweise Ebene um d_α mit $(1 - \alpha)d_\alpha = w_\alpha$ aus dem Ursprung herausgeschoben (*dezentriert*) ist:

$$\begin{aligned}(t_\alpha, \alpha) &= (d_\alpha, 1)(s_\alpha, \alpha)(-d_\alpha, 1) = (s_\alpha + (1 - \alpha)d_\alpha, \alpha), \\ \alpha(s_\alpha) &= s_\alpha.\end{aligned}$$

Offenbar gilt dann:

$$\begin{aligned}(t_\alpha, \alpha)^2 &= (s_\alpha + (1 - \alpha)d_\alpha, \alpha)^2 = (2s_\alpha + (1 - \alpha^2)d_\alpha, \alpha^2), \\ (t_\alpha, \alpha)^k &= (ks_\alpha + (1 - \alpha^k)d_\alpha, \alpha^k).\end{aligned}$$

Für $m = \text{ord}(\alpha)$ folgt dann $(t_\alpha, \alpha)^m = (ms_\alpha, 1)$, also schon $ms_\alpha \in \Gamma$. Der Schubanteil von α ist also selber m -ter Teil einer Gittertranslation. Auch ist stets möglich, den Schubanteil s_α und den Dezentrierungsanteil d_α des Repräsentanten $r(a)$ in einer ausgezeichneten Elementarzelle zu wählen. Dann werden wir (in Anlehnung an Schoenflies' "reduzierte Operation") von einem *reduzierten Repräsentanten* sprechen.

Die Bedingungen (i) und (ii) von Theorem 8 stecken nach Vorgabe einer geometrischen Realisierung (Γ, K) einer arithmetischen Kristallklasse den Rahmen für eine effektive Berechnung der möglichen Systeme von Translationsanteilen ab. In Verbindung mit der Beobachtung über reduzierte Repräsentanten und die Teilungsbedingung der Schubanteile ($\text{ord}\alpha s_\alpha \in \Gamma$) ist ein Verfahren in seinen theoretischen Grundlagen skizziert, durch das zumindest für die Dimensionen $n \leq 3$ alle kristallographischen Raumgruppentypen aufgestellt werden können. Es ist darüberhinaus als Hintergrund zum Verständnis der Arbeiten von Jordan und Schoenflies (§§4, 5) nützlich, obwohl diese natürlich noch nicht auf die allgemeine Erweiterungstheorie von Gruppen zurückgreifen konnten. Nebenbei bemerkt, genügt es offensichtlich zur Beschreibung einer Raumgruppe als geometrische Erweiterung nach Theorem 8, die Translationsanteile der reduzierten Repräsentanten zu *Erzeugenden* von K anzugeben. So gingen Jordan und Schoenflies in der Tat auch vor.

In der kristallographischen Literatur ist eine graphische Darstellung der Translationsanteile (getrennt nach Information über Schub und Dezentrierung) *sämtlicher Elemente aus G* üblich, deren invariante Untermannigfaltigkeiten (Punkte, Achse oder Ebenen) eine Einheitszelle schneiden. Das geschieht durch *Symmetriekarten* der Lage und Art von Symmetrielementen, für die eine komprimierte und intuitiv einleuchtende graphische Symbolik entwickelt wurde (siehe dazu etwa [Buerger 1963; Hahn 1983] u.a.).

Anhang 2: Tabellen und Figuren für $n = 3$

- Vergleichstabelle Schoenflies-Notation und internationale kristallographische Notation der Kristallklassen (Tabelle 9)
- Symmetriekarten der 32 geometrischen Kristallklassen (Figur 15)
- Raumgittersysteme und Raumgittertypen (Tabelle 10)
- Liste der 73 symmorphen Raumgruppen (Bravais'sche Gruppen) in semi-direkter Produktdarstellung, internationaler Notation, Schoenflies- und Fedorov-Notation (Tabelle 11)

Bemerkungen zu Tabelle 9 und Figur 15

Bei der internationalen kristallographischen Notation wird ein Satz nicht-konjugierter Symmetrieelemente einer endlichen orthogonalen Gruppe angegeben. Dabei bedeuten:

p p -zählige Rotationsachse,

$\frac{p}{m}$ p -zählige Rotationsachse mit orthogonaler Spiegelungsebe,

\bar{p} p -zählige Rotationsachse und Inversionszentrum auf der Achse.

Achtung: Es gilt beim Notationsvergleich Schoenflies — internationale Notation zwar $C_p = p$, aber in der Regel $\bar{C}_p \neq \bar{p}$

Bei den *Symmetriekarten* der Kristallklassen werden sämtliche Symmetrieelemente in ihrer relativen Lage graphisch repräsentiert. Eine Legende erübrigt sich wohl; sie ist dem Vergleich der Figuren direkt zu entnehmen.

Tabelle 9
Schoenflies-Notation und internationale
kristallographische Notation der Kristallklassen

Kristallsystem	Isometrisch/ Schoenflies	Regulär/ International	Sphäroedrisch/ T_d	Kubisch/ T_h	O/ O	Kubisch/ T
Schoenflies International	O^* $\frac{4}{m} \frac{3}{m} \frac{2}{m}$	$\bar{4}3m$	$\bar{4}3m$	$\frac{2}{m} \frac{3}{m}$	432	23

Kristallsystem	Hexagonal						Trigonal/Rhomboedrisch					
Schoenflies International	D_{6h} $\frac{6}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m}$	D_6 622	D_{3h} $\bar{6}m2/\bar{6}2m$	C_{6v} 6mm	C_{6h} $\frac{6}{m}$	C_{3h} 6	C_6 6	D_{3d} $\frac{3}{m} \frac{2}{m}$	D_3 32	C_{3v} 3m	$\bar{C}_6 = S_6 = C_3$ $\frac{3}{m}$	C_3 3

Kristallsystem	Tetragonal						
Schoenflies International	D_{4h} $\frac{4}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m}$	D_{2d} $\bar{4}2m/\bar{4}m2$	D_4 422	C_{4v} 4mm	C_{4h} $\frac{4}{m}$	$\bar{C}_4 = S_4$ $\frac{4}{m}$	C_4 4

Kristallsystem	Orthorhombisch		Monoklin		Triklin		
Schoenflies International	D_{2h} $\frac{2}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m}$	D_2 222	C_{2h} $\frac{2}{m}$	$\bar{C}_1 = C_s$ m	C_2 2	$\bar{C}_2 = S_2 = C_i$ 1	C_1 1

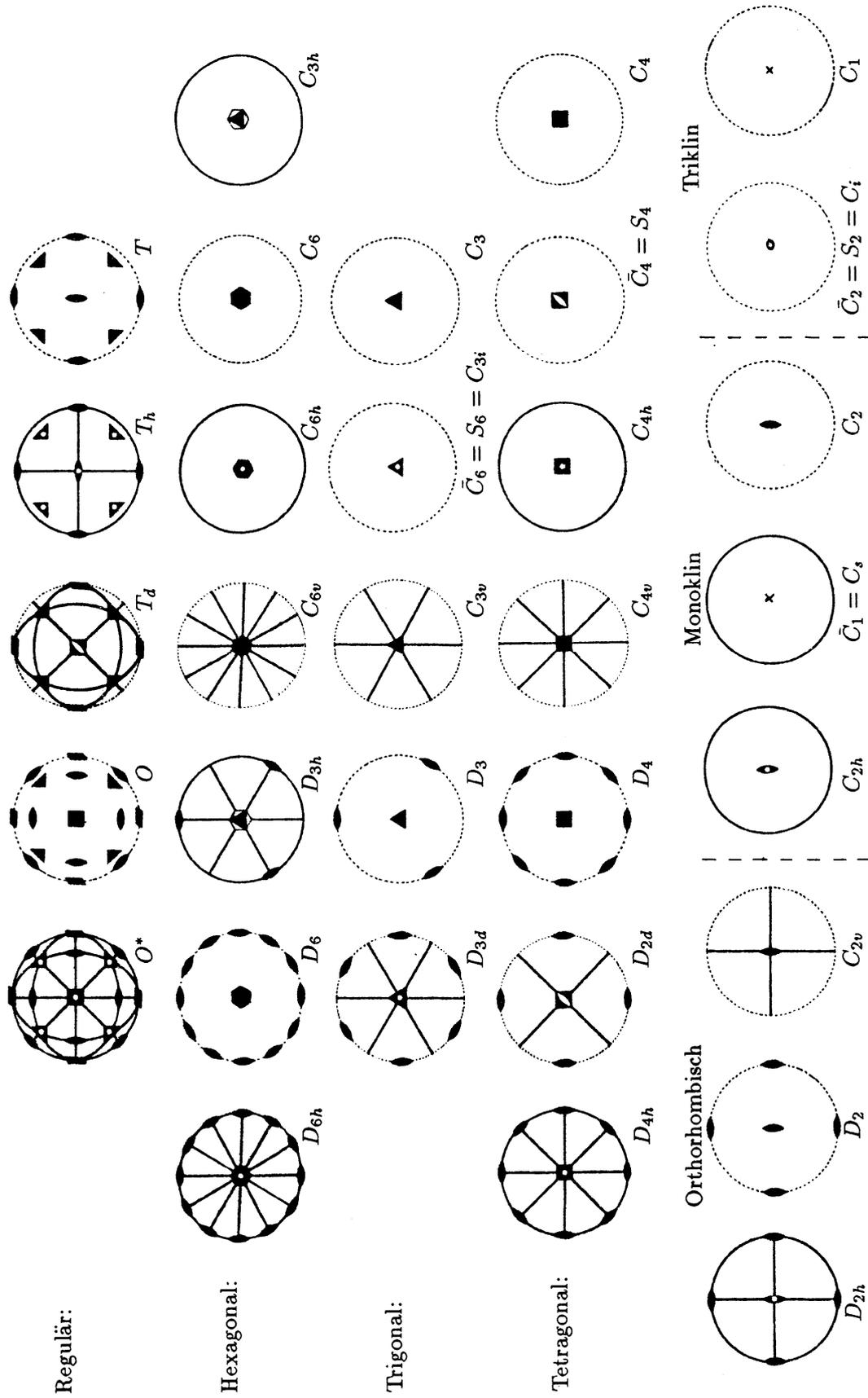


Fig. 15 Symmetriekarten der 32 geometrischen Kristallklassen

Bemerkungen zur Liste der Raumgittersysteme und -typen

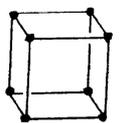
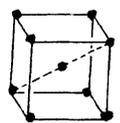
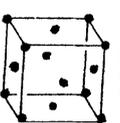
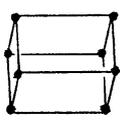
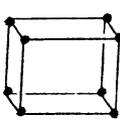
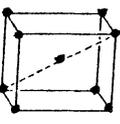
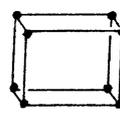
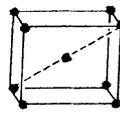
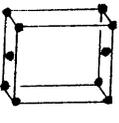
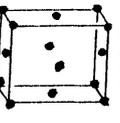
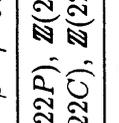
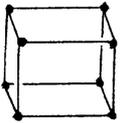
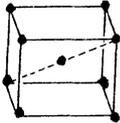
In der kristallographischen Literatur ist es üblich, ein Raumgitter durch Angabe einer parallelepipedischen "*Einheitszelle*" zu charakterisieren, die eine kristallographische Gitterbasis (vergleiche Anhang 1.1) enthält. Gitterelemente werden graphisch durch fette Punkte (eventuell auch auf Seitenflächen oder im Innern der Zelle) repräsentiert.

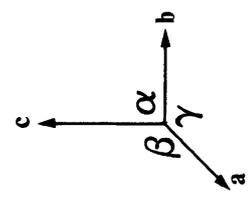
Es ist dabei stets möglich, die Einheitszelle auf eine von 5 Arten zu standardisieren, die durch die Symbole P , I , C (bzw. A , B), F , R gekennzeichnet werden:

- P Parallelepiped, Gitterpunkte genau auf den Ecken;
- I innenzentriertes Parallelepiped, Gitterpunkte außer auf den Ecken im Zentrum des Parallelepipeds;
- C Gitterpunkte außer auf den Ecken in den Mittelpunkten der beiden Seiten transversal zur Achsenrichtung des Parameters c (analog — in einigen Fällen austauschbar — A , B bei Mittenzentrierung der beiden Seiten transversal zur Achsenrichtung von a bzw. b);
- F seitenzentriertes Parallelepiped mit Gitterpunkten außer auf den Ecken auf sämtlichen Seitenmitten ("face");
- R gerade rhombische Säule mit 60° – 120° Rhombus als Basisfläche und Gitterpunkten außer auf den Ecken in den Drittelpunkten einer Raumdiagonale.

Eine weitere Spezifizierung der Einheitszellen erfolgt durch Voranstellung des Symbols der Minimalsymmetrie, die für das zugehörige Gittersystem charakteristisch ist, in Schoenfliescher oder internationaler Notation. Beispiel: $TP = 23P$ für die kubische Zelle, $C_3P = 3P$ für die Zelle eines hexagonalen Gitters usw. — Üblich ist die Verwendung der internationalen kristallographischen Notation.

Tabelle 10. · Raumgittersysteme und Raumgittertypen

Gittersystem	Kubisch/ Isometrisch	Hexagonal	Trigonal	Tetragonal	Orthorhombisch	Monoklin	Triklin
Einheitszelle	23P	3P	3R	4P	222P	2P	1P
Zellentypen	 23P  23P  23I  23F $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	 3P  3R $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$	 4P  4P  4I $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	 222P  222P  222I  222C  222F $a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	 2P  2P  2I $a \neq b \neq c$ $90^\circ = \alpha = \beta \neq \gamma$	 1P $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	
Raumgittertypen	$\mathbb{Z}(23P), \mathbb{Z}(23I)$ $\mathbb{Z}(23F)$	$\mathbb{Z}(3P)$	$\mathbb{Z}(3R)$	$\mathbb{Z}(4P), \mathbb{Z}(4I)$	$\mathbb{Z}(222P), \mathbb{Z}(222I)$ $\mathbb{Z}(222C), \mathbb{Z}(222F)$	$\mathbb{Z}(2P),$ $\mathbb{Z}(2I) = \mathbb{Z}(2B)$	$\mathbb{Z}(P)$
Gitterholoedrie	O^*	D_{6h}	D_{3d}	D_{4h}	D_{2h}	C_{2h}	$\bar{C}_2 = C_i$
Minimalsymm.	$T = 23$	$C_3 = 3$	$C_3 = 3$	$C_4 = 4$	$D_2 = 222$	$C_2 = 2$	$C_1 = 1$



Bemerkungen zur Liste der symmorphen Raumgruppen

Wir erhalten nach Anhang 1.4, Lemma 6, die symmorphen Raumgruppen aus der Kombination der geometrischen Kristallklassen K von Tabelle 9 mit denjenigen Gittern Γ aus Tabelle 10, für die gilt:

$$\text{Holoedrie}(K) = \text{Holoedrie}(\Gamma)$$

oder:

$$\text{Holoedrie}(K) = D_{3d}, \text{ Holoedrie}(\Gamma) = D_{6h}.$$

Bis auf die Abweichung im hexagonal/trigonalen Fall sind also gerade die Kristallklassen eines Kristallsystems mit sämtlichen Raumgittertypen des gleichnamigen Gittersystems zu kombinieren. Es zeigt sich dabei, daß bei den 66 auftretenden Kombinationen bis auf 7 Fälle die Operation der Kristallklasse K auf Γ in genau einer Weise möglich und damit ein semidirektes Produkt $\Gamma * K$ durch Angabe des Paares (Γ, K) eindeutig ausgezeichnet ist.

In den restlichen Fällen gibt es jeweils genau zwei semidirekte geometrische Erweiterungen im Sinne von Anhang 1.4, Definition 15. Bei sechsen dieser 7 Fälle, nämlich den Kombinationen von $K = D_{3h}, D_{3d}, D_3, C_{3v}$ jeweils mit $\Gamma = \mathbb{Z}(3P)$ und von $K = D_{2d}$ mit $\Gamma = \mathbb{Z}(4P), \mathbb{Z}(4I)$ operiert K auf Γ dadurch auf zwei wesentlich verschiedene Weisen, daß die Diederachsen beziehungsweise die Spiegelungsebenen (bei C_{3v}) durch die Basiskanten oder die Diagonale des Grundparallelogramms der Einheitszelle laufen können. Die jeweilige Auswahl legt die Operation von K auf Γ fest. Wir notieren abkürzend jeweils das semidirekte Produkt durch $\Gamma *_k K$ beziehungsweise $\Gamma *_d K$. Im letzten der 7 Fälle, der Operation von C_{2v} auf $\mathbb{Z}(222C) = \mathbb{Z}(222A) = \mathbb{Z}(222B)$, sind zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten dadurch gegeben, daß Spiegelungsebenen durch das Paar zentrierter Seitenflächen der Einheitszelle (hier ein Quader) gehen oder nicht. Es ergeben sich dann die beiden symmorphen Gruppen $\mathbb{Z}(222A) * C_{2v} = \mathbb{Z}(222B) * C_{2v}$ und $\mathbb{Z}(222C) * C_{2v}$.

Tabelle 11

Bravais'sche (symmorph) Gruppen in semidirekter Produktdarstellung,
internationale Symbolik, Schoenflies und Fedorov- Notation

Kristallfamilie	Semidirekt	International		Schoenflies	Fedorov	
		voll	kurz			
Regulär/ Isometrisch/ Kubisch/ Späro- edrisch	$\mathbb{Z}(23P) * O^*$	$P\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$	$Pm3m$	O_h^1	71s	
	$\mathbb{Z}(23I) * O^*$	$I\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$	$Im3m$	O_h^9	72s	
	$\mathbb{Z}(23F) * O^*$	$F\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$	$Fm3m$	O_h^5	73s	
	$\mathbb{Z}(23P) * T_d$	$P43m$		T_d^1	65s	
	$\mathbb{Z}(23I) * T_d$	$I\bar{4}3m$		T_d^3	66s	
	$\mathbb{Z}(23F) * T_d$	$F\bar{4}3m$		T_d^2	67s	
	$\mathbb{Z}(23P) * T_h$	$P\frac{2}{m}$	$Pm3$	T_h^1	62s	
	$\mathbb{Z}(23I) * T_h$	$I\frac{2}{m}\bar{3}$	$Im3$	T_h^5	63s	
	$\mathbb{Z}(23F) * T_h$	$F\frac{2}{m}\bar{3}$	$Fm3$	T_h^3	64s	
	$\mathbb{Z}(23P) * O$	$P432$		O^1	68s	
	$\mathbb{Z}(23I) * O$	$I432$		O^5	69s	
	$\mathbb{Z}(23F) * O$	$F432$		O^3	70s	
	$\mathbb{Z}(23P) * T$	$P23$		T^1	59s	
	$\mathbb{Z}(23I) * T$	$I23$		T^3	60s	
	$\mathbb{Z}(23F) * T$	$F23$		T^2	61s	
	Trigonal	$\mathbb{Z}(3P) * D_{6h}$	$P\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$P\frac{6}{m}mm$	D_{6h}^1	58s
		$\mathbb{Z}(3P) * D_6$	$P622$		D_6^1	54s
$\mathbb{Z}(3P) * _d D_{3h}$		$P\bar{6}m2$		D_{3h}^1	48s	
$\mathbb{Z}(3P) * _k D_{3h}$		$P\bar{6}2m$		D_{3h}^3	47s	
$\mathbb{Z}(3P) * C_{6v}$		$P6mm$		C_{6v}^1	50s	
$\mathbb{Z}(3P) * C_{6h}$		$P\frac{6}{m}$		C_{6h}^1	53s	
$\mathbb{Z}(3P) * C_6$		$P6$		C_6^1	49s	
$\mathbb{Z}(3P) * C_{3h}$		$P\bar{6}$		C_{3h}^1	43s	
$\mathbb{Z}(3P) * _d D_{3d}$		$P\bar{3}\frac{2}{m}1$	$P\bar{3}m1$	D_{3d}^3	55s	
$\mathbb{Z}(3P) * _k D_{3d}$		$P\bar{3}1\frac{2}{m}$	$P\bar{3}1m$	D_{3d}^1	56s	
$\mathbb{Z}(3P) * _d D_3$		$P312$		D_3^1	45s	
$\mathbb{Z}(3P) * _k D_3$		$P321$		D_3^2	44s	
$\mathbb{Z}(3P) * _d C_{3v}$		$P3m1$		C_{3v}^1	40s	
$\mathbb{Z}(3P) * _k C_{3v}$		$P31m$		C_{3v}^2	41s	
$\mathbb{Z}(3P) * \bar{C}_6$		$P\bar{3}$		C_{3i}^1	51s	
$\mathbb{Z}(3P) * C_3$		$P3$		C_3^1	38s	
$\mathbb{Z}(3R) * D_{3d}$		$R\bar{3}\frac{2}{m}$	$R\bar{3}m$	D_{3d}^5	57s	
$\mathbb{Z}(3R) * D_3$		$R32$		D_3^7	46s	
$\mathbb{Z}(3R) * C_{3v}$		$R3m$		C_{3v}^5	42s	
$\mathbb{Z}(3R) * \bar{C}_6$		$R\bar{3}$		C_{3i}^2	52s	
$\mathbb{Z}(3R) * C_3$		$R3$		C_3^4	39s	

Kristallfamilie	Semidirekt	International voll kurz	Schoenflies	Fedorov
Tetragonal	$\mathbb{Z}(4P) * D_{4h}$	$P\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m} P\frac{4}{m}mm$	D_{4h}^1	36s
	$\mathbb{Z}(4P) * _d D_{2d}$	$P\bar{4}2m$	D_{2d}^1	32s
	$\mathbb{Z}(4p) * _k D_{2d}$	$P\bar{4}m2$	D_{2d}^5	33s
	$\mathbb{Z}(4P) * D_4$	$P422$	D_4^1	30s
	$\mathbb{Z}(4P) * C_{4v}$	$P4mm$	C_{4v}^1	24s
	$\mathbb{Z}(4P) * C_{4h}$	$P\frac{4}{m}$	C_{4h}^1	28s
	$\mathbb{Z}(4P) * \bar{C}_4$	$P\bar{4}$	S_4^1	26s
	$\mathbb{Z}(4P) * C_4$	$P4$	C_4^1	22s
	$\mathbb{Z}(4I) * D_{4h}$	$I\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m} P\frac{4}{m}mm$	D_{4h}^{17}	37s
	$\mathbb{Z}(4I) * _d D_{2d}$	$I\bar{4}2m$	D_{2d}^{11}	34s
	$\mathbb{Z}(4I) * _k D_{2d}$	$I\bar{4}m2$	D_{2d}^9	35s
	$\mathbb{Z}(4I) * D_4$	$I422$	D_4^9	31s
	$\mathbb{Z}(4I) * C_{4v}$	$I4mm$	C_{4v}^9	25s
	$\mathbb{Z}(4I) * C_{4h}$	$I\frac{4}{m}$	C_{4h}^5	29s
	$\mathbb{Z}(4I) * \bar{C}_4$	$I\bar{4}$	S_4^2	27s
	$\mathbb{Z}(4I) * C_4$	$I4$	C_4^1	22s
	Orthorhombisch	$\mathbb{Z}(222P) * D_{2h}$	$P\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m} Pmmm$	D_{2h}^1
$\mathbb{Z}(222P) * D_2$		$P222$	D_2^1	9s
$\mathbb{Z}(222P) * C_{2v}$		$Pmm2$	C_{2v}^1	13s
$\mathbb{Z}(222I) * D_{2h}$		$I\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m} Immm$	D_{2h}^{25}	20s
$\mathbb{Z}(222I) * D_2$		$I222$	D_2^8	11s
$\mathbb{Z}(222I) * C_{2v}$		$Imm2$	C_{2v}^{20}	16s
$\mathbb{Z}(222C) * D_{2h}$		$C\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m} Cmmm$	D_{2h}^{19}	19s
$\mathbb{Z}(222C) * D_2$		$C222$	D_2^6	10s
$\mathbb{Z}(222C) * C_{2v}$		$Cmm2$	C_{2v}^{11}	14s
$\mathbb{Z}(222A) * C_{2v}$		$Amm2$	C_{2v}^{14}	15s
$\mathbb{Z}(222F) * D_{2h}$		$F\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m} Fmmm$	D_{2h}^{23}	21s
$\mathbb{Z}(222F) * D_2$		$F222$	D_2^7	12s
$\mathbb{Z}(222F) * C_{2v}$		$Fmm2$	C_{2v}^{18}	17s
monoklin		$\mathbb{Z}(2P) * C_{2h}$	$P11\frac{2}{m} P\frac{2}{m}$	C_{2h}^1
	$\mathbb{Z}(2P) * \bar{C}_1$	$P11m Pm$	C_s^1	5s
	$\mathbb{Z}(2P) * C_2$	$P112 P2$	C_2^1	3s
	$\mathbb{Z}(2I) * C_{2h}$	$I11\frac{2}{m} I\frac{2}{m} = B\frac{2}{m}$	C_{2h}^3	8s
	$\mathbb{Z}(2I) * \bar{C}_1$	$I11m Im = Bm$	C_s^3	6s
	$\mathbb{Z}(2I) * C_2$	$I112 I2 = B2$	C_2^3	4s
Triklin	$\mathbb{Z}(P) * \bar{C}_2$	$P\bar{1}$	C_i^1	2s
	$\mathbb{Z}(P) * C_1$	$P1$	C_1^1	1s

Zum Vergleich der Notationsformen bei den anderen Raumgruppen siehe
– für Internationale Symbolik/Schoenflies-Notation [Henry/Lonsdale 1969, 545–553],
– für Intern. Symbolik/Schoenflies-/Fedorov-Notation [Šafranovskij 1963, 286–289].

Konventionen/Notationen

Zu Kapitel I

\mathcal{S}_n	<i>Symmetrische Gruppe</i> in n Elementen
$C_n, C_{n,h}, C_{n,v},$ $\bar{C}_{2n}, D_n, D_{n,h},$ usw.	<i>Endliche orthogonale Gruppen</i> in $O(3, \mathbb{R})$ insbesondere der <i>Kristallklassen</i> in Schoenflies-Notation
$C_n, C_{n,h}, C_{n,v}$	<i>Rotationsgruppen</i> (ggfs. mit horizontaler bzw. vertikaler Spiegelungserweiterung)
\bar{C}_{2n}	zyklische Gruppe, erzeugt von <i>Drehspiegelung</i> der Ordnung $2n$
$D_n, D_{n,h}, D_{n,d}$	<i>Diedergruppen</i> (ggfs. erweitert um horizontale bzw. vertikale Spiegelungsebene, die vertikale zwischen den Diederachsen – “diagonal”)
T, T_h, T_d	<i>Tetraedergruppen</i> (ggfs. erweitert durch “horizontale” bzw. “diagonale” Spiegelungsebene)
O, O^*, I, I^*	<i>Oktaeder- bzw. Ikosaedergruppen</i> (ggfs. erweitert)
$p, p22, \frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$ usw.	Endliche orthogonale Gruppen in <i>internationaler kristallographischer Notation</i> (speziell für die 32 geometrischen Kristallklassen siehe Anhang 2, Tabelle 9)
$1P, 2P, 2I, 222P,$ $222I, 222C, 222F,$ $4P, 4I, 3P, 3R,$ $32P, 32I, 32F$	14 <i>Raumgittertypen</i> in internationaler kristallographischer Notation (vergleiche Anhang 2, Tabelle 10)
$\mathbb{Z}(1P), \mathbb{Z}(2P)$ usw.	Zugehörige <i>Translationsgitter</i> (Anhang 2, Tabelle 10)
$P2 = C_2^1,$ $P2_1 = C_2^2,$ usw.	<i>Kristallographische Raumgruppen (-typen)</i> , in der Regel sowohl in internationaler als auch Schoenfliescher Notation angegeben (speziell für die Bravaischen — symmorphen — Gruppen siehe Anhang 2, Tabelle 11)
$\Gamma * G$	<i>Semidirektes Produkt</i> der Gruppen Γ, G
$\Gamma \times G$	<i>Verschränktes Produkt</i> im Sinne einer Gruppenerweiterung mit nichttrivialem Faktorensystem, dessen Spezifizierung aus dem Kontext hervorgeht (vgl. Anhang 1.3, 1.4)

E^n	<i>Euklidischer Raum</i> der Dimension n
$\text{Isom}(E^n)$ $\text{Isom}^+(E^n)$, $\text{Isom}^-(E^n)$	<i>Isometriegruppe</i> des E^n , <i>Gruppe der orientierungserhaltenden</i> bzw. <i>Menge der orientierungsumkehrenden Isometrien</i>
$\text{Aff}(E^n)$	<i>Affine Gruppe</i> des E^n
$O(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R})$ $GL(n, \mathbb{R})$,	<i>(Spezielle) orthogonale Gruppe</i> <i>Allgemeine lineare Gruppe</i>
$P(n, \mathbb{R}), P(n, \mathbb{C})$	<i>Projektive Räume</i>
$PGL(n, \mathbb{C}) =$ $\text{Koll}(P(n, \mathbb{C}))$	<i>Gruppe der Kollineationen</i> im $P(n, \mathbb{C})$
$\text{Koll}(P(n, \mathbb{C}); M)$	<i>Stabilisator</i> von M aus $P(n, \mathbb{C})$ in $PGL(n, \mathbb{C})$
$M_n^{(k,l)}$ usw.	<i>Untervarietät</i> des $P(n, \mathbb{C})$, definiert als simultanes <i>Nullstellengebilde homogener Formen vom</i> <i>Grad l, k etc.</i>
$[m, n, p]$	<i>Fläche in "Weißschen Parametern", d.h. mit ganz-</i> <i>zahligen Achsenabschnitten m, n, p bezüglich eines ge-</i> <i>wählten Achsensystems. Weiß' Originalschreibweise</i> <i>bei Achseneinheiten a, b, c war $[ma : nb : pc]$; im Fall</i> <i>des trigonal/hexagonalen Systems nach Auszeichnung</i> <i>von 3 symmetrischen Achsen in einer Ebene und einer</i> <i>dazu orthogonalen $\left[\begin{smallmatrix} qc \\ ma:na:pa \end{smallmatrix} \right]$.</i>
(α, β, γ)	<i>Fläche angegeben durch Normalenvektor; in der Regel</i> $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ oder \mathbb{Z}

Zu Kapitel II

In der Regel Notation von *Punkten in Großbuchstaben* (P, Q, \dots), von *Geraden in Kleinbuchstaben* (g, h, \dots), von *Ebenen hervorgehoben* ($\mathbf{E}, \mathbf{F}, \dots$)

P, Q ,	<i>Ebenes Geradenbüschel</i> durch die Punkte P, Q
$P \cdot Q$	<i>Gerade</i> durch die Punkte P, Q ,
$g \cdot h$	<i>Schnittpunkt</i> der Geraden g, h
g_∞, E_∞	<i>unendlich ferne Gerade</i> bzw. <i>Ebene</i>
\perp	<i>orthogonal</i>
\top	<i>inzidiert mit</i>

Quellen und Literaturverzeichnis

Verwendete Abkürzungen

Abh. AWB — Abhandlungen Königliche Akademie der Wissenschaften Berlin, Phys. Klasse

Abh. BAW — Abhandlungen Bayerische Akademie der Wissenschaften

Abh. GGW — Abhandlungen Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften

Abh. GWL — Abhandlungen Gesellschaft der Wissenschaften Leipzig

Abh. IMUK — Abhandlungen der Internationalen Unterrichtskommission für
Mathematik

AdM — Annales de Mathématique

AfM — Archiv für Mathematik

AHES — Archive for History of Exact Sciences

AIHS — Archives Internationales d'Histoire des Sciences

AJM — American Journal of Mathematics Pure and Applied

Ann. Mat. — Annali di Matematica

Ann. Phys. — Annalen der Physik

Ann. Sci — Annals of Science

Ann. Sci. Mat. Fis. — Annali di Scienze Matematiche e Fisiche

BANCRA — Boletín de la Academia Nacional de Ciencias de la República
de Argentina

Ber. SGW — Berichte Verhandlungen Königlich Sächsische Gesellschaft der
Wissenschaften, math.-phys. Klasse

- BJHS — British Journal for the History of Science
BSM — Bulletin des Sciences Mathématiques
BSP — Bulletin Société Philomatique
Chr. FVS — Christiania Forhandling i Videnskabs-Selskabet
CI — Civilingenieur
CMH — Commentarii Mathematici Helvetii
CR — Comptes Rendus Académie des Sciences Paris
DBGTW — Dresdener Beiträge zur Geschichte der Technikwissenschaften
DPJ — Dingers Polytechnisches Journal
DSB — Dictionary of Scientific Biography. Ed. C. Gillispie. New York
EMW — Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Leipzig
EPHJ — Edinburgh Philosophical Journal
GgA — Göttingische gelehrte Anzeigen
HM — Historia Mathematica
HSPS — Historical Studies in the Physical Sciences
HuT — Humanismus und Technik
HZ — Historische Zeitschrift
Jb. DMV — Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
Jb. FM — Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik
JdM — Journal de Mathématique
JdPh — Journal de Physique
JEP — Journal d. Ecole Polytechnique
JfM — Journal für die reine und angewandte Mathematik
MA — Mathematische Annalen
Math. Mag. — Mathematical Magazin
Mém. AS — Mémoires d'Académie des Sciences, Paris
Mém. Div. Sav. — Mémoires présentés par Divers Savants à l'Académie Royal
des Sciences
Mb. AWB — Monatsberichte Berliner Akademie der Wissenschaften Berlin
Nachr. GWG — Nachrichten Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen
N. Jb. Min. — Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie
NTM — Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und
Medizin
Phil. Mag. — Philosophical Magazin
Phil. Tr. RSL — Philosophical Transactions Royal Society London

-
- Ph. Zs. — Physikalische Zeitschrift
Proc. Cam. Phil. Soc. — Proceedings of the Cambridge Philosophical Society
Proc. EMS — Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society
Proc. RSL — Proceedings Royal Society London, Series A.
Sb. BAW — Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften,
Math.-Phys. Classe
Sb. PrAW — Sitzungsberichte Preußische Akademie der Wissenschaften
T&C — Technology and Culture
TG — Technikgeschichte
TG-E — Technikgeschichte in Einzeldarstellungen, Düsseldorf
Tr. RSE — Transactions Royal Society Edingburgh
VjS. NGZ — Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich
Zap. MO — Zapiski Imperatorskago St.-Peterburgskago Mineralogičeskago
Obščestva
Zs. Krist. — Zeitschrift für Kristallographie (Fortführung von Zs. Kryst.)
Zs. Kryst. — Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie
Zs. MNU — Zeitschrift für mathematisch naturwissenschaftlichen Unterricht
Zs. MuP — Zeitschrift für Mathematik und Physik
Zs. ph. Ch. — Zeitschrift für physikalische Chemie
Zs. VDI — Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure

Archivalia

- Clebsch, Alfred Hs 87:146–170. 25 Briefe an W. Fiedler, zwischen 2.1.1861 und 9.11.1871. ETH-Bibliothek Zürich, Handschriftenabteilung. Codex Ms. W. Fiedler.
- Cremona, Luigi Hs 87:173–197. 24 Briefe, 1 Karte an W. Fiedler zwischen 1.1.1863 und 1.1.1889. ETH Bibliothek Zürich. Codex Ms. W. Fiedler.
- Culmann, Carl Hs 2997:10. Die Statik und die neuere Geometrie. ETH-Bibliothek Zürich. Codex Ms Culmann.
- Frankenheim, Moritz Ludwig Ms G 1 1827(5). 5 Briefe an Unbekannt und Nees van Eesenbeck, 9.3.o.J., 1.8.1839, 30.11.1850, 30.12.1850. Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz, Berlin, Sammlung Darmstaedter. Codex Ms Frankenheim.
- Graßmann, Justus Günther Ms. H 1811 (3). Brief an Kultusministerium vom 30.12. 1830, 2 Blätter. Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz, Berlin, Sammlung Darmstaedter. Codex Ms. J. G. Graßmann.
- Hessel, Johann Friedrich Christian Ms 2640. Brief an Schubert, ohne Datum. Universitätsbibliothek Erlangen-Nürnberg. Codex Ms. Schubert.
- Ms K 35. 2 Briefe; 2.10.1825 an Gmelin, 2.10.1843 an Unbekannt. Germanisches Nationalmuseum Nürnberg, Historisches Archiv. Autographensammlung.
- Klein, Felix Hs. 87:574–593. 18 Briefe, 2 Karten an W. Fiedler zwischen 4.2.1872 und 11.11.1893. ETH-Bibliothek, Zürich. Codex Ms. W. Fiedler.
- Ms XXII G. Über Lies und meine ältere geometrische Arbeiten. Erster Borkumer Entwurf vom August 1892. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung. Codex Ms. Klein.
- Schoenflies, Arthur an Jordan, 5.8.1886. Correspondance de Jordan. Ecole Polytechnique Paris, Archives. Art. VI, §2, Sect. a.2, Nr. 101.
- an Klein. 28 Briefe/Karten zwischen 5.5.1885 und 26.5.1923. Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Codex Ms. Klein 11:728-744D.
- Weiß, Christian Samuel Ms. La 1810. Briefe und Manuskripte aus der Zeit 1798 bis 1851. Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz, Berlin, Sammlung Darmstaedter. Codex Ms. Weiß.

Publizierte Quellen

- Abel, Niels H. 1829. Mémoire sur une classe particulière d'équation résoluble algébriquement. *JfM* 4, 131–156. Oeuvres complètes 1, Christiania 1881, 478–507. Dtsch. in (Abel/Galois 1889, 29–56).
- ; Galois Evariste 1889. Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen. Dtsch. von H. Maser. Berlin.
- Arnold, E. (und 43 andere) 1897. Der mathematische Unterricht an den technischen Hochschulen. *Zs VDI* 41, 1368f.
- Barlow, William 1883/84. Probable nature of the internal symmetry of crystals. *Nature* 29, 186–188, 205–207, 404.
- 1894. Über die geometrischen Eigenschaften homogener starrer Strukturen. *Zs. Kryst.* 23, 1–63.
- 1898. A mechanical cause of homogeneity of structure and symmetry, geometrically investigated. *Proc. Royal Society Dublin* 8, 527–690.
- Bauernfeind 1846. Die Paulische Gewölbetheorie analytisch bearbeitet. *Stuttgarter Eisenbahnzeitung* 34, 299ff.
- Bauschinger, Johann 1871. Elemente der graphischen Statik. München.²1880.
- Betti, Enrico 1852. Sulla risoluzione delle equazioni algebriche. *Ann Sci. Mat. Fis.* 3. Opere matematiche 1. Milano 1903, 31–80.
- Bieberbach, Ludwig 1910a. Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume mit einem endlichen Fundamentalbereich. *Nachr. GWG*, 75–84.
- 1910b. Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume, Teil I. *MA* 70, 297–336.
- 1912. dito, Teil II. *MA* 72, 400–412.
- Bow, Robert H. 1873. Economics of construction in relation to framed structures. London — Edinburgh — New York.
- Bragg, William Henry 1913. The reflection of X-rays by crystals II. *Proc. RSL* 89, 246–248.
- ; Bragg, William Lawrence 1913a. The reflection of X-rays by crystals. *Proc. RSL* 88, 428–438.
- ; Bragg, William Lawrence 1913b. The structure of diamond. *Proc. RSL* 89, 277–291.
- Bragg, William Lawrence 1913. The diffraction of short electromagnetic waves by a crystal. *Proc. Cam. Phil. Soc.*, 17, 43–57.

- Bravais, Auguste 1849a. Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie. *JdM 14*, 137–140. Wiederabdruck in: (1866, XIII–XVII).
- 1849b. Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique. *JdM 14*, 141–180. In: (1866, IXX–LXII).
- 1849/1890. Abhandlungen über symmetrische Polyeder (1849b). Dtsch. von C. u. E. Blasius. Ostwalds Klassiker *17*, Leipzig 1890.
- 1850. Mémoire sur les système des points distribuées régulièrement sur un plan ou dans l'espace. *JEP 19*, 1–128.
- 1850/1897. Abhandlung von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. Dtsch. von C. u. E. Blasius. Ostwalds Klassiker *90*. Leipzig 1897.
- 1850/1949. On the systems formed by points regularly distributed on a plane or in space. Engl. A. J. Shaler. Michigan 1949.
- 1851. Etudes cristallographiques. *JEP 20*, 101–278.
- 1866. Etudes cristallographiques. Paris. (Buchedition von 1849a, 1849b, 1850, 1851).
- Breton, Philippe 1845. Théorie géométrique des centres multiples. *JdM 10*, 430–434.
- Brewster, David 1824. Observation on the pyro-electricity of minerals. *Edinburgh Journal of Science 1*, 208–215.
- Brianchon, Charles J. 1806. Sur les surfaces courbes du second degré. *JEP 13*, 297–311.
- Brown, Harold; Bülow, Rolf; Neubüser, Joachim; Wondratschek, Hans; Zassenhaus, Hans 1978. Crystallographic groups of four-dimensional space. New York.
- Brückmann, Eugen 1895. Zur Frage der Ingenieurzerziehung. *Zs. VDI 39*, 923–926.
- Burckhardt, Johann Jakob 1930. Bemerkungen zur arithmetischen Berechnung der Bewegungsgruppen. *CMH 2*, 91–98.
- 1934. Zur Theorie der Bewegungsgruppen. *CMH 6*, 159–184.
- 1936/37. Bewegungsgruppen in mehrdimensionalen Räumen. *CMH 9*, 284–302.
- 1947. Die Bewegungsgruppen der Kristallographie. Basel.²1966.
- Cappeler, Moritz Anton 1723. *Prodromus crystallographiae de cristallis improprie sic dictis commentarium*. Luzern. Neuherausgabe und Übertragung ins Deutsche von K. Mieleitner. München 1922.
- Cartan, Elie 1893a, b. Sur la structure des groupes simples finis et continus. *CR 116*, 784–786, 962–964. *Oeuvres I.1*, Paris 1952, 99–101, 103–105.

-
- 1894. Sur la structure des groupes des transformations finis et continus. Paris. Oeuvres *I.1*, Paris 1952, 137–286.
- Cauchy, Augustin L. 1813. Recherches sur les polyèdres. JEP *9*, 68–86.
- 1823. Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques. BSP 9–13. Oeuvres (2) *2*, Paris 1958, 300–304.
- 1827a. De la pression ou tension dans un corps solide. Exercices de Mathématiques *2*, Paris. In: (1889 (2) *7*, 60–78).
- 1827b. Sur la condensation et la dilatation des corps solides. Exercices de Mathématiques *2*, Paris. In: (1889 (2) *7*, 82–93).
- 1827c. Sur les relations qui existent dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices. Exercices de Mathématiques *2*, Paris. In: (1889, (2) *7*, 141–145).
- 1828. Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels. Exercices de Mathématiques *3*, Paris. In: (1889 (2) *8*, 227–252).
- 1829. Sur l'équilibre et le mouvement intérieure des corps. Exercices des Mathématiques *4*, Paris. Oeuvres (2) *9*, Paris (1891), 342–369.
- 1844. Mémoire sur les arrangements que l'on peut former avec des lettres données . . . Exercices d'Analyse et de Physique Mathématiques *3*, Paris 151–252. Oeuvres (2) *13*, Paris, 171–282.
- e.a. 1849. Rapport sur un Mémoire de M. Bravais relatif à certains systèmes ou assemblages de points matériels. CR *29*, 133.
- 1889. Oeuvres (2), *7*, *8*. Paris.
- Cayley, Arthur 1845. On certain results relating to quaternions. Phil. Mag. *26*, 141–145. Collected Mathematical Papers *1*, Cambridge 1889, 123–126.
- 1854. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\Theta^n = 1$. Phil. Mag *7*. Coll. Math. Pap. *2*, Cambridge 1889, 123–132.
- Chasles, Michel 1830. Note sur les propriétés générales des systèmes de deux corps semblables entre eux. BSM *14*, 321–326.
- Chevenix, R. 1804. Observations sur une mémoire du docteur Christian Samuel Weiss . . . Annales de Chimie et de Physique *52*, 308–339.
- Clebsch, Alfred 1862. Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig.
- Courant, Richard 1981. Reminiscences from Hilbert's Göttingen. Mathematical Intelligencer *3*, 154–164.
- Cousinery, B.E. 1838. Calcul par le trait. Paris.
- Cremona, Luigi 1872. Le figure reciproche nella statica grafica. Milano.³1879.
- 1873a. Elementi di calcolo grafico. Torino. Dtsch. von M. Curtze. Elemente des graphischen Calculs. Leipzig 1875.

- 1873b. *Elementi di geometria proiettiva*. Torino. Engl. von Ch. Lendesdorf. *Elements of projective geometry*. Oxford 1893.
- 1885. *Les figures réciproques en statique graphique*. Frz. von L. Bossut (Übersetzung von 1872). Paris.
- Culmann, Carl 1851. *Der Bau der hölzernen Brücken in den Vereinigten Staaten von Nordamerika*. *Allgemeine Bauzeitung Wien* 16, 69–129. Neudruck Düsseldorf 1970.
- 1852. *Der Bau der eisernen Brücken in England und Amerika*. Ebda. 17, 163–222.
- 1866. *Die graphische Statik*. Zürich.
- 1870. *Über das Parallelogramm und über die Zusammensetzung der Kräfte*. *VjS. NGZ* 15, 1–24.
- 1875. *Die graphische Statik*. Zweite neu bearbeitete Auflage. Zürich.
- Curie, Pierre 1884. *Sur les questions d'ordre*. *Bulletin de la Société Minéralogique de France* 7, 89–111, 418–457.
- Dedekind, Richard 1856. *Eine Vorlesung über Algebra*. In [Scharlau 1981, 59–100].
- Delafosse, Gabriel 1840. *Recherches relatives à la cristallisation, considérée sous les rapports physiques et mathématiques*. *CR* 11, 394–400.
- 1843. *Recherches sur la cristallisation considérée sous les rapports physiques et mathématiques*. *Mém. Div. Sav. 8.*, 641–690, 2 pl.
- 1854. *Haüy*. *Biographie Universelle*, Paris, 18, 574–582. Neudruck Graz (Akademische Druck- und Verlagsanstalt) 1967.
- Delone, B.N. 1959. *Teoriya planigonov*. *Izvestija Akademia Nauk SSR, Ser. Matem.* 23, 365–386.
- 1961. *Poksatel'stvo osnovnoj teoremy teorii stereoedrov*. *Dokladi Akademia Nauk SSR* 198, 1270–1272.
- Dietz, W. (und 7 andere) 1897. *Der mathematische Unterricht an den technischen Hochschulen*. *Zs. VdI* 41, 1452f.
- Dirichlet, Peter Gustav Lejeune 1850. *Ueber die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen*. *JfM* 40, 209–227.
- Dobbs, W.J. 1897. *Elementary graphical statics*. London.
- DuBois, Jay 1875. *The elements of graphical statics and their application to framed structures*. New York.
- Dress, Andreas; Scharlau, Rudolf 1984. *Zur Klassifizierung äquivarianter Pflasterungen*. *Mitteilungen Mathematisches Seminar Gießen* 164, 82–136.
- Dyck, Walther 1882. *Gruppentheoretische Studien I*. *MA* 20, 1–44.

-
- 1883. Gruppentheoretische Studien II. MA 22, 70–108.
- ; Henneberg, Lebrecht; Krause 1897. Über den mathematischen Unterricht an technischen Hochschulen. Zs. MNU 28, 161–164.
- Eddy, H.T. 1877. New constructions in graphical statics. Van Norstrands Engineering Magazine, New York.
- 1878. On the two general reciprocal methods in graphical statics. AJM 1, 322–335.
- Eisenstein, Gotthold 1844. Allgemeine Untersuchung über die Formen dritten Grades mit drei Variablen. JfM 28, 289–374. Mathematische Werke 1, New York 1975, 167–286.
- 1854. Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen, nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen, in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Berechnung. JfM 41, 141–190, 227–242. Mathematische Werke 2, New York 1975, 637–704.
- Encyclopédie 1751ff. Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et Métiers. Paris, Neufchatel. Hier insbesondere die Stichwörter: Observations sur la division des sciences du chancelier Bacon (Denis Diderot), 1, Paris 1751, (li)ff.; Mathématique, ou Mathématiques (Jean le Rond d'Alembert), 10, Neufchatel 1765, 188f.; Physico-Mathématiques (d'Alembert), 12, Neufchatel 1765, 536f. Neudruck Stuttgart – Bad Cannstatt (Friedrich Fromm Verlag) 1966.
- Euler Leonhard 1758. Du mouvement des corps solides autour d'un axe variable. Mémoires Académie des Sciences Berlin 14, 154–193. Opera Omnia Ser. (2) 8, Zürich 1965, 200–235.
- 1758/59. Theoremata circa residua ex divisione potestatum relictia. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae (1758/59), 1761, 49–82. Opera Omnia Ser. (1) 2, Leipzig – Berlin 1915, 493–518.
- 1765. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, vol. posterius. Opera Omnia Ser. (2) 4, Bern – Zürich 1950, 1–293.
- Favaro, A. 1877. Lezioni di statica grafica. Padova.
- Fedorov, Evgraph Stepanovič 1885. Načala učenija o figurach. Zap. MO (2) 21, i–viii, 1–278. Neudruck Moskau (Izdat. Akadem. Nauk SSR) 1953. (Deutsche Auszüge in 1893b).
- 1885–87. Etudy po analitičeskoj kristallografii. Zap. MO (1885), 85–118, 222–243; (1886), 395–425; (1887), 87–153.
- 1888. Osnovnye formuly analitičeskoj geometrii v uluščennom vide. St.-Petersburg. Englisch in: (1971, 1–23).
- 1889. Simmetrija konečnych figur. Zap. MO 25, 1–52. Englisch in: (1971, 24–49).

- 1890. Protokoly Zasadnij Imperatorskago S. Peterburgskago Mineralogičeskago Obsčestva (Protocolle der Sitzungen der Kaiserlichen Mineralogischen Gesellschaft zu St. Petersburg) 21.11.1889, §59. Zap. MO *26*, 452–455. [Hinweis auf (1890/91a)].
- 1890/91a. Simmetrija pravil'nich sistem figur. St. Petersburg 1890. Wiederabdruck in: Zap. MO *28* (1891), 1–146. Englisch in: (1971, 50–131).
- 1890/91b. Protokoly ..., 16.11.1890, §75. Zap. MO *27* (1891), 448f. Englisch in: (1971, 119f.). [Korrekturnote zu (1890/91a)].
- 1890/91c. Protokoly ..., 11.12.1890, §89. Zap. MO *27* (1891), 465f. [Zusatz zu (1890/91a)].
- 1891a. Simmetrija na plokosti (La symmétrie sur un plan). Zap. MO *28*, 345–390.
- 1891b. Ueber seine beiden Werke: 1. Die Symmetrie der endlichen Figuren (1888). 2. Die Symmetrie der regelmässigen Systeme der Figuren (1890/91). N. Jb. Min. *1*, 113–116.
- 1891c. [Korrekturen zu (1890/91a) mit 230er Liste und Umbenennung der Symmetriesysteme als Anhang zu (1890/91a)] Zap. MO *28*, 557f.
- 1892. Zusammenfassung der krystallographischen Resultate des Herrn Schoenflies und der meinigen. Zs. Kryst. *20*, 25–75.
- 1893a. Teodolitnu metod v mineralogii i petrografii. Trudy Geologičeskogo Komiteta *10*, (2), 1–191. Dtsch. als: Universal-Theodolit-Methode in der Mineralogie und Petrographie. Zs. Kryst. *21* (1893), 574–678.
- 1893b. Elemente der Gestaltenlehre. Zs. Kryst. *21*, 679–694. (Eigene Zusammenfassung von (1885)).
- 1893c. Analytisch krystallographische Studien. Zs. Kryst. *21*, 694–714. (Eigene Zusammenfassung von (1885–1887)).
- 1894. Das Grundgesetz der Krystallographie. Zs. Kryst. *23*, 99–113.
- 1895–1905. Theorie der Krystalstruktur. Einleitung, Teil I–III. Zs. Kryst. *24* (1895), 209–252; *25*, (1896), 113–224; *36* (1902), 209–233; *40*, (1905), 529–554. Englisch in: (1971, 177–315).
- 1896. Einige Betrachtungen über die Grundformen der Krystallographie. Sb. BAW *24*, 499–530.
- 1897a. Kurs kristallografii. St. Petersburg.²1901.
- 1897b. Beitrag zur Syngonielehre. Zs. Kryst. *28*, 36–68.
- 1897c. Nachträgliche Studien zur Symmetriellehre. Zs. Kryst. *28*, 468–482.
- 1900. Reguläre Plan- und Raumtheilungen. Abh. BAW *20*, 465–588.
- 1914. Pervoe konstantirovanie opytym putem asimorfnoi pravil'noi sistemy. Zapiski Gornogo Instituta *5*, 54ff.

-
- 1949. Simmetrija i struktura kristallov. Moskva – Leningrad. Englisch als (1971).
 - 1971. Symmetry of crystals. Translated by David and Katherine Har-ker. American Crystallographic Association Monograph 7. New York. (Enthält: (1888, 1889, 1890/91a, b, 1892, 1895–1905, Einleitung und Teil I)).
 - ; Schoenflies, Arthur 1970. Der Briefwechsel von E.S. Fedorow und A. Schoenflies, 1889–1908. Hrsg. J.J. Burckhardt. AHES 7, 91–141.
 - Fiedler, Wilhelm 1860. Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft. Dissertationsschrift Leipzig. Programm der höheren Gewerbeschule Chemnitz.
 - Über das System in der darstellenden Geometrie. Zs. MuP 8, 443–447.
 - 1871. Die darstellende Geometrie. Ein Grundriß für Vorlesungen und zum Selbststudium. Leipzig.
 - 1875. Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Für Vorlesungen an Technischen Hochschulen und zum Selbststudium (2. überarbeitete Auflage von (1871)). Leipzig.
 - Föppl, August 1880. Theorie des Fachwerks. Leipzig.
 - 1881. Theorie der Gewölbe. Leipzig.
 - 1894. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Leipzig.
 - 1900. Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 2. Graphische Statik. Leipzig.⁷1926.
 - Frankenheim, Moritz Ludwig 1826. Crystallonomische Aufsätze. Isis (Jena) 19, 497–515, 542–565.
 - 1832. Einige Sätze aus der Geometrie der geraden Linien. JfM 8, 178–186.
 - 1835. Die Lehre von der Cohäsion, umfassend die Elasticität der Gase, die Elasticität und Cohärenz der flüssigen und festen Körper und die Krystallkunde. Breslau.
 - 1842. System der Krystalle. Nova Acta Leopoldina 29, 469–660.
 - 1856. Die Anordnung der Moleküle im Krystalle. Ann. Phys. 97, 337–382.
 - Fricke, Robert; Klein, Felix 1897. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. 1. Leipzig.
 - Friedrich, W.; Knipping, P.; Laue, Max 1912. Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen. Sb. BAW 303-322. Ann. Phys. 41 (1913), 971–988.
 - Frobenius, Georg 1911. Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen. Sb. PrAW 654–655.
 - Gadolin, Axel 1869. Vybod vsech kristallografických system i ich podrasdelenij is odnogo obščego načala. (Ableitung aller kristallographischen

- Systeme und ihrer Unterabtheilungen aus einem und demselben Principe.) *Zap. MO* (2) 4, 112–200. Neudruck Moskva – Leningrad (Klassiki Nauk) 1954.
- 1869/1871. Mémoire sur le déduction d'un seul principe de tous les systèmes cristallographiques avec leurs subdivisions. *Acta Societatis Fennicae* 9 (1871), 1–71.
- Galois, Evariste 1830. Analyse d'un Mémoire sur la résolution algébrique des équations. *Bulletin des Sciences Mathématiques, Physique et Chimique* 19, 271–271, *Oeuvres*, Paris 1897, 11–12. In: [1962, 163–165].
- 1831. Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux. *JdM* 11. In: (1962, 43–72). Dtsch in: (Abel/Galois 1889, 116–130).
- 1832. Lettre à Auguste Chevalier (29.5.1832). *Révue Encyclopédique*. In: (1962, 173–185). Dtsch in: (Abel/Galois 1889, 108–113).
- 1962. *Ecrits et mémoires mathématiques*. Paris.
- Gauß, Carl Friedrich 1801. *Disquisitiones arithmeticae*. Leipzig. Dtsch von H. Maser: *Untersuchungen über höhere Arithmetik*. Berlin 1889.
- 1831. Recension der "Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen" von Ludwig August Seeber (Seeber 1831). *GgA* 108. Wiederabdruck *JfM* 20 (1840), 312–320. *Werke* 2, Göttingen 1863, 188–196. Neudruck Hildesheim (Olms) 1973.
- Gergonne 1824/25. Recherche de quelques-unes des lois générales qui régissent les polyèdres. *AdM* 15, 157–164.
- 1825/26. Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue. *AdM* 16, 209–231.
- de la Gournerie, Jules 1859. *Traité de perspective linéaire*. Paris.
- 1860/62. *Traité de géométrie descriptive*. Parties I, II. Paris.
- Graham, R.H. 1883. *Graphic and analytic statics in theory and comparison*. London.
- Graßmann, Hermann Günther 1839. Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetze der Krystallbildung. *Programm der Ottoschule Stettin*. *Gesammelte mathematische und physikalische Werke* 2.2. Leipzig 1902, 115–146.
- Graßmann, Justus Günther 1829. *Zur Physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre*. Stettin.
- 1833. Combinatorische Entwicklung der Krystallgestalten. *Ann. Phys.* 1833, *Ergänzungsheft* 1–43, mit Figurentafel in 30 (1836).
- Grünbaum, Branko; Shephard, G.C. 1977. The eighty-one types of isohedral tilings in the plane. *Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society* 82, 177–196.

- Hamilton, William Rowan 1847. On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra; with some geometrical illustrations. *Proceedings Royal Irish Academy* 3, 1–16. *Mathematical Papers* 3, Cambridge 1967, 355–362.
- Harding, M.C. (Hrsg.) 1920. *Correspondance de H.C. Oersted avec divers savants 1*. Kopenhagen, 280–340.
- Hauck, Guido 1887. Über die reciproken Figuren der graphischen Statik, Teil 1. *JfM* 100, 365ff.
- 1899. dito, Teil 2. *JfM* 120, 567ff.
- Haüy, René-Just 1872a. Extrait d'un mémoire sur la structure des cristaux de grenat. *JdPh* 19, 366–370.
- 1782b. Extrait d'un mémoire sur la structure du spath calcaire. *JdPh* 20, 33–39.
- 1784. Essai d'une théorie sur la structure des cristaux appliquée à plusieurs genres de substances cristallisées. Paris.
- 1793. Mémoire sur la manière de ramener à la théorie du parallélépipède celle de toutes les autres formes primitives des cristaux. *Histoires Académie des Sciences Mémoires Mathématiques et de Physiques* 1789, Paris 1793, 519–533.
- 1801. *Traité de minéralogie*, 4 vol. Paris. Dtsch. von D. L. G. Karsten und C. S. Weiß: *Lehrbuch der Mineralogie*. Leipzig 1804–1810.
- 1804. *Lehrbuch der Mineralogie 1*. Dtsch. von D. L. W. Karsten und C. S. Weiß. Leipzig.
- 1815. Mémoire sur une loi de cristallisation, appelée loi de symétrie. *Mémoire du Muséum d'Histoire Naturelle* 1, 81–101, 206–225, 273–298, 341–352. Auch in: *Journal des Mines* 37 (1815), 215–235, 347–369; 38 5–34, 161–174.
- 1815/19. Haüy's Ebenmassgesetz der Kristallbildung, übersetzt und mit Anmerkungen versehen von J.F. Hessel. Frankfurt 1819.
- 1822. *Traité de cristallographie, suivi d'une application des principes de cette science à la détermination des espèces minérales*, 2 vol. Paris.
- Heesch, Heinrich 1935. Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen. *Nachr. GWG, Neue Serie*, 1, 115–117. *Gesammelte Abhandlungen*, Bad Salzdetfurth 1986, 133–135.
- 1968. Reguläres Parkettierungsproblem. Köln – Opladen.
- Henneberg, Lebrecht 1886. *Statik der starren Systeme*. Darmstadt.
- 1894. Bericht über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke. *Jb. DMV* 3, 567–599.
- 1897. Zur Frage der Ingenieurerziehung. *Zs. VDI* 41, 982–984.

- 1903. Die graphische Statik der starren Körper. *EMW* 4.5, 345–434.
- Herbart, Johann Friedrich 1807. Über philosophisches Studium. In: *Sämtliche Werke in chronologischer Folge herausgegeben von Karl Kehrbach und Otto Flügel*, Band 2. Langensalza 1899–1912. Neudruck Aalen 1964, 227–296.
- Hermann, C. 1928. Zur systematischen Raumgruppentheorie I. Eine neue Raumgruppensymbolik. *Zs. Krist.* 68, 257–287.
- 1929. dito, II–IV. *Zs. Krist.* 69, 226–249, 250–270, 533–555.
- 1931. Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Ch. Mauguin. *Zs. Krist.* 69, 599–601.
- 1949. Kristallographie in Räumen beliebiger Dimensionszahl. *Acta Crystallographica* 2, 139–145.
- 1952. Translationsgruppen in n Dimensionen. In: H. O'Daniel (Hrsg.). *Zur Struktur und Materie der Festkörper*. Berlin – Heidelberg – New York, 24–33.
- Herschel, J.F.W. 1822. On the rotation impressed by plate of rock crystals on the planes of polarization of the rays of light as connected with certain peculiarities in its crystallization. *Transactions Cambridge Philosophical Society* 1, 43–52. *Dtsch. Ann. Phys.* 21, 288ff.
- Hertwig, A. 1912. Die Lösung linearer Gleichungen durch unendliche Reihen und ihre Anwendung auf die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. In: *Festschrift für Heinrich Müller-Breslau*. Leipzig.
- Hess, Edmund 1883. Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung: Mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen auf die Theorie der gleichflächigen und gleicheckigen Polyeder. Leipzig.
- Hessel, Johann Friedrich Christian 1830. *Krystallometrie oder Krystallographie, auf eigenthümliche Weise und mit Zugrundelegung neuer allgemeiner Lehren der reinen Gestaltenkunde, sowie mit vollständiger Berücksichtigung der wichtigsten Arbeiten und Methoden anderer Krystallographen bearbeitet*. In: H. W. Brandes e.a. (Hrsg.), *Johann Samuel Traugott Gehlers Physikalisches Wörterbuch*, Bd. 8, Leipzig. Separatdruck Leipzig 1831. Neudruck Ostwalds Klassiker, 2 Bde, 88/89. Leipzig 1897.
- 1853. Die Anzahl der Parallelstellungen und jene der Coinzidenzstellungen eines jeden denkbaren Raumdinges mit seinem Ebenbilde und seinem Gegenbilde, der Regelmässigkeitsgrad des Schwerpunctes und andere bei Raumdingen in Betracht kommende Zahlen, als Merkmale für den Begriff von Raumdingen. Kassel.
- 1862. Ueber gewisse merkwürdige statische und mechanische Eigenschaften der Raumgebilde, welche einen Schwerpunct haben, insbesondere der

homogenen Körper, und über die Bedeutung derselben für verschiedene auf Krystalle bezügliche Lehren der Physik. In: Festschrift für Christian Ludwig Gerling zum 50. Jahrestage der Erlangung seiner Doctorwürde. Universitätsschrift Marburg.

- Hilbert, David 1900. Mathematische Probleme. Vortrag gehalten auf dem Internationalen Mathematiker Congreß zu Paris 1900. Nachr. GWG, 253–297. Gesammelte Abhandlungen 3, Berlin 1935, 290–329. Reprint New York (Chelsea) 1965.
- 1926. Über das Unendliche. MA 95, 161–190. (Nicht in Gesammelte Abhandlungen).
- Hooke, Robert 1667. Micrographia. London.
- Hoskins, L.M. 1892. The elements of graphic statics. London.
- Huygens, Christian 1678. Traité de la lumière. Leyden 1690. Oeuvres complètes 19. Den Haag.
- 1678/1903. Abhandlung über das Licht. Dtsch. von E. Lommel. Ostwalds Klassiker 20, Leipzig 1903.
- Jacobi, Carl Gustav J. 1830. Correspondance Jacobi à Legendre, 2.7.1830. Werke 1, Berlin 1881, 453–455. Neudruck New York (Chelsea) 1969.
- Jahnke, E. 1919. Die Mathematik als Grundlage der Technik. DPJ 334, 161.
- Jenkin, Fleeming 1869. On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains on frameworks. Tr. RSE 25, 441–447.
- Jordan, Camille 1865. Commentaire sur le mémoire de Galois. CR 60, 770–774. In: (1961, 1, 87–90).
- 1866a. Des contours tracées sur les surfaces. JdM (2) 11, 110–130. In: (1964, 4, 91–112).
- 1866b. Recherches sur les polyèdres. JfM 68, 22–85. In: (1964, 4, 15–78).
- 1867. Mémoire sur la résolution algébrique des équations. JdM (2) 12, 109–157. In: (1961, 1, 109–158).
- 1869. Mémoire sur les groupes de mouvements. Ann, Mat. 2, 167–215, 322–345. In: (1964, 4, 231–302).
- 1870. Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris.
- 1877. Détermination des groupes formés d'un nombre fini de substitutions. CR 84, 1446–1448. In: (1961, 2, 7–8).
- 1880. Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. Atti Accad. Nap. 8, No. 11. In: (1961, 2, 177–218).
- 1961. Oeuvres 1, 2. Paris.
- 1964. Oeuvres 4. Paris.

- Kant, Immanuel 1755. Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels. Königsberg. Werke (Akademie Ausgabe) 1. Berlin 1910, 215–368. Neudruck Berlin (de Gruyter) 1968.
- 1786. Die metaphysischen Anfangsgründe der Naturwissenschaften Riga. Werke (Akademie Ausgabe) 4. Berlin 1911, 465–566. Neudruck Berlin (de Gruyter) 1968.
- Kepler, Johannes 1619a. Harmonice Mundi. Frankfurt. Gesammelte Werke 6, München 1940.
- 1619b. Strena seu de nive sexangulari. Frankfurt. Gesammelte Werke 4, München 1941, 261–280.
- 1619/1639. Weltharmonik. Dtsch von Max Caspar. München 1939. Neudruck Wiesbaden (Sändig) 1973.
- 1619/1966. The six-cornered snowflake. Engl. von C. Hardie. Oxford 1966.
- Klein, Felix 1871. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. MA 4, 573–625. In: (1921. 244–305).
- 1872a. Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. MA 5, 257–277. In: (1921, 106–126).
- 1872b. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen. Auch in MA 43, (1893), 63–100. In: (1921, 460–497).
- 1873. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, 2. Aufsatz. MA 6, 112–145. In: (1921, 311–343).
- 1884. Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Leipzig.
- 1921. Gesammelte Mathematische Abhandlungen 1. Berlin. Neudruck Berlin – Heidelberg – New York 1973.
- ; Lie, Sophus 1870. Deux notes sur une famille de courbes et surfaces. CR 70. In: (Lie 1934, 78–85; Klein 1921, 416–423).
- ; Lie, Sophus 1871. Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. MA 4, 50–84. In: (Lie 1934, 229–266; Klein 1921, 424–459).
- Koechlin, Maurice 1889. Applications de la statique graphique. Paris.
- Kronecker, Leopold 1853. Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen, Teil I. Mb. AWB. In: (1929, 1–11).
- 1856. dito, Teil II. Mb. AWB. In: (1929, 25–37).
- 1870. Auseinandersetzungen einiger Eigenschaften der Klassenanzahlen idealer komplexer Zahlen. Mb. AWB. In: (1895, 271–282).
- 1879. Einige Entwicklungen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Mb. AWB. In: (1929, 73–96).

-
- 1895. *Mathematische Werke 1*. Leipzig.
- 1929. *Mathematische Werke 4*. Leipzig
- Kummer, Ernst E. 1845. Zur Theorie der complexen Zahlen. *Mb. BAW. JfM 35* (1847), 319–326. *Collected Papers 1*, Berlin – Heidelberg – New York 1975, 203–210.
- Lagrange, Jean-Louis 1772/73 *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*. *Nouvelles Mémoires Académie des Science Berlin. Oeuvres 3*, Paris 1869, 203–421.
- 1781. *Correspondance de Lagrange avec d’Alembert*, 21.9.1781. *Oeuvres 13*, Paris 1882, 368–370.
- Laplace, Pierre Simon 1796. *Exposition du système du monde*, 2 vol. Paris. *Oeuvres 6*, Paris 1886.
- Lauenstein, R. 1890. *Die graphische Statik*. Stuttgart.⁷1902.
- Laves Fritz 1931. Ebenenteilung und Koordinationszahl. *Zs. Krist. 78*, 208–241.
- Legendre, Adrien Marie 1794. *Elements de géométrie*. Paris.¹⁰1813
- Lévy, Maurice 1874. *La statique graphique et ses applications*. Paris.
- Lie, Sophus 1870. Über die Reciprocitätsverhältnisse des Reyeschen Komplexes. *Nachr. GWG 4*, 53–66. In: (1934, 68–77).
- 1871a. Over en classe geometriske transformationer. *Chr. FVS Aar 1871* (1872), 67–109. In: (1934, 105–152, dtsch.).
- 1871b. Über eine Klasse geometrischer Transformationen (Fortsetzung). *Chr. FVS Aar 1871* (1872), 182–245. In: (1934, 153–210).
- 1871c. Selbstanzeige von 1871a, b. *Jb. FM 3*, Jahrgang 1871 (1874). In: (1934, 212–214).
- 1871d. Zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen. *Nachr. GWG 22*, 535–557. In: (1934, 271–285).
- 1874. Über Gruppen von Transformationen. *Nachr. GWG*. In: (1924, 1–8).
- 1876a/b. Theorie der Transformationsgruppen, Abhandlung I, II. *AfM 1*, 19–57, 152–193. In: (1924, 9–41, 42–75).
- 1878a/b. dito, Abhandlung III, IV. *AfM 3*, 93–165. 375–460. In: (1924, 78–132, 136–196).
- 1880. Theorie der Transformationsgruppen I. *MA 1* 441–528. In: (1927, 1–94).
- 1884. *Mathematiske Middelser III af Sophus Lie*. *Christiania Forh. 15*. In: (1924, 499–502).
- 1888/1890/1893. *Theorie der Transformationsgruppen*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, 3 Bde. Leipzig. Neudruck New York (Chelsea) 1970.

-
- 1891. Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen, 1. Abhandlung. Abh. GWL, 316–352. In: (1927, 300–330).
 - 1895. Influence de Galois sur le développement des mathématiques. In: Le Centenaire del' Ecole Normale 1795 – 1895. Paris, 481–489. In: (1927, 592–601).
 - 1924. Gesammelte Abhandlungen 5. Christiania – Leipzig.
 - 1927. Gesammelte Abhandlungen 6. Leipzig – Oslo.
 - 1934. Gesammelte Abhandlungen 1. Leipzig – Oslo.
- Listing, Johann B. 1862. Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes von den Polyedern. Abh. GGW 10, 97–180.
- Lossow, Paul von 1899. Zur Frage der Ingenieurausbildung. Zs VDI 43, 355–361.
- Mauguin, Charles 1931. Sur le symbolisme des groupes des répétition ou de symétrie des assemblages cristallins. Zs. Krist. 76, 542–558.
- Maurer, M. 1882. Statique graphique appliqué aux constructions. Paris.
- Maxwell, James Clerk 1864a. On reciprocal figures and diagrams of forces. Phil. Mag. (4) 27, 250ff. In: (1890 1, 514–525).
- 1864b. On the calculation of the equilibrium of stiffness of frames. Phil. Mag (4) 27, 294ff. In: (1890 1, 598–604).
 - 1867. On the application of the theory of reciprocal polar figures to the construction of diagrams of forces. Engineer 24, 402.
 - 1870. On reciprocal figures, frames, and diagrams of forces. Tr. RSE 26, 1ff. In: (1890 2, 161–207).
 - 1876. On Bow's method of drawing diagrams in graphical statics with illustrations from Peaucellier's linkage. Proc. Cam. Phil. Soc. 2, 407ff. In: (1890 2, 492ff.).
 - 1890. Scientific papers. Ed. W. Niven, 2 vols. Cambridge. Reprint New York (Dover) 1965.
- Miller, William H. 1839. A treatise on cristallography. Cambridge.
- 1868. On the cristallographic method of Grassmann and on its employment in the investigation of the general geometric properties of crystals. Proc. Cam. Phil. Soc. 2, 75–99.
- Minkowski, Hermann 1887. Über den arithmetischen Begriff der Äquivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen. JfM 100, 449–458. Gesammelte Abhandlungen 1, Leipzig 1911, 203–211. Reprint New York (Chelsea) 1967.

-
- 1905. Diskontinuitätsbereich für arithmetische Aequivalenz. *JfM* 129 220–274. Gesammelte Abhandlungen 2, Leipzig 1911, 53–102. Reprint New York (Chelsea) 1967.
 - 1973. Briefe an David Hilbert. Hrsgg. von L. Rüdtenberg und H. Zassenhaus. Berlin – Heidelberg – New York.
 - Minnigerode, Bernhard 1887. Untersuchungen über das Symmetrieverhalten der Krystalle. *N. Jb. Min, Beilageband* 5, 145ff.
 - Möbius, August Ferdinand 1827. Der barycentrische Calcul. Leipzig. In: (1885, 1–388).
 - 1833. Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume. *JfM* 10, 317–341. In: (1885, 489–515).
 - 1837. Lehrbuch der Statik, 2 Bde. Leipzig. In: (1886c).
 - 1844. Über die Zusammensetzung gerader Linien und eine daraus entspringende neue Begründungsweise des barycentrischen Calculs. *JfM* 28, 1–9. In: (1885, 601–612).
 - 1849. Über das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Gesetzes auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme. *Ber. SGW* 1, 65ff. Auch in *JfM* 43, (1852). In: (1886b, 349–360).
 - 1851. Über symmetrische Figuren. *Ber. SGW* 3, 19–28. Auch in *JfM* 44 (1852). In: (1886b, 361–372).
 - 1885. Gesammelte Werke 1. Leipzig. Neudruck Wiesbaden (Sändig) 1967.
 - 1886a. Theorie der symmetrischen Figuren. Aus dem Nachlaß herausgegeben von C. Reinhardt. In: (1886b, 561–708).
 - 1886b. Gesammelte Werke 2. Leipzig. Neudruck Wiesbaden (Sändig) 1967.
 - 1886c. Gesammelte Werke 3. Leipzig. Neudruck Wiesbaden (Sändig) 1967.
 - 1887. Gesammelte Werke 4. Leipzig. Neudruck Wiesbaden (Sändig) 1967.
 - Mohr, Otto 1874. Beitrag zur Theorie des Fachwerks. *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins Hannover*, 509–526, 609f.
 - 1875. Die graphische Statik und das graphische Rechnen. *CI* 21, 229–238.
 - 1882. Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre. *CI* 28, 113–156.
 - 1897. Zur Frage der Ingenieurerziehung. *Zs VDI* 41, 113–115.
 - Mohs, Friedrich 1822/24. Grundriss der Mineralogie, 2 Bde. Dresden. Engl. von W. Haidinger, 3 Bde. Edinburgh 1825.
 - 1823. On the crystallographic discoveries and systems of Mohs and Weiss. *EPhJ* 8, 275–290.
 - 1832. Leichtfassliche Anfangsgründe der Naturgeschichte des Mineralienreiches. Wien.

- Müller-Breslau, Heinrich 1881. Elemente der graphischen Statik der Bauconstructionen für Architekten und Ingenieure. Berlin.
- 1891/92. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerkes. Zentralblatt der Bauverwaltung 11, 437ff.
- Naumann, Carl F. 1824. Über plagiobarische Krystallsysteme. Isis (Jena) 9, 954–959.
- 1826. Grundriss der Krystallographie. Leipzig.
- Navier, C. Louis Marie Henry 1826. Résumé des leçons données à l'Ecole Royale des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Paris (²1833–1836; ³1864 Ed.: B. de Saint Venant)
- 1826/1851. Mechanik der Baukunst (Ingenieur-Mechanik) oder Anwendung der Mechanik auf das Gleichgewicht von Bau-Constructionen. Dtsch. von G. Westphal. Hannover 1851.
- Neumann, Franz Ernst 1823. Beiträge zur Krystallonomie. Berlin. In: (1928, 175–323).
- 1826. De lege zonarum, principio evolutionis systemarum cristallinorum, pars I. Berlin. In: (1928, 323–552).
- 1928. Gesammelte Werke 1. Leipzig. Neudruck Nendeln (Kraus) 1979.
- Niggli, Paul 1919. Geometrische Kristallographie des Diskontinuums. Leipzig. Neudruck Wiesbaden (Sändig) 1973.
- 1928. Handbuch der Experimentalphysik: Kristallographische und Strukturtheoretische Grundbegriffe. Leipzig.
- Niggli, Paul; Nowacki, W. 1935. Der arithmetische Begriff der Kristallklasse und die darauf fußende Ableitung der Raumgruppen. Zs. Krist. 91, 321–335.
- Oersted, Hans Christian 1920. Correspondance avec divers savants 1. Ed. M. C. Harding. Kopenhagen.
- Ott, Karl von 1870. Das graphische Rechnen und die graphische Statik. Prag.
- 1884/85. Grundzüge der graphischen Statik, 2 Bde. Prag.
- Padeletti, D. 1879. Studi sui diagrammi reciprochi. Giornale di Matematica 17, 339ff.
- Pirlet, J. 1909. Fehleruntersuchungen bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme. Dissertationsschrift Aachen.
- Plücker, Julius 1835. System der analytischen Geometrie; auf neue Betrachtungsweisen gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Kurven dritter Ordnung enthaltend. Berlin.
- 1868. Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Teil I. Leipzig.

-
- 1869. dito, Teil II. Hrsg. F. Klein. Leipzig.
- Poincaré, Henry 1882. Théorie des groupes fuchsienues. *Acta Mathematica* 1, 1–62. *Oeuvres* 2, Paris 1952, 108–168.
- Poinsot, Louis. 1804. *Eléments de statique*. Paris.
- 1851. Théorie nouvelle de la rotation des corps. *JdM* 16, 9–129, 289–336.
- Pólya, Georg 1924. Über die Analogie der Krystalsymmetrien in der Ebene. *Zs. Krist.* 60, 278–282. *Collected Papers* 4, 1984.
- Poncelet, Jean Victor 1822. *Traité des propriétés projectives des figures*. Paris.²1865.
- 1829a. *Cours de mécanique industrielle, professées de 1828 à 1829*. 2e partie, redigée par Capitaine Gosselin. Metz.
- 1829b. Théorie générale des polaires réciproques. *JfM* 4, 1–71.
- Rankine, William John Macquorn 1858. *A manual of applied mechanics*. London – Glasgow.²1869.
- 1864. Principle of the equilibrium of polyhedral frames. *Phil. Mag.* (4) 27, 92.
- Reinhardt, K. 1928. Zur Zerlegung der Euklidischen Räume in kongruente Polytope. *SB. PrAW*, 150–155.
- v. Reusch 1869. Über Glimmerkombinationen. *Mb. AWB*, 530. *Ann. Phys.* 198, 628.
- Reye, Theodor 1868. *Geometrie der Lage*. Hannover.⁵1909.
- Riedler, Alois 1895. Zur Frage der Ingenieurziehung. *Zs. VDI* 39, 951–959.
- 1896. Die Ziele der technischen Hochschule. *Zs. VDI* 40, 301–309, 337–346, 376–382.
- Riemann, Bernhard 1854/1867. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Habilitationsvortrag Göttingen 1854*. *Abh. GGW* 19 (1867). In: (1892, 272–287).
- 1857. Theorie der Abelschen Funktionen. *JfM* 54, 115–155. In: (1892, 86–144).
- 1857/1876. Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten (Nachlaßnotiz aus dem Februar 1857). *Gesammelte Werke und wissenschaftlicher Nachlaß*, Leipzig 1876. In: (1892, 379–390).
- 1892. *Gesammelte Werke und wissenschaftlicher Nachlaß*. Hrsg. R. Dedekind, H. Weber. Leipzig 1876. Zweite, erweiterte und verbesserte Auflage Leipzig 1892. Neudruck New York (Dover) 1953. Neudruck mit Kommentaren von N. Narasimham, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo (Springer) 1986.

- Rieppel, A. 1897. Die Thalbrücke bei Müngsten. Zs. VDI 41, 1321–1329, 1373–1378, Nachtrag 50, Tafel 25, Textblatt 7–9.
- Ritter, Wilhelm 1888–1906. Anwendungen der graphischen Statik. Teil 1 (1888), 2 (1890), 3 (1900), 4 (1906). Zürich.
- Rodrigues, Olinde 1840. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace. JdM 5, 380–440.
- Rohn, K. 1899. Krystallstruktur und regelmässige Punktgruppen. Ber. SGW 51, 445–455.
- 1900. Einige Sätze über regelmässige Punktgruppen. MA 53, 440–449.
- Romé de l'Isle, Jean Baptiste Louis 1772. Essai de cristallographie. Paris.
- 1783. Cristallographie, ou description des formes propres à tous les corps du règne minéral dans l'état de combinaison saline, pierreuse ou métallique. Paris.
- Ruffini, Paolo 1799. Teoria generale dell equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto, 2 vol. Bologna. Opere Matematiche 1, Palermo 1915, 1–324.
- Salmon, George; Fiedler Wilhelm. 1863/1865. Analytische Geometrie des Raumes von G. Salmon. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. 2 Bde. Leipzig. ³1879/1880; ⁴1898 (nur Band 1).
- Saviotti, C. 1885. Nouvelles méthodes pour le calcul des travures réticulaires. Appendice à (Cremona 1885). Traduit par L. Bossut. Paris.
- 1888. La statica grafica. Milano.
- Schelling, Friedrich Wilhelm 1798. Von der Weltseele. Hamburg. Sämmtliche Werke 1.2. Stuttgart – Augsburg 1857, 345ff. Neudruck (Schriften von 1794–1798) Darmstadt (Wissenschaftliche Buchgesellschaft) 1975, 399ff.
- 1799. Erster Entwurf eines Systems der Naturphilosophie. Sämmtliche Werke 1.3. Stuttgart – Augsburg 1858, 1ff. Neudruck (Schriften von 1799–1801) Darmstadt (Wiss. Buchges.) 1967.
- Schlesinger, Josef 1870. Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie für Schulen technischer Richtungen. Wien.
- Schleusner, A. 1938. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie. Der Stahlbau 11 (24), 185–192.
- Schoenflies, Arthur 1886. Beweis eines Satzes über Bewegungsgruppen. Nachr. GWG 15, 497–503.
- 1887a/b. Über Gruppen von Bewegungen; 1. u. 2. Abhandlung. MA 28, 319–342; 29, 50–80.
- 1888a. Ueber reguläre Gebietstheilungen des Raumes. Nachr. GWG, 223–237.
- 1888b. Beitrag zur Theorie der Krystallstruktur. Nachr. GWG, 483–501.

-
- 1889. Über Gruppen von Transformationen des Raumes in sich. *MA* 34, 172–203.
 - 1890. Über das gegenseitige Verhältnis der Theorien über die Struktur der Krystalle. *Nachr. GWG*, 239–250.
 - 1891a. *Krystallsysteme und Krystallstruktur*. Leipzig. Neudruck Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo (Springer) 1984.
 - 1891b. *Krystallsysteme und Krystallstruktur* (Selbstanzeige). *GgA* 153, 1003–1020.
 - 1892a. Bemerkungen über die Theorien der Krystallstruktur. *Zs. ph. Ch.* 9, 158–170.
 - 1892b. Antwort auf den Artikel des Herrn Sohncke: Zwei Theorien der Krystallstruktur. *Zs. ph. Ch.* 10, 517–525.
 - 1905. Symmetrie und Struktur der Krystalle. Teil B in: [Liebisch/Mügge/Schoenflies 1905, 437–478].
 - 1923. *Theorie der Kristallstruktur – ein Lehrbuch*. Berlin.
 - ; Fedorov, E.S. 1970/71. Briefwechsel. Siehe (Fedorov/Schoenflies 1970/71) oder [Burckhardt 1970/71].
 - Schreier, Otto 1926. Über die Erweiterung von Gruppen. *Monatshefte Mathematik und Physik* 34, 165–180.
 - 1928. Über die Erweiterung von Gruppen II. *Abhandlungen Mathematisches Seminar Universität Hamburg* 4, 321–346.
 - Seeber, Ludwig 1824. Versuch einer Erklärung des inneren Baus der festen Körper. *Ann. Phys.* 76, 229–248, 349–372.
 - 1831. *Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen*. Freiburg.
 - Serret, Joseph Alfred 1866. *Cours d’algèbre*. 3e édition, 2 vol. Paris.
 - Shaw, H.S.H. 1892. Second report on the development of graphic methods in mechanical science. Report of the Annual Meeting of the British Society for the Advancement of Science. London, 373–531.
 - Sinogowitz, U. 1938. Die Kreislagen und Packungen kongruenter Kreise in der Ebene. *Zs. Krist.* 100, 461–508.
 - Sohncke, Leonhard 1867. Die Gruppierung der Moleküle in den Krystallen. *Ann. Phys.* 192, 75ff.
 - 1874. Die regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. *JfM* 77, 47–101.
 - 1876a. Die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstruktur. Karlsruhe.
 - 1876b. Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen. *MA* 9, 504–529.

- 1879. Entwicklung einer Theorie der Krystalstruktur. Leipzig.
- Stäckel, Paul 1902. Ueber die Entwicklung des Unterrichtsbetriebes in der angewandten Mathematik an den deutschen Universitäten. Jb. DMV 11, 26–37.
- 1904. Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten. Jb. DMV 13, 313–341.
- 1914. Die mathematische Ausbildung der Ingenieure in den verschiedenen Ländern. Jb. DMV 23, 149–169.
- 1915. Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen Technischen Hochschulen. Abh. IMUK 4.9. Leipzig.
- Staudt, Karl Christian von 1847. Geometrie der Lage. Nürnberg.
- 1856–1860. Beiträge zur Geometrie der Lage, 3 Bde., 1 (1856), 2 (1857), 3 (1860). Nürnberg.
- Steiner, Jacob 1832. Systematische Entwicklung der Abhängigkeiten geometrischer Gestalten voneinander. Berlin. Gesammelte Werke 1. Berlin 1881, 229–458.
- Stensen, Nils 1669. De solido intra solidum naturaliter contento dissertationis prodromus. Florenz.
- Stodola, Aurel 1897. Die Beziehungen der Technik zur Mathematik. Zs. VDI 41, 1257–1260.
- Varignon, Pierre 1725. Nouvelle mécanique ou statique, 2 vol. Paris.
- Verein Deutscher Ingenieure (VDI) 1895a. Bericht über die Ingenieurlaboratorien und die Gestaltung des Unterricht an den technischen Hochschulen. Zs. VDI 39, 1212–1216.
- 1895b. Eingabe wegen der Einrichtung und weiteren Ausbildung von Ingenieurlaboratorien. Zs. VDI 39, 1421f.
- Vessiot, E.; Tannenberg, W. de 1889. Comptes rendus et analyses — Lie, S. Theorie der Transformationsgruppen, 1. Abschnitt BSM (2) 13, 113–148.
- Weber, Heinrich 1893. Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. MA 43, 521–549.
- Weisbach, Julius 1846. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. Ohne Anwendung des höheren Calcüls für den Unterricht an technischen Lehranstalten sowie den Gebrauch für Techniker bestimmt. Braunschweig.
- Weiß, Christian Samuel 1804. Dynamische Ansicht der Krystallisation. In: (Haüy 1804, 365–389).
- 1809. De indigando formarum cristallorum caractere geometrico principali. Leipzig. Frz. von A. Brochant de Villiers: Mémoire sur la détermination

- du caractère géométrique principal des formes cristallines. *Journal des Mines* 29 (1811), 349–391, 401–444.
- 1815. Übersichtliche Darstellung der verschiedenen natürlichen Abtheilungen der Krystallisationssysteme. *Abh. AWB aus den Jahren 1815*, Berlin 1818, 289–336.
- 1816. Krystallographische Fundamentalbestimmung des Feldspaths. *Abh. AWB 1816* (1819), 231–281.
- 1817. Ueber eine verbesserte Methode für die Bezeichnung der verschiedenen Flächen eines Krystallisationssystems, nebst Bemerkungen über den Zustand der Polarisierung der Seiten in den Linien der krystallinischen Structur. *Abh. AWB 1817* (1819), 287–336.
- 1819. Betrachtung der Dimensionsverhältnisse in den Hauptkörpern des sphäroedrischen Systems und ihren Gegenkörpern, im Vergleich mit den harmonischen Verhältnissen der Töne. *Abh. AWB 1819* (1820), 227–241.
- 1820. Ueber mehrere neubeobachtete Krystallflächen des Feldspathes und die Theorie seines Krystallsystems im Allgemeinen. *Abh. AWB 1820* (1822), 145–184.
- 1823. On the methodical and natural distribution of the different systems of crystallisation. *EPhJ* 8, 103–110.
- 1920. Briefwechsel mit H.C. Oerstedt aus den Jahren 1832 bis 1834. In: (Oersted 1920, 298–343).
- Werner, Abraham Gottlob 1774. Von den äusseren Kennzeichen der Fossilien. Leipzig.
- Weyrauch, Jacob 1874. Die graphische Statik – Historisches und Kritisches. *Zs MuP* 19, 361–390.
- Whewell, William. 1825. A general method of calculating the angles made by any planes of crystals. *Phil. Tr. RSL*.
- Wiener, Christian 1869. Grundzüge der Weltordnung. 2. Auflage. Leipzig.
- Winkler, Emil. 1872. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken. 1. Heft. Aeussere Kräfte gerader Träger. Wien.²1875.
- 1879/80. Lage der Stützlinie im Gewölbe. *Deutsche Bauzeitung* (1879), 117–119, 127–130; (1880), 58–60.
- Wulff, G. 1890. (Referate zu 5 Arbeiten Fedorovs: Fedorov 1885, 1885–87, 1889 u.a.). *Zs Kryst.* 17, 610–618.
- Zassenhaus, Hans 1948. Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen. *CMH* 21, 117–141.
- Zeuthen, Hieronymus G. 1877a. Ovelser i grafisk statik. *Tidsskrift for Matematik* (4) 1, 21ff.
- 1877b. Anvendelse af en saetning of Maxwell tal at finde de billigste Bygningskonstruktioner. *Den. Tekniske Forenings Tidsskrift*, 104ff.

Fachliteratur

- Ackeret, Jakob 1957. Vorrede zu den Commentationes mechanicae ad theoriam machinarum pertinentes. In: L. Euler. Opera Omnia (2) 15. Basel-Stuttgart, VII-LX.
- Aleksandrov, Aleksandr D. 1958. Konvexe Polyeder. Berlin.
- Alexandrov, Paul S. (Hrsg.) 1976. Problemy Gil'berta. Moskva 1969. Dtsch. von H. Bernhardt, W. Purkert u.a. Die Hilbertschen Probleme. Ostwalds Klassiker 252. Leipzig 1976, ³1983.
- Allardice, R. E. 1892. The barycentric calculus of Möbius. Proc. EMS 10, 2-21.
- Arnold, D. H. 1983/84. The 'Mécanique Physique' of Siméon Denis Poisson: The evolution and isolation in France of his approach to physical theory. AHES 28, 243-367; 29, 37-307.
- Ascher, E.; Janner, A. 1965. Algebraic aspects of crystallography I. Space groups as extensions. Helvetica Physica Acta 38, 551-572.
- Bachmann, Ludwig 1923. Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Haupttheilen. Bd. 4.2. Die Arithmetik der quadratischen Formen, Teil II. Leipzig. Neudruck New York (Johnson) 1968.
- Bašmakova, Isabella 1960. Le théorème fondamental de l'algèbre et la construction des corps algébriques. AIHS 13, 211-222.
- Bekemeier, Bernd; Jahnke, Hans-Niels; Lohmann, Ingrid; Otte, Michael; Schminnes, Bernd 1982. Wissenschaft und Bildung im frühen 19. Jahrhundert. 2 Bde. IDM Materialien und Studien 27, 30. Bielefeld.
- Belhoste, Bruno 1985. Cauchy (1789-1857). Un mathématicien légitimiste au XIXe siècle. Paris.
- Belov, N.V.; Šafranovskij, I.I. 1962. E. S. Fedorov, 1853-1919. In [Ewald 1962, 341-351].
- Bialas, Volker 1982. Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung. Stuttgart.
- Birembaut, Arthur 1970. August Bravais. DSB 2, 430-432.
- Braun, Hans-Joachim 1976. Methodenprobleme der Ingenieurwissenschaft, 1850-1900. In: P. Lundgreen (Hrsg.). Zum Verhältnis von Wissenschaft und Technik ..., Report Wissenschaftsforschung 7, Bielefeld 1976, 128-160. Auch in: TG 44 (1977), 1-18.

- Brinkmann, R. 1978. Romantik in Deutschland. Ein interdisziplinäres Symposium. Stuttgart.
- Brock, W. 1975. Geometry and universities: Euclid and his modern rivals 1860–1901. *History of Education* 4(2), 21–36.
- Brown, Harold; Bülow, Rolf; Neubüser, Joachim; Wondratschek, Hans; Zassenhaus, Hans 1978. Crystallographic groups of four-dimensional space. New York.
- Buchheim, Gisela 1978. Zur Wechselwirkung von Naturwissenschaften und Technikwissenschaften in ihrer historischen Entwicklung. *NTM* 15, 113–119.
- 1983. Zur Entwicklung der Technikwissenschaften zwischen 1871 und 1971. In: [G. Wendel 1983, 43–53].
- ; Mauersberger, Klaus 1982. Zur Herausbildung der Technikwissenschaften in der Zeit der industriellen Revolution. In: G. Wendel (Hrsg.). Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte. Die Zeit der industriellen Revolution. Berlin, 167–182.
- ; Sonnemann, Rolf 1985. Zur Geschichte der Technikwissenschaften in der DDR — einleitende Bemerkungen. *NTM* 22 (2), 19–24.
- Buerger, Martin 1963. Elementary crystallography. An introduction to the fundamental geometrical features of crystals. Revised edition from original edition 1956. New York. Paperback Cambridge (Mass.) 1978.
- Burckhardt, Johann Jakob 1947. Die Bewegungsgruppen der Kristallographie. Basel.²1966.
- 1967/68. Zur Geschichte der Entdeckung der 230 Raumgruppen. *AHES* 4, 235–246.
- 1969. Über die Entdeckung der Paralleloeder. *Janus* 56, 241–243.
- 1970. Der Briefwechsel von E. S. Fedorow und A. Schoenflies, 1889–1908. *AHES* 7, 91–141.
- 1984. Die Entdeckung der 32 Kristallklassen durch M. L. Frankenheim im Jahre 1826. *N. Jb. Min. Monatshefte* 91, 481f.
- 1985a. Paul Niggli's Verdienste um die Herausgabe des Buches "Die Bewegungsgruppen der Kristallographie". *VjS. NGZ* 190, 115–117.
- 1985b. René Just Haüy und das Symmetriegesetz. Manuskript. Erscheint in einem von I.I. Šafranovsky herausgegebenen Band über Symmetrie.
- 1988. Die Symmetrie der Kristalle. Von René Just Haüy zur kristallographischen Schule in Zürich. Mit einem Beitrag von Erhard Scholz. Basel.
- Burke, John G. 1966. Origins of the science of crystals. Berkeley – Los Angeles.
- 1974. Mohs, Friedrich. *DSB* 9, 447–449.

- 1975. Sohncke, Leonhard. DSB 12, 511f.
- Burmester L. 1922. Geschichtliche Entwicklung des kristallographischen Zeichnens. Zs. Krist. 57, 21ff.
- Burstall, Aubrey F. 1963. A history of mechanical engineering. London.
- Caneva, Kenneth L. 1978. From galvanism to electrodynamics: The transformation of German physics and its social context. HSPS 9, 63–159.
- Cardwell, D. S. L; Hills, Richard 1976. Thermodynamics and practical engineering in the nineteenth century. History of Technology 1, 1–20.
- Chandler, Bruce; Magnus, Wilhelm 1982. History of combinatorial group theory: A case study in the history of ideas. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo.
- Chanell, David F. 1982. The harmony of theory and practice: The engineering science of W. J. M. Rankine. T&C 23, 39–52.
- Crowe, Michael M.J. 1967. A history of vector analysis. London.
- Dahan, Amy 1980/81. Les travaux des Cauchy sur les substitutions. Etude de son approche du concept du groupe. AHES 23, 279–319.
- Dahan-Dalmedico, Amy 1985. La mathématisation de la théorie de l'élasticité par A.L. Cauchy et les débats dans la physique mathématique française (1800-1840). Science et Technique en Perspective 9, 1–100.
- Dauben, Joseph 1980. The development of Cantorian set theory. In: [Grattan-Guinness 1980, 181–219].
- 1981. Mathematical perspectives. Essays on mathematics and its historical development. New York - London.
- Deas, Herbert 1959. Cristallography and cristallographers in England in early nineteenth century: A preliminary survey. Centaurus 6, 129–148.
- Delone, B. N. 1976. Zum achtzehnten Hilbertschen Problem. In: [Alexandrov 1976, 254–258].
- Dieudonné, Jean 1973. Jordan, Camille. DSB 7, 167–169.
- 1974. Cours de l'géométrie algébrique, t. 1. Aperçu historique sur la développement de l'géométrie algébrique. Paris.
- (Ed.) 1978. Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900, 2 vol. Paris.
- Dugac, Pierre 1973. Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. AHES 10, 41–176.
- 1978. Fondements d'analyse. In: [Dieudonné 1978, 1, 335–392].
- Eccarius, Wolfgang 1976. August Leopold Crelle als Herausgeber des Crelleschen Journals. JfM 286/287, 5–25.
- 1977. August Leopold Crelle als Förderer bedeutender Mathematiker. Jb. DMV 79, 137–174.

- Edwards, Harold M. 1980. The genesis of ideal theory. *AHES* 23, 321–378.
- Egermann, Ralph; Wagner, Rosemarie 1987. Die ersten Drahtkabelbrücken. Beispiele konstruktiver Ingenieur Tätigkeit in der Entwicklung des Bauingenieurs zum eigenständigen Berufsstand. Düsseldorf.
- Elkana, Yehuda (Ed.) 1974. The interaction between science and philosophy. Atlantic Highlands.
- Engel, Friedrich 1911. Graßmanns Leben. In: Hermann Graßmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke, Band 3.2. Leipzig. Neudruck New York (Johnson) 1972.
- Engel, Peter 1984. The non characteristic orbits of space groups. Historical remarks. *Zs. Krist., Supplement 1*, 209–211.
- 1986. Geometric crystallography. An axiomatic introduction to crystallography. Dordrecht - Boston - Lancaster - Tokyo.
- Engelhardt, Dietrich von 1978. Bibliographie der Sekundärliteratur zur romantischen Naturforschung und Medizin 1950–1975. In: [Brinkmann 1978, 307–330].
- 1981. Zu einer Sozialgeschichte der romantischen Naturforschung. *Sudhoffs Archiv* 65, 209–225.
- Eulen, Focko 1969. Die Technologie als ökonomische und technische Wissenschaft an deutschen Universitäten des 18. Jahrhunderts. *TG* 36, 245–256.
- Everitt, C.W.F. 1974. Maxwell, James Clerk. *DSB* 9, 198–230.
- Ewald, Peter Paul 1962a. William Henry Bragg and the new cristallography. *Nature* 195, 320–325.
- (Ed.) 1962b. Fifty years of X-ray diffraction. Utrecht.
- Fabian, Eginhard 1986. Die Entdeckung der Kristalle. Leipzig (VEB Deutscher Verlag für die Grundstoffindustrien).
- Favaro, Anton 1881. Justus Bellavitis, eine Skizze seines Lebens und wissenschaftlichen Werkes. *Zs. MuP* 26, 153–169.
- Fischer, Emil 1962. Christian Samuel Weiss und seine Bedeutung für die Entwicklung der Kristallographie. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt Universität Berlin* 11, 249–255.
- 1963. Christian Samuel Weiss und die zeitgenössische Philosophie (Fichte, Schelling). *Forschungen und Fortschritte* 37, 141–143.
- Forbes, Eric 1975. Die Entwicklung der Navigationswissenschaft im 18. Jahrhundert. *Rete* 2, 307–321.
- Forman, Paul 1969. The discovery of the diffraction of X-rays by crystals. *AHES* 6, 38–71.
- 1970. Bragg, William Henry. *DSB* 2, 397–400.

- Fox, Robert 1970. The Laplacian programme for physics. *BANCRA*, 48, 429–437.
- 1974. The rise and fall of Laplacian physics. *HSPS* 4, 89–136.
- Freudenthal, Hans 1973. Lie, Marius Sophus. *DSB* 8, 323–327.
- 1974. The impact of von Staudt's foundations of geometry. In: R. S. Cohen (Ed.). For Dirk Struik. Dordrecht, 189–200.
- 1975. Schoenflies, Arthur Moritz. *DSB* 12, 195–196.
- Galiulini, R. V.; Senechal, Marjorie 1984. An introduction to the theory of figures: The geometry of E. S. Fedorov. *Structural Topology* 10, 5–22.
- Gillispie, Charles 1957. The natural history of industry. *Isis* 48, 398–407. Auch in: [Musson 1972/1977, 137–152].
- Goodman, D. C. 1969. Problems in crystallography in early nineteenth century. *Ambix* 16, 152–166.
- Grabiner, Judy 1981. The origins of Cauchy's rigorous calculus. Cambridge (Mass.).
- Grattan-Guinness, Ivor (Ed.) 1978. From the calculus to set theory, 1630–1910. An introductory history. London.
- 1981. Mathematical physics in France, 1800–1840. In: [Dauben 1981, 95–138].
- 1984. Work for the workers: Advances in engineering mechanics and instruction in France, 1800–1830. *An. Sci.* 41, 1–33.
- Gray, Jeremy J. 1979. Ideas of space. Euclidean, noneuclidean, and relativistic. Oxford.
- 1980. Olinde Rodrigues' paper of 1840 on transformation groups. *AHES* 21, 375–385.
- 1986. Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré. Boston – Basel – Stuttgart.
- 1987. Projective geometry and the axiomatisation of mathematics. Topics in the history of mathematics. Open university course MA 290, unit 15. Milton Keynes.
- Greitzer, Samuel 1971. Cremona, Antonio Luigi Gaudenzi Giuseppe. *DSB* 3, 467–469.
- Groth, Paul 1926. Entwicklungsgeschichte der mineralogischen Wissenschaften. Berlin. Neudruck Wiesbaden 1970.
- Grünbaum, Branko; Shepard, G.C. 1986. Tilings and patterns. New York.
- Guldberg, Alf 1913. Verzeichnis über den wissenschaftlichen Nachlaß von Sophus Lie. Zweite Mitteilung. Videnskabs-Selskabets Skrifter, Math. Naturw. Kl. 1913, No. 5. Christiania. (Für 1. Mitteilung siehe [Størmer 1905]).

- Hahn, Theo (Ed.) 1983. International tables for cristallography, vol. 4. Space group symmetry. Dordrecht - Boston. (Für vol. 1, siehe [Henry/Lonsdale 1969]).
- Hänseroth, Thomas 1985. Die "Mechanik der Baukunst" — Zum 150. Todestag des Begründers der Baumechanik L. M. H. Navier (1785–1836). *NTM* 22 (2), 33–41.
- Hallet, Michael 1979. Towards a theory of mathematical research programmes. *British Journal for the Philosophy of Science* 30, 1–25, 135–159.
- Hamilton, S. B. 1952. The historical development of structural theory. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 1, 374–419.
- 1958. Building materials and techniques. In: [Singer 1958, 466–498].
- Hartenberg, R. S. 1971. Culmann, Karl. *DSB* 3, 495–497.
- Hartkopf, Werner 1970/71. Die Dialektik der Natur bei Schelling. *Hegel-Jahrbuch*, 164–169.
- Hartshorne, Robin 1967. Foundations of projective geometry. New York.
- Hawkins, Thomas 1970. Lesbesgue's theory of integration. Madison.
- 1975. Cauchy and the spectral theory of matrices. *HM* 2, 1–29.
- 1980. The origins of modern theories of integration. In: [Grattan-Guinness 1980, 149–180].
- 1982. Wilhelm Killing and the structure of Lie algebras. *AHES* 26, 127–192.
- 1984. The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflections on its place in the history of mathematics. *HM* 11, 442–470.
- Heinrich, B. 1979. Am Anfang war der Balken; zur Kulturgeschichte der Steinbrücke. *Kulturgeschichte der Naturwissenschaften und der Technik* 2. München (Deutsches Museum).
- Henneberg, Lebrecht 1903. Die graphische Statik der starren Körper. *EMW* 4.1, 345–434.
- Hensel, Susann 1987a. Die Auseinandersetzungen um die mathematische Ausbildung der Ingenieure an den Technischen Hochschulen Deutschlands Ende des 19. Jahrhunderts. Dissertation Karl-Marx-Universität Leipzig. Maschinenschrift.
- 1987b. Anlage zur Dissertation (1987a). Leipzig. Maschinenschrift.
- Hensel, Susann; Purkert, Walter 1986. Zur Rolle der Mathematik bei der Entwicklung der Technikwissenschaften, Teil I. *Dresdener Beiträge zur Geschichte der Technikwissenschaften* 11, 3–53.
- 1986/87. dito, Teil II. Manuskript.
- Henry, N. F. M.; Lonsdale, K. (Eds.) 1969. International tables for X-ray cristallography, vol. 1. Symmetry groups. Birmingham, 3rd. edition. (Für vol. 4, siehe [Hahn 1983]).

- Herivel, John W. 1966. Aspects of French theoretical physics in the 19th century. *BJHS* 3, 109–132.
- Hermann, Armin 1973. Laue, Max von. *DSB* 8, 50–53.
- 1976. Dynamismus und Atomismus. Die beiden Systeme der Physik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. *Erkenntnis* 10, 311–322.
- 1977. Schelling und die Naturwissenschaften. *TG* 44, 47–53.
- Hertwig, A. 1941. Die Entwicklung der Statik der Baukonstruktionen im 19. Jahrhundert. *TG* 30, 82–98.
- Heyman, Jaques 1972. Coulomb's mémoire on statics. Cambridge.
- Hofmann, Karl H. 1983. On Sophus Lie's fundamental theorems I. *Indagationes Mathematicae* 45, 453–466.
- 1985. Semigroups in the 19th century? A historical note. Preprint No. 874, Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule Darmstadt.
- Holser, William T. 1970. Barlow, William. *DSB* 1, 460–463.
- 1976. Weiss, Christian, Samuel. *DSB*, 14, 239–242.
- Hoykaas, R. 1952. The species concept in eighteenth-century mineralogy. *AIHS* 31, 45–55.
- International tables for crystallography. Für vol. 1 siehe [Hahn 1983], für vol. 4 [Henry/Lonsdale 1969].
- Jahn, Ilse; Löther, Rolf; Senglaub, Konrad (Hrsg.) 1982. Geschichte der Biologie. Theorien, Methoden, Institutionen und Kurzbiographien. Jena.
- Jahnke, Hans-Niels 1982. Zum Verhältnis von Bildung und wissenschaftlichem Denken am Beispiel der Mathematik. Eine Kontroverse um den mathematischen Lehrplan der preußischen Gymnasien 1829–30 und ihr methodologischer Kontext. In [Bekemeier u.a. 1982, 1, 3–228].
- Johnson, Dale 1979. Invariance of dimension. *AHES* 20, 97–188.
- Kißler, Gerhard 1974. Wechselbeziehungen zwischen Kristallographie und Geometrie zu Beginn des 19. Jahrhunderts. Dissertation TU München. Maschinschrift.
- Klein Felix 1926/1927. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, 2 Bde. Berlin. Neudruck New York (Chelsea) 1967. Neudruck Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo (Springer) 1979.
- Klemm, Friedrich 1954. Technik. Eine Geschichte ihrer Probleme. Freiburg – München.
- 1966. Die Rolle der Mathematik in der Technik des 19. Jahrhunderts. *TG* 33, 72–90.
- Klemm, Martin 1982. Symmetrien von Ornamenten und Kristallen. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo.

- Kötter, Ernst 1901. Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). *Jb. DMV* 5 (2), 1–486.
- Krafft, Fritz 1971. *Geschichte der Naturwissenschaften 1. Die Begründung einer Wissenschaft von der Natur durch die Griechen*. Freiburg.
- Krimmel, Bernd e.a. 1986. *Symmetrie in Kunst, Natur und Wissenschaft. Ausstellungskatalog Mathildenhöhe Darmstadt, 1. Juni bis 24. August 1986, Band 1 — Texte*. Darmstadt.
- Kuhn, Thomas 1976. Mathematical versus experimental traditions in the development of physical sciences. *Journal of Interdisciplinary History* 7, 1–31.
- Kurrer, Karl-Eugen 1981. *Gewölbetheorien im 19. Jahrhundert. Teil B, Diplomarbeit Fachbereich 7 TU Berlin. Maschinenschrift*.
- 1985a. Das Verhältnis von Bautechnik und Statik. *Bautechnik* 62, 1–4.
- 1985b. Zur Geschichte der Theorie der Nebenspannungen in Fachwerken. *Otto Mohr zum 150. Geburtstag. Ebda.*, 62, 325–330.
- 1987a. Beitrag zur Entwicklung des Kraftgrößenverfahrens. *Ebda.* 64, 1–8.
- 1987b. Die Baustatik in Frankreich und Deutschland im frühen 19. Jahrhundert. *Humanismus und Technik (Jahrbuch Mai 1987)*, 1–24.
- 1987c. Konstruktiver Ingenieurbau. In: T. Buddensieg (Hrsg.). *Wissenschaften in Berlin: Begleitband zur Ausstellung "Der Kongreß Denkt" vom 14. Juni bis 1. November 1987*. Berlin, 178–183.
- Lakatos, Imre 1976. *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*. Cambridge.
- 1980. *The methodology of scientific research programmes. Philosophical Papers 1*. Cambridge.
- Laue, Max von 1952. Historical introduction. In: [Henry/Lonsdale 1952/1969, 1–5].
- Lesbesgue, Henry 1923. Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan (1838–1922). *Mém. AS* (2) 58, 29–66. *Oeuvres de Camille Jordan* 4, Paris 1964, X–XXXIII.
- Liebisch, Th.; Mügge, O.; Schoenflies, Arthur 1905. *Krystallographie*. *EMW* 5.7, 391–492.
- Lindemann, Ferdinand 1896. Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen. *Sb. BAW* 26, 625–748.
- 1934. Zur Geschichte der Polyeder. *Sb. BAW*, 265–275.
- Lipsmeier, Antonius 1969. *Technik, allgemeine Pädagogik und Berufspädagogik*. *TG* 36, 133–146.
- Locke, Robert 1977. Industrialisierung und Erziehungssystem in Frankreich und Deutschland vor dem 1. Weltkrieg. *HZ* 225, 265–296.

- Lohmann, Hans-Dieter 1980. Die Herausbildung der technischen Thermodynamik im 19. Jahrhundert in Deutschland. *DBGT* 2, 68–85.
- Lorch, J. 1974. The charisma of crystals. In: [Elkana 1974, 455–462].
- Lorenz, Hans 1940. Die Entwicklung der Maschinentheorie im 18. und 19. Jahrhundert. *TG* 29, 1–14.
- Lützen, Jesper 1982. The prehistory of the theory of distributions. *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences* 7. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo.
- Manegold, Karl Heinz 1968. Felix Klein als Wissenschaftsorganisator. *TG* 35, 177–204.
- 1969. Das Verhältnis von Naturwissenschaft und Technik im Spiegel der Wissenschaftsorganisation. *TG-E* 11, 141–187. Wiederabdruck in: [Mauel/Treue 1976, 253–263].
- 1970. Universität, Technische Hochschule und Industrie. *Schriften zur Wirtschafts- und Sozialgeschichte* 16. Berlin.
- Marx, Carl 1825. *Geschichte der Crystallkunde*. Karlsruhe. Neudruck Wiesbaden (Sändig) 1970.
- Mauel, Kurt 1969. Die Aufnahme naturwissenschaftlicher Erkenntnisse durch die Ingenieure im 19. Jahrhundert. *TG-E* 11. Wiederabdruck in [Mauel/Treue 1976, 330–351].
- 1974. Der Verein Deutscher Ingenieure und seine Einflußnahme auf die Ingenieurausbildung an den Technischen Hochschulen und Ingenieurschulen. *HuT* 18, 91ff.
- ; Treue, Wilhem (Hrsg.) 1976. *Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft im 19. Jahrhundert*, Bd. 1, Göttingen.
- Mauersberger, Klaus 1980. Die Herausbildung der technischen Mechanik und ihr Anteil an der Verwissenschaftlichung des Maschinenwesens. *DBGTW* 2, 1–52.
- 1982. Keime der Technikwissenschaften im Schoße der Naturwissenschaften am Beispiel des Werkes von Leonhard Euler. *DBGTW* 5, 103–126.
- 1985. Vergleichende Betrachtungen zur Herausbildung der technischen Mechanik und Maschinenlehre in England, Frankreich und Deutschland bis Mitte des 19. Jahrhunderts. *NTM* 22 (2), 25–32.
- Mauskopf, Seymour H. 1976. Crystals and compounds. Molecular structure and composition in nineteenth century French science. *Transactions American Philosophical Society, New Series* 66, 3–82.
- Mayr, Otto 1968. Symbolsprachen für mechanische Systeme im 19. Jahrhundert. *TG* 35, 223–240.

-
- 1973. Von Charles Talbot Porter zu Johann Friedrich Radinger: Die Anfänge der schnellaufenden Dampfmaschine und der Maschinendynamik. *TG* 40, 1–32.
- Melhado, Evan, M. 1980. Mitscherlich's discovery of isomorphism. *HSPS* 11, 87–123.
- Menghini, Marta 1986. Notes on the correspondence between Luigi Cremona and Max Noether. *HM* 13, 341–351.
- Meniaïlov, A. 1972. Fyodorov (or Fedorov), Evgraph Stepanovich. *DSB* 5, 210–214.
- Miller, William H. 1868. On the crystallographic method of Grassmann. *Proc. Cam. Phil. Soc.* 2, 75–99.
- Milnor, John 1974. Hilbert's problem 18 on crystallographic groups, fundamental domains and on sphere packing. In: *Mathematical Development arising from Hilbert Problems. Proceedings Symposium Pure Mathematics* 28, De Kalb 1974, 491–506.
- Musson, Albert (Ed.) 1972. *Science, technology, and economic growth in the eighteenth century*. London. Dtsch. von H. Vetter: *Wissenschaft, Technik und Wirtschaftswachstum im 18. Jahrhundert*. Frankfurt 1977.
- Neubüser, Joachim; Plesken, W.; Wondratschek, Hans 1981. An emandatory discussion on defining crystal systems. *Communications in Mathematical Chemistry* 10, 77–96.
- Niles, A. S. 1950. Clerk Maxwell and the theory of indeterminate structures. *Engineering* 170, 194–198.
- Noether, Max 1900. Sophus Lie. *MA* 53, 1–41.
- Novy, Lubos 1973. *Origins of modern algebra*. Prague – Leyden.
- Parkinson, E. M. 1975. Rankine, William John Macquorn. *DSB* 11, 291–295.
- Pauffler, Peter 1986. *Physikalische Kristallographie*. Weinheim.
- Pedoe, Dan 1975a. Notes on the history of geometric ideas I. Homogeneous coordinates. *Math. Mag.* 48, 215–217.
- 1975b. Notes on the history of geometric ideas II. The principle of duality. *Math. Mag.* 48, 274–277.
- Pont, Jean-Claude 1974. *La topologie algébrique des origines à Poincaré*. Paris.
- Purkert, Walter 1971. Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs I. *NTM* 8 (1), 23–37.
- 1972. Die Entwicklung des abstrakten Körperbegriffs. Dissertation KMU Leipzig. Maschinenschrift. Erscheint in: *Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik*. Göttingen.
- 1973. Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs II. *NTM* 10, (2), 8–20.

- 1981. Zum Verhältnis von Mathematik und technischen Wissenschaften im 19. Jahrhundert. *Acta Rerum Naturalium nec non Technicarum*, Special Issue 19, 343–361.
- 1983. Zum Verhältnis von Mathematik und Anwendungen zwischen 1871 und 1917. In: [Wendel 1983, 117–128].
- Pyenson, Lewis 1983. *Neohumanism and the persistence of pure mathematics in Wilhelminian Germany*. Philadelphia.
- Ramme, Walter 1939. *Die geschichtliche Entwicklung der Statik in ihrer Beziehung zum Bauwesen*. Braunschweig.
- Reich, Karin 1979. *Die Entwicklung des Tensorkalküls*. Habilitationsschrift München. Maschinenschrift.
- 1986. Wie die Vektorrechnung in die Differentialgeometrie Eingang gefunden hat. Vortragszusammenfassung. 1. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik. Sonderdruck Institut für Technische Mechanik, TU Wien. Ergänzungsband, 38–40.
- Reinhardt, Kurt 1886. Vorbemerkung zur Nachlaßedition von Möbius "Theorie der symmetrischen Figuren". In (Möbius 1885, 563–566).
- 1887. Über die Entstehungszeit und den Zusammenhang der wichtigsten Schriften und Abhandlungen von Möbius. In: (Möbius 1887, 700–728).
- Richards, Joan 1979. The reception of a mathematical theory: non-euclidean geometry in England 1868–1883. In: B. Barnes; S. Sharpin (Eds.). *Natural order. Historical studies of scientific culture*. Beverley Hills – London, 143–166.
- Richenhagen, Gottfried 1985. *Carl Runge (1856–1927): Von der reinen Mathematik zur Numerik*. Studien zur Wissenschafts-, Bildungs- und Sozialgeschichte der Mathematik 1. Göttingen.
- Richter, Siegfried 1984. *Methodenentwicklung und Methodenstreit in Lehre und Forschung der mechanischen Technologie im 19. Jahrhundert in Deutschland*. *DBGTW* 10, 3–42.
- Rowe, David o.D. *Reflections on the mathematical and personal relationship of Felix Klein and Sophus Lie with a transcription of Klein's unpublished Manuscript "Über Lie's und meine ältere geometrische Arbeiten"*. Manuskript ohne Datum. Erscheint in *Isis*.
- Rühlmann, Moritz 1885. *Vorträge über die Geschichte der technischen Mechanik*. Leipzig. Neudruck Hildesheim (G. Olms) 1979.
- Russo, François 1968. *Groupes et géométries. La genèse du programme d'Erlangen de Felix Klein*. Paris.
- Šafranovskij (Shafranovsky), Ilarion Ilarionovič 1963. *Evgraph Stepanovič Fedorov*. Moskva – Leningrad.
- 1980. *Istorija kristallografii*, 19 v. Leningrad.

- Scharlau, Winfried (Hrsg.) 1981. Richard Dedekind 1831/1981. Braunschweig.
- Schminnes, Bernd 1982. Kameralwissenschaften — Bildung — Verwaltungstätigkeit. Soziale und kognitive Aspekte des Struktur- und Funktionswandels der preußischen Zentralverwaltung an der Wende zum 19. Jahrhundert. In: [Bekemeier e.a. 1982, 2, 99–319].
- Schneider, Ivo 1981. Herausragende Einzelleistungen im Zusammenhang mit der Kreisteilungsgleichung, dem Fundamentalsatz der Algebra und der Reihenkonvergenz. In: Ders. (Hrsg.). Carl Friedrich Gauß (1777–1855). München, 37–64.
- Schoenflies, Arthur 1909. Projektive Geometrie. *EMW 9.1*, 389–480.
- Scholz, Erhard 1980. Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré. Basel – Boston – Stuttgart.
- 1982. Herbart's influence on Bernhard Riemann. *HM 9*, 413–440.
- 1983. Zur Entstehung und Durchsetzung des Vektorraumbegriffs. In: E. Brieskorn. *Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1*. Braunschweig, 333–336.
- 1984a. Projektive und vektorielle Methoden in Culmanns graphischer Statik. *NTM 21 (2)*, 49–64.
- 1984b. Hermann Graßmanns Analysis in Vektorräumen. *Mathematische Semesterberichte 31*, 177–194.
- Schreier, Wolfgang 1977. Zur Herausbildung der Elektrotechnik — ein Beitrag über Wechselwirkungen zwischen Elektrizitätslehre und elektrotechnischer Produktion zwischen 1800 und 1890. *NTM 14*.
- Schubring, Gert 1983. Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jahrhundert. Studien und Materialien zum Prozeß der Professionalisierung in Preußen (1810–1870). Weinheim – Basel.
- Schütt, Hans-Werner 1984. Die Entdeckung des Isomorphismus. Hildesheim.
- 1985. Die französische Mineralogie und die Kristallstrukturtheorie von Gabriel Delafosse. *Sudhoffs Archiv 69*, 1–7.
- Schuster, Julius 1922a. Christian Samuel Weiß und die Naturphilosophie. In: H. Degering; K. Christ; J. Schuster (Hrsg.). *Aus der Handschriften-Abteilung der Preußischen Staatsbibliothek. Ludwig Darmstaedter zum 75. Geburtstag*. Berlin, 87–97.
- 1922b. Christian Samuel Weiß' kristallographisches System und René Just Häüy. *Ebda.*, 97–103.
- Schwarzenberger, R. L. E. 1980. *N-dimensional crystallography*. San Francisco – London – Melbourne.
- Selow, Edith 1975. Schelling, Frederick (!) Wilhelm Joseph. *DSB 12*, 153–159.

Erhard Scholz

Symmetrie
Gruppe
Dualität

Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik
und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik
des 19. Jahrhunderts

1989

Birkhäuser Verlag
Basel · Boston · Berlin

Die Reihe ‚Science Networks. Historical Studies‘ erscheint im Birkhäuser Verlag Basel und im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Adresse des Autors:
Erhard Scholz
Bergische Universität
Gesamthochschule Wuppertal
Fachbereich 7 – Mathematik
Postfach 1000127
D-5600 Wuppertal 1

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Scholz, Erhard:

Symmetrie, Gruppe, Dualität : zur Beziehung zwischen theoret.
Mathematik u. Anwendungen in Kristallographie u. Baustatik
d. 19. Jh. / Erhard Scholz. – Basel ; Boston ; Berlin :
Birkhäuser, 1989

(Science networks historical studies ; Bd. 1)

ISBN-13: 978-3-0348-9971-0 e-ISBN-13: 978-3-0348-9267-4

DOI: 10.1007/978-3-0348-9267-4

NE: GT

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Die Vergütungsansprüche des § 54, Abs. 2 UrhG werden durch die ‚Verwertungsgesellschaft Wort‘, München, wahrgenommen.

Die Originalausgabe erscheint im Birkhäuser Verlag Basel
Vertrieb für alle Staaten mit Ausnahme der sozialistischen Länder:
Birkhäuser Verlag Basel.
Vertrieb für die sozialistischen Länder:
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
© Birkhäuser Verlag Basel, 1989
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1989
Umschlaggestaltung: Albert Gomm, Basel

Inhalt

Verzeichnis der Tabellen und Figuren	11
Einleitung	13
Kapitel I	
Die Symmetriekonzepte der Kristallographie und ihre Beziehungen zur Algebra des 19. Jahrhunderts	17
Vorbemerkungen	17
§1 Von der phänomenologischen Kristallklassifikation zur Einführung der Kristallsysteme und Kristallklassen	19
1.1 Kristallklassifikation im 18. Jahrhundert: Werner und Romé de l'Isle	19
1.2 Beginnende Mathematisierung im atomistischen Programm: R.J. Haüy	24
1.3 Konstituierung eines alternativen Theoretisierungspro- gramms unter dem Einfluß der dynamistischen Philosophie .	29
1.4 Charakterisierung der Kristallsysteme durch C.S. Weiß	32
1.5 M.L. Frankenheims Entdeckung der 32 Kristallklassen	43
§2 Rationale Vektorräume, Punktsymmetrien und Raumgittertypen im dynamistischen Programm	48
2.1 J.G. Graßmanns "Geometrische Combinationslehre"	48
2.2 Rationale Vektorräume in der Kristallographie gegen Ende der 1820er Jahre	53

2.3 Hessels Klassifikation der endlichen räumlichen Punktsymmetriesysteme	55
2.4 Hessels Bestimmung der Kristallklassen	62
2.5 Frankenheims Interpretation der "Grundformen" als Ausdruck der Symmetrie von Kristallgittern	65
2.6 Zur Rolle des dynamistischen Programms bei der Ausarbeitung elementarer Symmetriekonzepte und des Vektorraumbegriffs	72
§3 Punkt- und Raumgittersymmetrien im atomistischen Programm der Jahrhundertmitte (A. Bravais)	74
3.1 Modernisierung des atomistischen Programms	74
3.2 Bravais' Klassifikation der Punktsymmetrien	76
3.3 Bravaissysteme, Raumgittertypen und ihre Isometrien	81
3.4 Bravais' kristallographische Theorie und die implizite Verwendung von 71 der 73 symmorphen Raumgruppentypen	89
§4 Die Einführung des Gruppenbegriffs in die Geometrie	94
4.1 Gruppen vor und in den 1860er Jahren	94
4.2 Jordans Klassifizierung der Bewegungsgruppen des euklidischen Raumes	97
4.3 Zum Einfluß des Jordanschen Mémoires bei der Herausbildung des Transformationsgruppenkonzepts durch S. Lie und F. Klein	103
§5 Gruppen in der Kristallographie — die Entdeckung der 230 Raumgruppentypen	110
5.1 Erste Nutzbarmachung des Jordanschen Mémoires für die Kristallographie: L. Sohncke und B. Minnigerode	110
5.2 Fedorovs Arbeiten zur geometrischen Kristallographie bis 1889	114
5.3 Schoenflies' Herleitung von 227 kristallographischen Raumgittertypen bis 1889	120
5.4 Fedorovs Entdeckung der 230 kristallographischen Raumgittertypen und seine Kristallstrukturtheorie	125
5.5 Schoenflies' systematische Darstellung der Theorie der kristallographischen Raumgruppen von 1891	137
5.6 Ausblick auf spätere Entwicklungen	148

Kapitel II	
Methoden der projektiven Geometrie in der graphischen Statik	155
Vorbemerkung	155
§6 Culmanns Entwurf eines Theoretisierungsprogramms der graphischen Statik	157
6.1 Verwissenschaftlichung der Technik im 19. Jahrhundert	157
6.2 Fachwerktheorie und graphische Statik	160
6.3 Implizit vektorielle Ansätze in Culmanns “Graphischer Statik” von 1866	167
6.4 Culmanns Theoretisierungsprogramm	170
§7 Dualität von Stab- und Kräftediagrammen bei Rankine, Maxwell und Cremona	181
7.1 Entdeckung der Rankine-Maxwellschen Dualität	181
7.2 Maxwells Theorie der reziproken Diagramme	187
7.3 Exkurs: Flächentopologie und Starrheitsbedingungen von Fachwerken bei Maxwell	191
7.4 Theoretische Weiterentwicklungen bei Cremona und anderen	193
7.5 Aufnahme der Maxwell-Cremonaschen Dualität in der Ingenieurwissenschaft	199
§8 Spätere Beiträge Culmanns zur Realisierung seines Programms	202
8.1 Einführung algebraischer Symbolik	202
8.2 Neuauflage der “Graphischen Statik” von 1875	207
8.3 Exkurs: Nullsysteme bei Möbius und von Staudt	212
8.4 Räumliche Kräftekomposition in Culmanns Neuauflage der “Graphischen Statik”	216
§9 Die graphische Statik im Disziplinbildungsprozeß der Baustatik	220
9.1 Selektive Rezeption der graphischen Statik und Beginn eines Alternativprogramms	220
9.2 Culmanns Programm im Lichte des Methodenstreits der Technikwissenschaften	225
9.3 Theoretisierungsstil und Fruchtbarkeit von Forschungsprogrammen	231

Kapitel III	
Mathematik und Mathematisierung von Natur- und Technikwissenschaften im 19. Jahrhundert	235
Vorbemerkungen	235
§10 Mathematisierung der Kristallographie und der graphischen Statik — vergleichende Beobachtungen und ein Vorschlag zur Terminologie	237
10.1 Vier Beobachtungen und eine Vermutung zur Beziehung zwischen Kristallographie und Gruppentheorie	237
10.2 Autonome Mathematik und heteronome Mathematisierung	244
10.3 Zum Vergleich der Ergebnisse der Fallstudien	247
§11 Bemerkungen zur autonomen und heteronomen Mathematik im 19. Jahrhundert	250
11.1 Entdeckung der Autonomie der Mathematik zu Beginn des 19. Jahrhunderts	250
11.2 Neustrukturierung der Anwendungsbezüge der autonomen Mathematik ab letztem Drittel des 19. Jahrhunderts	255
Anmerkungen	261
Anhang	325
Anhang 1: Überblick kristallographische Raumgruppen	325
1.1 Grundlegende Begriffe	326
1.2 Geometrische Klassifikation der kristallographischen Raumgruppen	329
1.3 Arithmetische Klassifikation	337
1.4 Geometrische Erweiterungen	342
Anhang 2: Tabellen und Figuren für $n = 3$	348
Konventionen/Notationen	356
Quellen und Literaturverzeichnis	359
Verwendete Abkürzungen	359
Archivalia	362
Publizierte Quellen	363
Fachliteratur	384
Index	399
Personenverzeichnis	399
Sachverzeichnis	403

Verzeichnis der Tabellen und Figuren

Tabellen

1. Symmetriereduktion auf Halbflächner bei Weiß	38
2. Hessels 7 Achsentypen	57
3. Frankenheims "Ordnungen/Grundformen"	69
4. Kombination von Symmetrieelementen bei Bravais	78
5. Bravais' 23 Klassen "symmetrischer Polyeder"	80
6. Bravais' Symmetrietypen ebener Netze	85
7. Die 7 Bravaisschen Gittersysteme	86
8. Bravais' "Arten der Symmetrie" von Gittern (Gittertypen)	88
9. Kristallklassen in Schoenflies-Notation und internationaler kristallographischer Notation	349
10. Raumgittersysteme und Raumgittertypen	352
11. Bravaissche (symmorphie) Gruppen in semidirekter Produkt Darstellung, internationaler Symbolik, Schoenflies- und Fedorov-Notation	354

Figuren

1. Romé de l'Isles Modifikationsserie des Würfels mit impliziter Symmetrie T_h	23
2. Symmetriereduktionen in der Modifikationsserie des Würfels bei Romé de l'Isle	23
3. Einfache holoedrische Formen des isometrischen Systems	35
4. Ableitung "halbflächiger" Gestalten des isometrischen Systems nach C.S. Weiß	39
5. Kristallklassifikation bei Frankenheim	70
6. Die 5 affinen Typen konvexer Paralleloeder	118
7. Einfaches Seilpolygon	162
8. Varignons Druckpolygon in der Ebene	162
9. Seil- und Kräftepolygon in der Ebene	163
10. Belastungskurve am elliptischen Gewölbe nach Culmann	178
11. "Fugen-" und "Druckbüschel" bei Culmann	178
12. Maxwell-duale Diagramme	183
13. Maxwells Beispiel für duale Diagramme an einem Dachträger ...	188
14. Duale Diagramme nach Cremona	197
15. Symmetriekarten der 32 geometrischen Kristallklassen	350