

Dualität in der graphischen Statik

Erhard Scholz*

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	2
1 Seil- und Kräftepolygon	4
2 Stabnetze/Fachwerke	6
3 Rankine-Maxwell Reziprozität	8
4 Culmanns Reziprozität von Seil- und Kräftepolygon	16
5 Kleiner Exkurs: Nullsysteme	20
6 Cremonas <i>Figure reciproche nella statica grafica</i>	22
7 Abschließende Bemerkungen	27
Literatur	28

*Universität Wuppertal, scholz@math.uni-wuppertal.de

Vorbemerkungen

Mit der Verbreitung der darstellenden Geometrie in der Ingenieurausbildung des 19. Jahrhunderts wurden graphische Methoden über ihren ursprünglichen Einsatz zur Darstellung geometrischer Objekte hinausgehend auch für die Analyse physikalisch-technischer Größenbeziehungen eingesetzt. In der zweiten Jahrhunderthälfte spielten graphische Methoden einige Jahrzehnte lang in der Baustatik der deutschsprachigen Ländern, in England und in Italien eine wichtige Rolle, in den 1890er Jahren in geringerem Maße auch in Frankreich (Kurrer, 2002, 2018; Chatzis, 2004). K.-E. Kurrer misst ihnen in seiner beeindruckenden Geschichte der Baustatik eine wichtige Rolle für die Disziplinbildung der Baustatik zu. Als ihr Hauptvertreter gilt Karl Culmann, der seit Gründung des Eidgenössischen Polytechnikums 1855 in Zürich lehrte und dort den Namen und Charakter des Lehrfaches *Graphische Statik* prägte. Dies siedelte er in Sprache und Gedankenführung in enger Nachbarschaft zur projektiven Geometrie an (Culmann, 1866, 1875).

Kurrer identifiziert im Rückblick eine zentrale Rolle der graphischen Statik während der *Etablierungsphase* der Baustatik als wissenschaftliche Disziplin in den Jahrzehnten von etwa 1850 bis etwa 1875. Die von Culmann avisierte enge Beziehung von graphischen Methoden der Baustatik zu projektiven Geometrie – und damit die graphische Statik im engeren (Culmannschen) Sinne – verlor allerdings schnell an Bedeutung. Dagegen gewannen graphische Rechenmethoden zur Analyse verschiedenster Probleme auch über die Baustatik hinaus zunächst noch an Bedeutung und blieben bis in die ersten beiden Jahrzehnte des 20. Jahrhunderts in weitem Gebrauch (Tournès, 2000). Kurrer bezeichnet diese auch in der Baustatik weiter verwendeten – allerdings vom Bezug zur projektiven Geometrie bereinigten – Methoden im Unterschied zur graphischen Statik im Culmannschen Sinne als *graphische Analyse* (Kurrer, 2018, p. 457ff.). Der folgende Beitrag konzentriert sich auf einen Aspekt aus dem Themenfeld der graphischen Statik im engeren Sinne, den dort auftretenden Dualitätseffekten, die in den genannten Jahrzehnten 1850 bis in die 1870er Jahre hinein das Augenmerk theoretisch orientierter Autoren auf sich zogen.¹

Etwa gleichzeitig zu Culmanns Bestrebungen, die graphischen Methoden der Statik in Zürich als Lehrfach zu etablieren, und unabhängig von ihm analysierte der schottische Natur- und Ingenieur-Wissenschaftler William John Macquorn Rankine Gleichgewichtsbedingungen an fachwerkartigen Tragstrukturen. Sein Kollege James Clark Maxwell bemerkte in den von ihm verwendeten Diagrammen, eine auffällige *Reziprozität* und widmete ihr in den folgenden Jahren eine Reihe weiterer kleinerer Arbeiten. In der zweiten Hälfte der 1860er Jahre entwickelte er daraus sogar eine praxistaugliche Methode zur Analyse der Kräfteverteilung in entsprechenden Tragwerken.

¹Siehe dazu (Scholz, 1989, Kap. II), auf dem dieser Beitrag wesentlich beruht.

Maxwell fand die dabei auftretenden Beziehungen so interessant, dass er auch später noch einmal auf dieses Thema zurück kam und eine weitere theoretische Arbeit zu diesem Thema folgen ließ (1870). Auch er verwies auf Beziehungen zur projektiven Geometrie, insbesondere durch eine Charakterisierung der von ihm verwendeten reziproken Diagramme als durch eine Polarreziprozität verwandt. Sie spielte aber für ihn nur eine Nebenrolle; seine Überlegungen wiesen eher in die Richtung der erst später explizit entwickelten Konzepte einer kombinatorisch-topologischen Dualität der Diagramme.

Culmann war dagegen von projektiven Dualitätsbeziehungen in den Diagrammen der graphischen Statik fasziniert. Seine Überlegungen schlossen dabei an die an der *École Polytechnique* gelehrt Methode von *Seil-* und *Kräftepolygon* an. Er war überzeugt, dass deren Beziehung einen Hinweis auf einen tiefer liegenden begrifflichen Zusammenhang zwischen den graphischen Methoden der Statik und der projektiven Geometrie enthielt, und versuchte, diesen offenzulegen. In der Tat gelang es ihm, unter gewissen Bedingungen, Kräfte und Seilpolygon durch eine projektive Korrelation in der Ebene, also eine Dualität, miteinander in Beziehung zu setzen. Allerdings konnte er nur in speziellen Fällen die von ihm identifizierte projektive Verwandtschaft für praktische Aufgaben der Baustatik einsetzen, etwa bei der Analyse der Kräfteverteilung in elliptischen Bogenträgern.

Im Rahmen des Aufbaus einer wissenschaftlichen Ingenieurausbildung während der schrittweisen Herausbildung des eigenen Nationalstaats Italien, dem *Risorgimento* zwischen etwa 1848 bis 1870, wurde Culmanns Programmatik der graphischen Statik auch an den italienischen Hochschulen mit Interesse aufgenommen, gerade auch wegen deren ausgeprägter Beziehung zur projektiven Geometrie. Im Jahre 1872 verfasste der bekannte Geometer *Luigi Cremona* (1830–1903) eine theoretische Studie zur graphischen Statik, in der er die Maxwell-Rankinesche Reziprozität ebener Diagramma auf eine duale projektive Korrelation im Raum vom Typ eines *Nullsystems* zurückführte (Cremona, 1872). Aus theoretischer Sicht war dies ein schönes Ergebnis. Es führte aber nicht zu einer Weiterentwicklung der graphischen Statik, die der von den Ingenieurwissenschaften im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts eingeschlagenen Orientierung auf ein spezifisch technisch ausgerichtete Wissenschaftsprofil entsprach.

Die Dualitätsphänomene der Diagramme in der graphischen Statik blieben so eine Episode in einem Übergangsstadium der Baustatik zu wissenschaftlichen Disziplin im Sinne der *Moderne* des ausgehenden 19. und des 20. Jahrhunderts (Kurrer, 2018).

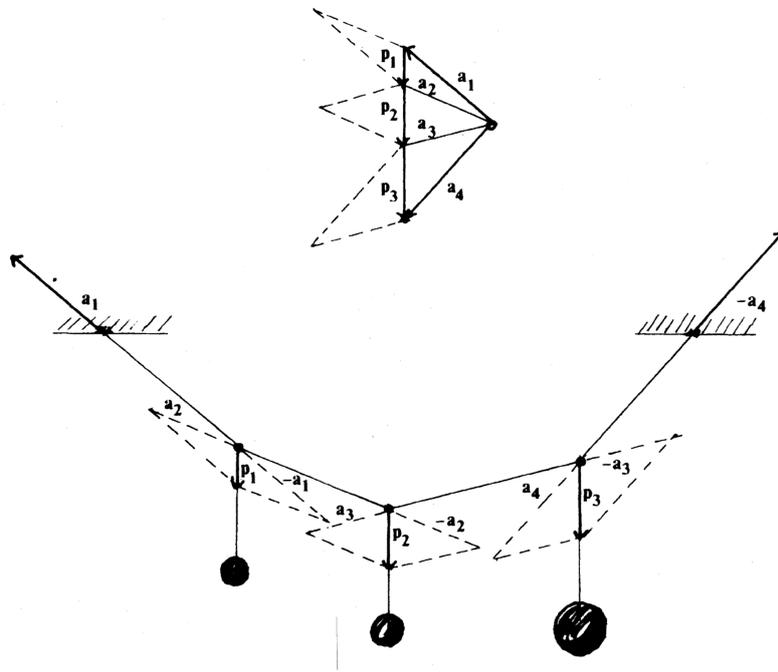


Abbildung 1: Kräftezerlegung am Seilpolygon nach Varignon (unten) ,
 oben das zugehörige Kräftepolygon (Quelle (Scholz, 1989, p. 162)) nach
 (Varignon 1725, t. 1, Tafel 11)

1 Seil- und Kräftepolygon

Zur Analyse der Kräfteverteilung, und letztlich zur Formulierung von Stabilitätsbedingungen, an einem Bauwerk ist die Zerlegung eines (diskreten oder kontinuierlichen) Systems äußerer Kräfte in Richtung der Tragwerksglieder zu analysieren. Bei ausreichendem Wissen über die Materialeigenschaften kann dann die Frage geklärt werden, ob das Bauwerk bei vorgegebenem Material und bekannter Geometrie der Tragwerksglieder den Lasten standhält. Methoden zu eine entsprechenden Analyse sind möglicherweise schon in der Antike und im Mittelalter gesucht worden; für die Baupraxis hat man sich jedoch lange Zeit mit geometrischen Dimensionierungsregeln behelfen müssen (Straub, 1949, Kap. 1, 2). Aus der frühen Neuzeit liegen uns die ersten wissenschaftliche Studien zu diesem Thema vor, darunter etwa die von *Philippe de la Hire* (1640–1718) und *Pierre Varignon* (1654–1722).

Varignon argumentierte mit einer einfachen graphischen Kräftezerlegung diskreter, an einem Seil angreifender Lasten (Abb.1). Er schlug vor, die Kräfteverteilung an einem Gewölbe durch eine (zum Seilpolygon) spiegelsymmetrische Stützkurve zu modellieren (Varignon, 1725). Die Zugkräfte im Seil werden dabei durch Druckkräfte in den Gewölbeteilen ersetzt. Wichtig war

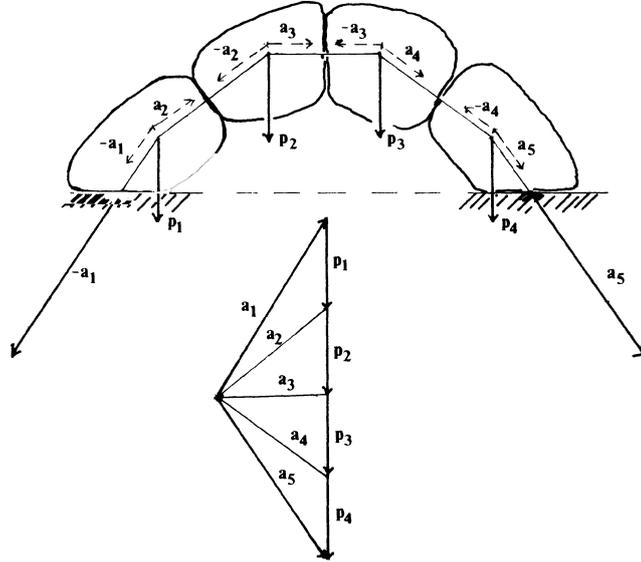


Abbildung 2: Stützpolygon in Gewölbebogen (nach Varignon), unten Kräftepolygon. Quelle (Scholz, 1989, p. 162)

für diese Analysen, dass das dadurch identifizierte *Stützpolygon* im inneren Kern der Gewölbesteine verlief; anderenfalls waren laterale Kräfte zu erwarten, die das Bauwerk zum Einsturz bringen könnten (Abb. 2).

Ganz allgemein konnte eine graphische Zusammensetzung endlich vieler koplanarer Kräfte durch Annahme eines zwischen den Wirkungslinien der Kräfte (fiktiv) eingespannten Seil erleichtert werden. Das entstehende Seilpolygon musste die Bedingung erfüllen, dass sich bei Zerlegung der vorgegebenen Kraft p_i , ($1 \leq i \leq k - 1$) in Komponenten längs der ansetzenden Seilkanten a_{i-1}, a_i die beiden in jeder Kante a_i wirkenden Kraftkomponenten gegenseitig aufheben (vgl. Abb. 3 mit $k = 4$). Eine (vektorielle) Zusammensetzung der Kräfte unter Absehung ihrer Wirkungslinien ließ sich leicht durch ein Kräftepolygon $p'_1, \dots, p'_{k-1}, p'_k$ mit Kräften p'_i parallel zu p_i und jeweils aneinander anschließenden Polygonkanten p'_i bewerkstelligen. Die das Kräftepolygon schließende Kante p_k repräsentierte dann die Resultierende. Deren Wirkungslinie wurde jedoch erst durch den Schnitt der äusseren Seilkanten a_0, a_k und die Richtung von p'_k determiniert.

Für eine volle Bestimmung der Kräftezusammensetzung war also ein Kräftepolygon allein nicht ausreichend; die Konstruktion eines zugehörigen Seilpolygons war eine notwendige Ergänzung.² Ist ein Seilpolygon gefun-

²Dabei war das Seilpolygon durch die vorgegebenen Kräfte nicht eindeutig bestimmt; zu jedem ebenen Kräftesystem gibt es eine 2-Parameterschar zulässiger Seilpolygone. In

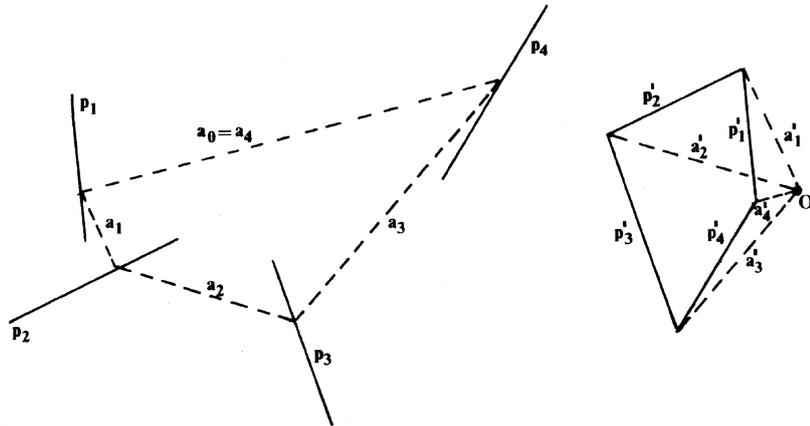


Abbildung 3: Seilpolygon und Kräftepolygon mit Pol O' . Quelle (Scholz, 1989, p. 163)

den, das die Gleichgewichtsbedingung in jeder Kante erfüllt, so lässt sich die Gesamtkraft p_k durch Zusammensetzung der beiden äußeren Komponenten (längs a_0 und a_k) bestimmen. Das gilt natürlich auch bei Belastung der Kanten auf Druck statt auf Zug, also bei Ersetzung des Seilpolygons durch ein (zunächst ebenso fiktives) *Stabpolygon* beziehungsweise eine “Drucklinie”. Diese Art einer graphischen Zusammensetzung ebener Kräftesysteme durch Seil- und Kräftepolygone, kurz die *Seilpolygonmethode*, wurde spätestens gegen Ende des 18. Jahrhunderts zu einer Standardmethode, als sie in den Lehrplan der *École Polytechnique* aufgenommen wurde. Culmann machte sie zu einem wichtigen Baustein seiner graphischen Statik (siehe Abschnitt 4).

Ein Seilpolygon, das die Gleichgewichtsbedingungen in jeder Kante a_i erfüllt, lässt sich leicht durch Wahl eines Punktes O' zusätzlich zum Kräftepolygon p'_1, \dots, p'_k konstruieren (Abb. 3). Bezeichnet man nämlich die Verbindungsstrecke von O' und der Ecke A'_i des Kräftepolygons, in der p'_{i-1} und p'_i inzidieren, als a'_i , so zerlegen sich die Kräfte p'_i so in Komponenten längs a'_{i-1} und a'_i , dass sich die von p'_i und p'_{i+1} in a'_i induzierten Komponenten wechselseitig aufheben, wenn die Orientierung der Kräfte so ist, dass eine

anachronistischer Beschreibung ging es um die Zusammensetzung ebener Vektoren und zugehöriger Drehmomente – in der Sprache des ausgehenden 19. Jahrhunderts (die bis heute in der technischen Mechanik gebräuchlich ist) also um die Addition von “Dynamen”, nicht bloß um die von Kraftvektoren.

kohärente Orientierung des Kantenzugs im Kräftepolygon vorliegt. Das ist etwa der Fall, wenn nur Zug- oder nur Druckkräfte längs der Kanten wirken.

Zu jeder Wahl von O' gibt es daher ein Seilpolygon. O' wurde der *Pol* des Kräftepolygons p'_1, \dots, p'_k bezüglich des Seilpolygons a_i, \dots, a_k genannt. Der Pol O' stellte also gewissermaßen eine natürliche Verbindung zwischen Seilpolygon und Kräftepolygon her.

2 Stabnetze/Fachwerke

Die Grundidee des Seil- und Kräftepolygons ist auch bei der statischen Analyse von Stabstrukturen nützlich. In diesem Fall sind die Kanten des (verallgemeinerten) “Seil”-polygons durch starre oder elastische Stäbe realisiert und auf Druck oder Zug belastbar. Die Verbindung von zwei Stäben, die hier häufig als Knoten bezeichnet werden, erfolgt idealerweise durch Gelenke, sodass in ihnen keine lateralen Kräfte wirken sondern nur solche in Richtung der Kanten. Ein solches gelenkig verbundenes *Stabsystem* oder *Stabnetz* kann geometrisch durch einen im 2-, 3- (allgemein n -) dimensionalen euklidischen Raum eingebetteten *Graphen mit linearen Kanten gebener Länge* dargestellt werden. Bei einer materiellen Realisierung spricht man von einem *ebenen* oder *räumlichen Fachwerk*.

Aus geometrischen Gründen kann ein Stab- beziehungsweise Fachwerk durch seine kombinatorische Struktur und die vorgegebenen Längen der Kanten bis auf eigentliche Isometrien (euklidische Bewegungen) der gesamten Struktur eindeutig bestimmt sein oder auch zusätzliche innere Freiheitsgrade besitzen. Im ersten Fall spricht man von (geometrisch oder kinematisch) *bestimmten* oder sogar *überbestimmten* Stab-/Fachwerk, im zweiten von einem (kinematisch) *unbestimmten* Fachwerk, etwa mit l Freiheitsgraden. Einfache Dreiecks- beziehungsweise Vierecksstabwerke sind naheliegende Beispiele für bestimmte beziehungsweise unbestimmte Fachwerke; ein Vierecksstabwerk mit zwei eingezogenen Diagonalstäben ist (kinematisch) überbestimmt.

Ein ebenes Stabnetz aus k Kanten/Stäben und e Ecken/Knoten besitzt generisch $l = 2e - 3 - k$ Freiheitsgrade. *Im allgemeinen* (generisch) gilt:

- Für $k < 2e - 3$ ist das Fachwerk unbestimmt,
- für $k = 2e - 3$ ist es bestimmt,
- und für $k > 2e - 3$ überbestimmt.

Ob ein ebenes Stabnetz mit $k = 2e - 3$ bestimmt ist, hängt allerdings auch noch von dessen kombinatorischer Struktur und von metrischen Bedingungen ab (Crapo, 1979). “Im allgemeinen bestimmt” etwa setzt voraus, dass in keinem der Teilnetze für sich gezählt $k' > 2e' - 3$ ist und die metrischen Bedingungen nicht auf ein Gleichungssystem mit verschwindender Determi-

nante führt. Anderenfalls sind “infinitesimale Bewegungen” des Fachwerks möglich (Föppl, 1900, p. 204ff.).³

Bei einem kinematisch bestimmten Fachwerk gibt es zu jedem Gleichgewichtssystem äußerer Kräfte eine eindeutige Zerlegung längs der Stäbe, sodass in jedem Stab und in jedem Knoten Gleichgewicht besteht (innere bzw. lokale Gleichgewichtsbedingung). Man redet daher schlicht von *bestimmten Fachwerken*. Die einfachste Weise, ebene bestimmte Fachwerke zu konzipieren, besteht aus einer geeigneten Aneinanderfügung von Dreieckszellen.

Kinematisch überbestimmte Fachwerke sind zunächst *statisch unbestimmt*. Ein äußeres Gleichgewichtssystem lässt sich im allgemeinen auf unendlich viele Weisen längs der Stäbe so zerlegen, dass überall die inneren lokalen Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind (inneres Gleichgewichtssystem). Erst bei Berücksichtigung der elastischen Kräfte, bzw. der Formänderungsenergie, bei der resultierenden Verformung der Stäbe wird die Bestimmung der inneren Kräfte möglich, wenn die entsprechenden Materialeigenschaften bekannt sind. Dies ist Gegenstand der Theorie der unbestimmten Fachwerke. Sie treten bei uns nur am Rande auf, wurden aber in der Bautechnik ab dem letzten Drittel des 19. Jahrhunderts von steigender Bedeutung (Kurrer, 2018, p. 465ff.).

Für die Analyse ebener bestimmter Fachwerke eignen sich graphische Methoden hervorragend. Auf dem (europäischen) Kontinent war K. Culmann einer der Protagonisten, denen dies kurz nach der Mitte des 19. Jahrhunderts bewusst wurde. In Großbritannien entwickelten die schottischen Naturwissenschaftler J.W.M Rankine und J.Cl. Maxwell kurz vor Culmann ähnliche Ideen, die Culmann aber offenbar zunächst unbekannt blieben. In beiden Ansätzen einer graphischen Analyse der Gleichgewichtsbedingungen in facherkartigen Tragstrukturen kamen Dualitätsaspekte (“reziproke Figuren”) zum Tragen. Culmanns Dualität war geprägt von projektiv geometrischen Konzepten, die von Maxwell(-Rankine) war freier. L. Cremona analysierte wenig später, wie sich beide Sichtweisen in Beziehung setzen lassen.

3 Rankine-Maxwell Reziprozität

William John Macquorn Rankine (1820 – 1872) ging nach seinem Studium der Naturwissenschaften an der Universität Edingburg im Jahr 1838 in den Eisenbahnbau. (Schon sein Vater war im Bauwesen als Ingenieur tätig gewesen.) 1855 wurde er als Professor für Bauingenieurwesen und Mechanik an die Universität Glasgow berufen.⁴ Aus seinen Vorlesungen gingen zahlreiche einflussreiche, wissenschaftlich fundierte Handbücher für Ingenieure hervor, darunter das in unserem Kontext wichtige *Manual of Applied Mechanics*

³Vgl. auch (Scholz, 1989, p. 302)

⁴Im selben Jahr erfolgte die Berufung Culmanns an das neu gegründete Eidgenössische Polytechnikum (siehe unten).

(Rankine, 1858).⁵ Parallel dazu forschte und publizierte er in der theoretischen Physik; dabei sind seine an E. Clapeyron und S. Carnot anschließenden Arbeiten zur Thermodynamik von besonderer Bedeutung. Sowohl in seinen Arbeiten zur angewandten Mechanik, als auch zur Thermodynamik lieferte er wichtige Anknüpfungspunkte für Überlegungen seines zehn Jahre jüngeren Physikerkollegen J.Cl. Maxwell.

Ähnlich wie Rankine, allerdings erst ab 1847, studierte *James Clerk Maxwell* (1831–1879) zunächst an der Universität Edinburg, unter anderem bei William Rowan Hamilton. Später wechselte er an die Universität Cambridge, wo er 1854, dem Jahr von B. Riemanns Habilitationsvortrag, sein Studium abschloss. Kurz darauf entstand seine erste Arbeit über Faradaysche Kraftlinien (Maxwell, 1856). Dies wurde zum Beginn seiner tief greifenden Arbeiten zu Elektrizität und Magnetismus im Anschluss an Michael Faraday, durch die er zum Begründer der feldtheoretischen Auffassung des Elektromagnetismus wurde.⁶ Im Jahr 1860 wurde er als Professor an das King’s College in London berufen, 1871 an die Universität Cambridge. Bekannt wurde er insbesondere durch seine Arbeiten zur kinetischen Gastheorie und zur feldtheoretischen Elektrodynamik mit dem Hauptwerk *Treatise on Electricity and Magnetism* (Maxwell, 1873). Seine Arbeiten wurden zum Katalysator für die Einführung und Verbreitung der noch im Quaternionenkalkül formulierten Vektoranalysis.⁷ In unserem Zusammenhang kommen lediglich seine Arbeiten zu Kräftezerlegungen der Baustatik und die darin angelegten Dualitätsaspekte zur Sprache (Maxwell, 1864*b,a*, 1867, 1870, 1876).⁸

Im Rahmen der Diskussion der Theorie der Tragwerke (“Theory of structures”) betrachtete Rankine Gleichgewichtsbedingungen an bestimmten und unbestimmten Fachwerken (“polygonal frames”) und formulierte ein allgemeines Gleichgewichtskriterium in Form einer Aussage, die hier als *Rankines Lemma* bezeichnet werden soll und sich wie folgt formulieren lässt:

Lemma 1 (Rankine 1858) Für eine Konfiguration (vgl. Abb. 4) aus

- (i) einem gelenkig verbundenen ebenen Stabpolygon repräsentiert durch ein k -Polygon Γ mit Ecken P_1, \dots, P_k und Kanten a_1, \dots, a_k (a_i inzident mit P_i, P_{i-1} , $1 \leq i \leq k$),
- (ii) einem Punkt O' in der Ebene von Γ sowie Halbgeraden $a'_i \parallel a_i$ mit Anfangspunkt O'
- (iii) und einem orientierten k -Polygon mit Ecken A'_i auf a'_i und verbindenden Kanten $p'_i = A'_{i-1} \cdot A'_i$

⁵Zur Bedeutung der Rankineschen *Manuals* in der Herausbildung der Ingenieurwissenschaften siehe (Kurrer, 2018, p. 182ff.), zu Rankine weiter (ibid., pp. 322f., 455ff.).

⁶Siehe dazu (Darrigol, 2000, chap. 4), (Buchwald, 1985).

⁷(Crowe, 1967, chap. 4.V)

⁸Siehe dazu auch (MacLeod, 2015).

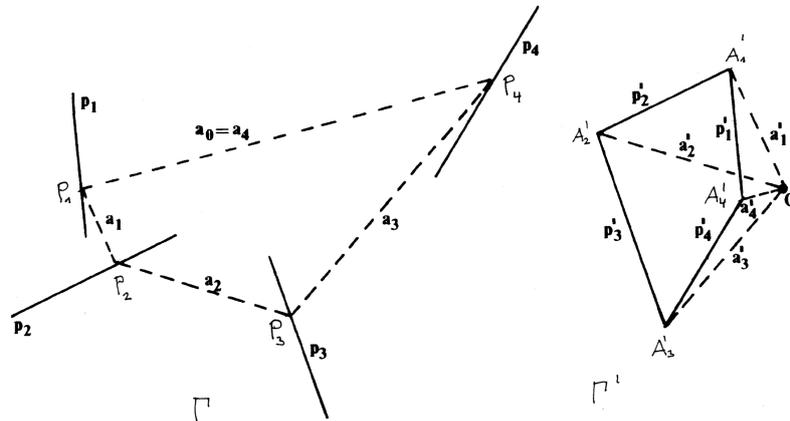


Abbildung 4: Zur Beziehung zwischen Seil-/Stabpolygon Γ und Kräftepolygon Γ' zum Pol O' bei Culmann und Rankine

...ist ein System von äußeren Kräften p_i , parallel und gleichgerichtet zu p'_i und vom Betrag her proportional zur Kantenlänge p'_i , angreifend an den Ecken P_i von Γ im Gleichgewicht. (Rankine, 1858, §150).⁹

Rankine betrachtete in seinen Beispielen insbesondere Systeme paralleler Kräfte und erläuterte, wie sein Gleichgewichtskriterium bei der statischen Analyse von Fachwerkträgern eingesetzt werden kann. Eine Verallgemeinerung für räumliche Fachwerke formulierte er in (Rankine, 1864). Wir ersparen uns hier dessen Wiedergabe¹⁰ zugunsten der Maxwell'schen Umformulierung (vgl. Satz 2 unten).

Rankines Lemma bezog sich auf dieselbe Konstellation von Diagrammen, die auch Culmann wenige Jahre später (allem Anschein nach unabhängig

⁹Rankine selber bezeichnete die Aussage als ein "Theorem":

Theorem If lines radiating from a point be drawn parallel to the lines of resistance of the bars of a polygonal frame, then the sides of any polygon whose angles lie in those radiating lines will represent a system of forces, which, being applied to the joints of the frame, will balance each other; each such force being applied to the joint between the bars whose lines of resistance are parallel to the pair of radiating lines that enclose the side of the polygon of forces, representing the force in question. Also the lengths of the radiating lines will represent the stresses along the bars to whose lines of resistance they are respectively parallel (Rankine, 1858, §150)

¹⁰Siehe dazu ggf. (Scholz, 1989, p. 183).

von der englischsprachigen Literatur) aus der Perspektive der projektiven Geometrie ansehen würde (siehe Abschnitt 4). Schon vorher aber artikulierte Maxwell in einer Arbeit unter dem Titel *On reciprocal figures and diagrams of forces* die bei diesen Diagrammen auftretende Dualität unter Anspielung auf projektive Konzepte, aber logisch unabhängig von diesen und mit einer deutlichen Hervorhebung kombinatorischer Gesichtspunkte (Maxwell, 1864a).

In klarer Bezugnahme auf die genannten Arbeiten von Rankine arbeitete Maxwell die geometrisch-strukturellen Eigenschaften der in Paaren auftretenden Diagramme heraus. Er formulierte ein Konzept der Reziprozität von Figuren, das allgemein genug war, neben den Punktspiegelungen und Spiegelungen (“inversions”) der euklidischen Geometrie und der Polarreziprozität der projektiven Geometrie auch die Reziprozität der Stab- und Kräftediagramme der Statik zu umfassen. Dementsprechend begann er mit einer sehr allgemein gehaltenen Einführung des Konzepts: *Reziprok* hießen für ihn zwei *Figuren*, wenn

...die Eigenschaften der einen sich zu der anderen sich so verhalten wie die der zweiten zur ersten.¹¹

Er verwies darauf, dass die zentrale Wichtigkeit der Reziprozität in ihrer Verwendung beim Studium von Kräftekonfigurationen der Statik lagen. Diese waren seiner Ansicht nach schon lange von vielen Autoren untersucht worden; aber in Rankines oben genannten Arbeiten hatten sie den bis dato allgemeinsten Ausdruck gefunden. In seiner eigenen Arbeit konzentrierte er sich zunächst einmal auf die geometrischen Aspekte.

Zu diesem Zweck präziserte Maxwell zunächst seine allgemeine Charakterisierung der Reziprozität für den Fall von Figuren in der Ebene und im Raum. Er gab jedoch keine explizite Definition der *Figuren* (“figure”) oder des *Diagramms* (“diagram”), sondern beließ es bei deren impliziter Charakterisierung. Aus seiner Verwendung des Konzeptes, insbesondere durch die von ihm vorgestellten Beispiele, kann man ablesen, dass er unter einer *ebenen Figur* (einem ebenen *Diagramm*) ein endliches System Γ von Punkten/Ecken A_i ($1 \leq i \leq e$), von Kanten a_i ($1 \leq i \leq k$) und Flächenstücken/Polygonen α_i ($1 \leq i \leq f$) samt deren Inzidenzbeziehungen und Größenrelationen im Sinne der euklidischen Geometrie verstand.¹² Maxwell hob in seiner Ausführungen dabei die *kombinatorische Struktur* einer Figur deutlich hervor, die man in späterer Sprache durch einen endlichen 2-dimensionalen Zellenkomplex mit polygonalen 2-Zellen, oder auch einen endlichen 2-dimensionalen geome-

¹¹“Reciprocal figures are such that the properties of the first relative to the second are the same as those of the second relative to the first. Thus inverse figures and polar reciprocals are instances of two different kinds of reciprocity.” (Maxwell, 1864a, p. 514)

¹²Die Symbole erscheinen hier der deutschen Sprache angepasst, Maxwell verwendete natürlich andere Abkürzungen, insbesondere etwa s (summits) statt unserem e und e (edges) statt unserem k .

trischen Polytopkomplex charakterisieren würde.¹³ Zusätzlich zur kombinatorischen Struktur blieben für Maxwells Auffassung die metrischen Eigenschaften (Streckenlängen, Flächeninhalte, Winkel) der Bausteine einer Figur von Belang. Entsprechend verstand Maxwell unter einer *räumlichen Figur* (Diagramm) Π einen endlichen 3-dimensionalen geometrischen Polytopkomplex¹⁴ im euklidischen Raum samt metrischen Eigenschaften.

Im ebenen Fall lief seine Definition der Reziprozität auf folgende Bedingungen hinaus:¹⁵

Definition 1 Zwei ebene Diagramme/Figuren Γ, Γ' mit

Ecken A_i bzw. A'_j , ($1 \leq i \leq e, 1 \leq j \leq e'$),

Kanten a_i bzw. a'_j , ($1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k'$),

Flächen α_i bzw. α'_j , ($1 \leq i \leq f, 1 \leq j \leq f'$)

heißten genau dann *reziprok* zueinander, wenn $k = k', e = f', f = e'$,

die Zuordnung $A_i \mapsto A'_i, a_i \mapsto a'_i, \alpha_i \mapsto \alpha'_i$ (jeweilige Indexmenge)

inzidenzerhaltend ist und ausserdem $a_i \parallel a'_i$ oder $a_i \perp a'_i$.

Die letztgenannte Bedingung kann sogar abgeschwächt werden zu $a_i \parallel a'_i$ erst nach Drehung einer der Figuren um einen festen Winkel.

Als *zulässig* bezeichnete Maxwell eine Figur, die eine reziproke besitzt. Damit für eine zulässige Figuren die reziproke in seinem Sinn eindeutig bestimmt ist, müssen gewisse kombinatorische Eigenschaften erfüllt sein, etwa muss $k = 2e - 3$ gelten, damit die Ecken der reziproken Figur durch die Parallelitäts- (oder Orthogonalitäts-) Bedingung der Kanten eindeutig bestimmt sind (Maxwell, 1864a, p.516). Dies entspricht im wesentlichen der kombinatorischen Bedingung für die statische Bestimmtheit des zugehörigen Diagramms. Eine größere Kantenzahl führt zur geometrischen Über- und damit statischen Unter-Bestimmtheit, bei kleiner Kantenzahl umgekehrt (p. 522).

Als einfachstes Beispiel für reziproke Diagramme führte Maxwell zwei (in seine Sinne) reziproke ebene Tetraederprojektionen an (also zwei Tetraederprojektionen mit paarweise parallelen Kanten). Hier gilt die Euler-Relation

$$(*) \quad k = e + f - 2.$$

Maxwell argumentierte wie für den klassischen Polyedersatz lange Zeit üblich, dass jedes andere reziproke Paar ebener Diagramme durch Unterteilung

¹³Maxwell arbeitete also nicht nur mit ebenen plättbaren Graphen, sondern ließ auch die Überschneidung von Flächenstücken/Polygonen α_i, α_j ($i \neq j$) zu.

¹⁴Dies ist, in anderen Worten, ein endliche Zellenkomplex mit polygonalen 2-Zellen und polyedrischen 3-Zellen. Für eine gut lesbare moderne Einführung in abstrakte und geometrische Polytopkomplexe siehe (Brieskorn, 2019, Kap. 2.1).

¹⁵Maxwell formulierte dies in der Form "*Definition* Two plane figures are reciprocal when they consist of an equal number of lines, so that corresponding lines in the two figures are parallel, and corresponding lines which converge to a point in one figure form a closed polygon in the other." (Maxwell, 1864a, p. 515)

Fig. 2.

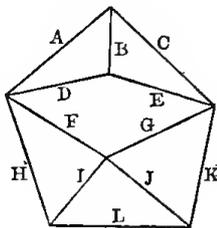


Fig. II.

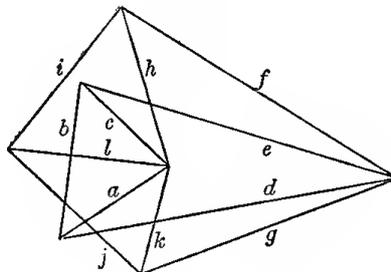


Abbildung 5: Ein Beispiel reziproker Diagramme in (Maxwell 1864, p. 517) (Bezeichnungen a statt der im Text verwendeten Notation A' etc.)

oder durch Vervollständigung eines Polygons entsteht und glaubte, so gezeigt zu haben, dass die Eulersche Relation (*) für jedes zulässige Diagramm gilt (Maxwell, 1864a, p. 515f.). Dieser voreilige Schluss stand auch bei seiner Argumentation im Hintergrund, dass sich jedes ebene zulässige Diagramm als perspektivische Projektion eines räumlichen Polyeders darstellen lässt (Maxwell, 1864a, p. 521).¹⁶

Ein auf den ersten Blick vielleicht etwas überraschendes Beispiel für geometrisch reziproke Diagramm im Sinne Maxwells ist in Abb. 5 wiedergegeben. Die darin enthaltene Figur II zeigt, dass Maxwell Selbstdurchdringungen polygonaler Seitenflächen der projizierten räumlichen Polyeder nicht ausschloss.

Für den ebenen Fall brachte Maxwell das Rankinesche Lemma in eine schlüssige geometrische Form:

Satz 1 (Maxwell 1864) Sind Γ, Γ' ebene reziproke Diagramme, so steht ein System von Spannungen in den Kanten von Γ mit Beträgen gemäß der Länge der korrespondierenden Kanten von Γ' im Gleichgewicht (Maxwell, 1864a, p. 522).

Er stellte kombinatorische Eigenschaften der Diagramme mit Reziproken zusammen: In einer zulässigen Figur inzidiert jede Kante mit genau zwei Seitenflächen (weil mit genau zwei Ecken und Dualität). Weiter inzidiert jede Ecke mit mindestens drei Kanten (Polygone haben mindestens 3 Seiten) usw. (Maxwell, 1864a, p. 515).

Die *Reziprozität räumlicher Figuren* Π, Π' definierte Maxwell analog, wobei zusätzlich polyedrische 3-Zellen σ_i ($1 \leq i \leq p$) zu berücksichtigen waren, die Korrespondenzen nun $e = p', k = f', f = k', p = e'$ und $A_i \leftrightarrow \sigma'_i, k_i \leftrightarrow f'_i, f_i \leftrightarrow k'_i, \sigma_i \leftrightarrow A'_i$ lauteten und die Parallelitätsforderung durch die Bedingung $k_i \perp f'_j, f_i \perp k'_i$ ersetzt wurde (Maxwell, 1864a, p. 523). Auch in

¹⁶Später verallgemeinerte er seine Argumentation (siehe unten).

diesem Falls sind reziproke Diagramme mit einem Gleichgewichtskriterium verbunden. Maxwell formulierte Rankines Kriterium in der Sprache der dualen Diagramme:

Satz 2 (Maxwell 1864) Sind Π, Π' räumliche reziproke Diagramme, so steht ein System von Spannungen in den Kanten von Π mit Beträgen gemäß dem Flächeninhalt der korrespondierenden polygonalen Seitenfläche von Π' im Gleichgewicht (ebenso natürlich umgekehrt) (Maxwell, 1864a, p. 524).

Maxwells Arbeit von 1864 war weitgehend konzeptionell ausgerichtet, enthielt aber schon Hinweise darauf, wie die reziproken Diagramme bei der Analyse der Kräfte in Bauwerken eingesetzt werden können. Drei Jahre später führte er dies in einem Journal für Ingenieure weiter aus (Maxwell, 1867). Hier behandelte er Stabnetze ebener Fachwerke und zeigte, dass reziproke Diagramme in vielen Fällen zur Anwendung gebracht werden können:

Lemma 2 (Maxwell 1867) Für die *Existenz eines reziproken* Kräftediagramms zum Stabnetz eines ebenen Fachwerks einschließlich der äußeren Kraftlinien ist

- (i) *notwendig*, dass die äußeren Kräfte lediglich an Knoten des Gurtes (d.h. des äußeren Randes des Stabnetzes) angreifen.
- (ii) Ist dies der Fall, so ist für die Existenz *hinreichend*, dass die äußeren Kraftlinien parallel verlaufen und in jedem Knoten des Gurtes eine Kraft wirkt.

Die Parallelitätsbedingung ist erfüllt, wenn lediglich Gravitationskräfte in Rechnung gestellt werden. Bei Vorgabe eines Stabnetzes, das nach Hinzufügen eines Systems äußerer Kräfte durch ein zulässigen Diagramm darstellbar ist, lässt sich das dazu duale (reziproke) Kräftediagramm besonders einfach konstruieren. Maxwell erläuterte dies am Beispiel eines einfachen Dachträgers, hier in Abb. 6 wiedergegeben. Ein solches graphisches Vorgehen hat neben der zeichnerischen Ökonomie den zusätzlichen Vorteil einer Korrektheitsprobe durch die notwendige Schließung des Kräftepolygonnetzes. Maxwell verwies darauf nur knapp. Bei der Aufnahme der von ihm vorgeschlagenen Methode erwies sich dies jedoch als ein wichtiger Gesichtspunkt.

In dieser Phase einer erneuten Beschäftigung mit den Kräftediagrammen während des Sommers 1867 war Maxwells Blick auf die Erfordernisse der Ingenieure ausgerichtet; dennoch befasste er sich auch mit der weiteren theoretischen Untermauerung des von ihm und Rankine entwickelten Dualitätskonzeptes. Er bemerkte, dass es in einem strikten Sinne dem Konzept der projektiven Korrelation subsumiert werden kann – allerdings in anderer Weise als dies Culmann vorschwebte, nämlich als Polarreziprozität im Raum statt in der Ebene. Dies geht aus einer später gemachten Anmerkung hervor (Maxwell, 1870, p. 169).¹⁷ Ihr ist allerdings nicht zu entnehmen, ob Maxwell

¹⁷“... These points and planes are reciprocally polar in the ordinary sense with respect to the paraboloid of revolution $2cz = x^2 + y^2$.” (Maxwell, 1870, p. 169)

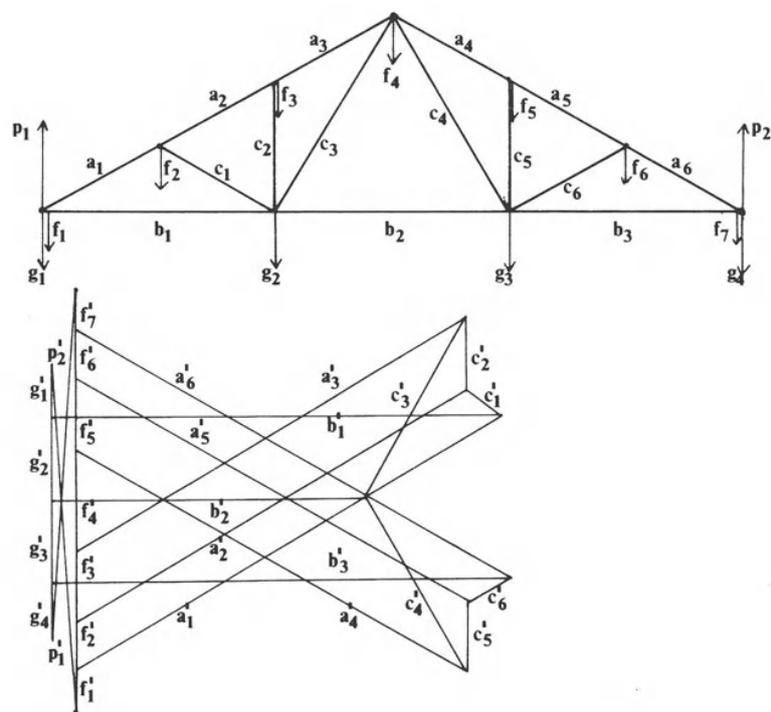


Abbildung 6: Duale Diagramme zu einem Dachträger nach (Maxwell 1867), hier wiedergegebene nach (Scholz 1989, p. 188)

zu dieser Zeit von Culmanns Vorgehensweise wusste.

Maxwell publizierte diese Beobachtung erst drei Jahre später, in einer Arbeit, in der er die Spannungen innerhalb eines Körpers untersuchte, die aus einem äußeren Gleichgewichtssystem von Kräften resultieren, also einem Thema der Kontinuumsmechanik. Die Verwendung dualer Diagramme bei der Diskretisierung und Approximation der inneren Kräfte, die in Punkten, Linien bzw. Flächen des Körpers wirken (Maxwell, 1870, p. 178ff.), ergab sich dabei jedoch der Anlass, eine neue, korrigierte und erweiterte Fassung der Dualitätstheorie von Diagrammen vorzustellen (ibid., 161-177).

Dabei korrigierte er zunächst seinen naiven Bezug auf den Eulerschen Polyedersatz von 1864. Unter Verweis auf Riemann und Listing formulierte er den Polyedersatz nun für “ n -fach zusammenhängende” Polyeder in der Form

$$e - k + f = 4 - 2n \quad (\text{Maxwell 1870, p. 171}). \quad (1)$$

Maxwell ließ dabei anscheinend wieder Selbstdurchdringungen der Seitenflächen der verallgemeinerten Polyeder zu und setzte deren Orientierbarkeit stillschweigend voraus. Dies erscheint insofern gerechtfertigt, als er von einer kohärenten Orientierung der Kraftlinien ausgehen konnte und dies in eine Orientierung der Seitenflächen des “Polyeders” (eines in den dreidimensionalen Raum eingebetteten 2-dimensionalen Polytopkomplexes) umgesetzt werden kann. Schließlich gab er Argumente für die folgende Aussage:

Lemma 3 (Maxwell 1870) Jedes zulässige ebene Diagramm lässt sich als ebene Projektion eines geschlossenen Polyeders auffassen. (Maxwell, 1870, p. 167f.)

Einem Paar reziproker ebener Diagramme konnte damit ein Paar verallgemeinerter räumlicher Polyeder zugeordnet werden. Unter Ausnutzung der in Definition 1 zugelassenen Bewegungsfreiheit konnte Maxwell die Polyeder in eine solchen Lage bringen, dass sie durch eine Polarreziprozität am Rotationsparaboloid (in inhomogenen Koordinaten)

$$x^2 + x^2 = 2cz \quad (2)$$

ineinander überführt werden können und sich die zugehörigen ebenen Diagramme daraus durch Orthogonalprojektion ergeben (Maxwell, 1870, p. 168f.).

Maxwell schloss eine Untersuchung der Starrheitsbedingung räumlicher und ebener Fachwerke mit nichttrivialer Topologie, also allgemeiner Eulercharakteristik $\xi = e - k + f$ an. Dies wurde zu einem wichtigen Referenzpunkt für rezente Arbeiten zur kombinatorisch-topologischen Theorie der Fachwerkstrukturen, kann aber für unseren Kontext außer Betracht bleiben.¹⁸

¹⁸Siehe dazu (Crapo, 1979) und andere in Abschnitt 7 genannte Arbeiten. Zur Geschichte siehe auch (Scholz, 1989, p. 191ff.).

4 Culmanns Reziprozität von Seil- und Kräftepolygon

Der andere Protagonist dualer Diagramme in der graphischen Statik, *Karl Culmann* (1821–1881), wurde während seiner Ausbildung stark von der Tradition der *École Polytechnique* beeinflusst. Ein Onkel, bei dem er für eine Weile lebte, lehrte an der Artillerieschule in Metz; er selber studierte am Polytechnikum in Karlsruhe und begann 1841 eine praktische Tätigkeit im süddeutschen Eisenbahnbau.¹⁹ Auf einer Studienreise 1849/50 nach England und in die USA untersuchte er die dort vorgefundenen Brückenbauten und analysierte ihre Statik. In daraus hervorgehenden Publikationen legte er den Grundstein für eine statische Fachwerktheorie und betonte den Vorteil der statisch bestimmten Fachwerkstrukturen.²⁰ Mit der Gründung des Eidgenössischen Polytechnikums, der späteren ETH, wurde er 1855 dorthin als Professor für Ingenieurwesen berufen. Dort konnte er neben einer regen Gutachtertätigkeit für die verschiedensten Bauvorhaben innerhalb der Schweiz seine Forschungen und Lehre in Sachen Bauwesen entfalten. Aus seinen Vorlesungen der frühen 1860er Jahre ging sein bekanntestes Werk *Graphische Statik* hervor (Culmann, 1866), in dem er sich bemühte, die graphischen Methoden der Statik so weit wie möglich aus Prinzipien der projektiven Geometrie zu entwickeln. Auf seine Initiative wurde im Jahr 1867 Wilhelm Fiedler als Vertreter der projektiven Geometrie nach Zürich berufen. Culmann musste allerdings schon in der zweiten stark überarbeiteten Fassung seines Hauptwerks (Culmann, 1875) die Rolle der projektiven Geometrie relativieren und ergänzte seine Darstellung durch zahlreiche analytische Überlegungen, die sich mehrheitlich nicht mehr ohne Zwang in den projektiven Rahmen einordnen ließen.

In seiner graphischen Statik von 1866, setzte sich Culmann zum Ziel, insbesondere die augenfällige geometrische Beziehung zwischen Kräfte- und Seilpolygon durch Konzepte der projektiven Geometrie zu erhellen. Nach der Bereitstellung der graphischen Grundlagen zur “Operation mit Linien” (Addition, Multiplikation, Potenzieren und Umkehroperationen) und zur (volumentreuen) “Verwandlung” von Flächen und Körpern im ersten Abschnitt seines Buches (Culmann, 1866) behandelte er zu Beginn der Darlegung der Grundlagen der graphischen Statik die “projectivische Verwandtschaft zwischen dem Kräfte- und Seilpolygon” (Überschrift von Kap. 1 des Abschnitts II). Culmann nahm dabei Bezug auf von Staudts *Geometrie der Lage* (Staudt, 1847) und die Fiedlersche Übersetzung von Salmons Lehrbuchs über Kegelschnitte (Salmon, 1860) als den aus seiner Sicht zu Beginn der 1860er Jahre in deutscher Sprache zur Verfügung stehenden Standardwerken der projektiven Geometrie. Sein Resultat war, dass unter gewissen Bedingungen (siehe unten) Seil- und Kräftepolygon “reziprok aufeinander bezogen werden

¹⁹(Maurer, 1998, pp. 15ff.,)

²⁰Zur Herausbildung der Fachwerktheorie siehe (Werner, 1980, p. 115ff.), (Kurrer, 2018, pp. 476ff., 641ff.); zu Culmanns frühen Arbeiten (Lehmann, 2006).

können”, also zueinander dual im Sinne der projektiven Geometrie sind.

Bevor Culmann die Möglichkeit einer reziproken Korrelation zwischen beiden Polygonen analysierte, diskutierte er die Frage, ob sie nicht eventuell kollinear verwandt (im Sinne einer Zuordnung Kante – Kante) sein könnten.²¹ Er kam aber schnell zum Ergebnis, dass dies nicht mit den die Drehmomente betreffenden metrischen Eigenschaften der Diagramme konsistent war. Daraus zog er die Schlussfolgerung:

Wir wollen also der collineären Verwandtschaft nicht weiter nachforschen, sondern es versuchen, die Gebilde reciprok aufeinander zu beziehen.

Reciprok können das Kräfte- und Seilpolygon wohl nur in der Art aufeinander bezogen werden, dass der Kraft im Kräftepolygon ihr Angriff im Seilpolygon entspreche . . . (Culmann, 1866, p. 85)

Entsprechend wäre dann, so lässt sich ergänzen, der Geraden längs der Kante a_i im Seilpolygon die Ecke A'_i mit $O'A'_i = a'_i$ im Kräftepolygon zuzuordnen. Bei Bezeichnung der Ecken wie in Abb. 4 forderte Culmann also $p'_i \leftrightarrow P_i$ und $A'_i \leftrightarrow a_i$. Bezeichnen wir in der gleichen Weise (in freier Paraphrase von Culmann) das Seilpolygon als Γ , das Kräftepolygon als Γ' . Das Seilpolygon Γ besitze die Ecken P_i und die Kanten $a_i = P_iP_{i+1}$ ($0 \leq i \leq k$ und $i \pmod{k}$), wobei in A_i die Kraft p_i angreift. Das Kräftepolygon Γ' besitze Ecken A'_i und Kanten p'_i , wobei A'_i mit p'_i, p'_{i+1} inzidiert. Es werde ergänzt um einen Pol O' und weitere Kanten a'_i durch O' . Bei Hinzufügung der entsprechenden Flächenstücke entsteht in späterer Sprache ein in die Ebene projizierter 2-dimensionaler geometrischer Zellenkomplex; dies war allerdings nicht die Sichtweise Culmanns.

Culmann untersuchte dann, ob es eine “reciproke Beziehung” zwischen Seil- und Kräftepolygon gibt, in unserer Sprache also eine Korrelation (der projektiv ergänzten reellen Ebene), die hier als ψ bezeichnet werde. Er forderte von dieser Korrelation:

- (i) Einer Ecke P_i des Seilpolygons Γ soll die Kante p'_i des Kräftepolygons Γ' entsprechen.
- (ii) Der unendlich fernen Gerade g_∞ der Ebene von Γ soll der Pol O' des Kräftepolygons *perspektivisch* korrespondieren; das heißt einem (uneigentlichen) Punkt \tilde{P} von g_∞ entspricht die mit \tilde{P} inzidente Gerade des Büschels von O' .

Wegen Erhalt der Inzidenzbeziehungen unter ψ folgt dann, dass den Seiten a_i in Γ die Ecken A'_i von Γ' entsprechen. Darüber hinaus sind die Geraden a'_i

²¹Da es hier um die Beziehung zwischen ebenen Polygonen geht, konnte man fragen “. . . in welchen Fällen die beiden Polygone projectivisch aufeinander bezogen werden können” (Culmann, 1866, p. 85).

durch O' und A'_i parallel zu a_i (wegen der Perspektivität von g_∞ und $\psi(g_\infty)$). Unter Verwendung eines Hinweises von Reye konnte Culmann zeigen, dass eine solche Korrelation dann und nur dann existiert, wenn sich die Geraden längs p_i in einem Punkt O schneiden (Culmann, 1866, p. 86). Dann wiederum ist $\psi(O) = g_\infty$, und das Bündel von O liegt perspektivisch zur unendlich fernen Gerade. Daraus folgt dann wiederum die Parallelität von p_i und p'_i .
22

Damit erhielt Culmann folgende Satz, den wir hier in Culmanns Worten wiedergeben:

Satz 3 (Culmann 1866) *“Wenn also alle Kräfte eines Seilpolygons durch einen Punkt gehen, so können das Kräfte- und das Seilpolygon reziprok aufeinander bezogen werden.”* (Culmann, 1866, p. 86, Hervorh. im Original)

“Reziprok aufeinander bezogen” bedeutet hier natürlich im Sinne Culmanns durch eine *Polarreziprozität in der Ebene*. Die Bedingung der Kopunktalität des Kräftesystems war für statische Zwecke solange gegeben, wie lediglich Gravitationskräfte in Betracht gezogen wurden. In diesem Fall sind ja die Wirkungslinien aller Kräfte parallel, haben also einen Punkt im Unendlichen gemeinsam. Wir werden dieses Ergebnis im Folgenden als *Culmann-Dualität* bezeichnen.²³

Culmann suchte nun nach Möglichkeiten, die Dualitätstheorie an ebenen Quadriken (Kegelschnitten) für die graphische Statik nutzbar zu machen. Er verwies darauf, dass die zu einem Kegelschnitt C reziproke Kurve wiederum ein Kegelschnitt C' ist, wobei bei der Korrelation umbeschriebene Polygone in einbeschrieben übergehen. Er studierte konjugierte Richtungen an Paaren reziproker Kegelschnitte und interessierte sich für Pole von um- oder einbeschriebenen Seil-/Kräftepolygonen im Mittelpunkt von Hyperbeln oder Ellipsen (Culmann, 1866, p. 88ff.). Darüber hinaus konnte er die spezielle Eigenschaft (ii) der perspektivischen Korrespondenz nützen.

Eine Anwendung seiner Dualität fand Culmann bei der graphischen Analyse elliptischer Gewölbe. Das Grundproblem der elliptischen Gewölbetheorie bestand darin, bei vorgegebene äußeren Lasten ein elliptisches Gewölbeprofil zu finden, in dessen Inneren ein Stützpolygon (Drucklinie) verläuft, dessen Kanten orthogonal zu den Fugen der Gewölbelemente stehen (vgl. Abb. 2). Beim *Umkehrproblem* der Gewölbetheorie ist umgekehrt nach der Vorgabe einer (ggf. aus architektonischen Gründen) vorgegebenen elliptischen Form des Bauwerks ein System von Belastungskräften gesucht, das zu einer Drucklinie im Inneren des Gewölbes führt. Man kann dann beim Entwurf

²²Der Hinweis von Reye beinhaltet folgendes Lemma: Liegt bei einer Korrelation ψ der reellen projektiven Ebene eine Gerade g perspektivisch zum Bündel $\psi(g)$ und ist $\psi^{-1}(g)$ nicht auf g , so liegt auch g perspektivisch zu $\psi^{-1}(g)$.

²³Dabei ist im Auge zu behalten, dass Culmanns Reziprozität ψ nur bis auf Kollinearitäten involutiv ist.

des Gebäudes den Überbau des Gewölbes so konzipieren, dass das ermittelte Lastensystem durch die Eigengewichte der entsprechenden Bauwerkteile approximiert wird. Culmann gab eine auf die Resultate seiner Dualitätsüberlegungen aufbauende einfache graphische Lösung des Umkehrproblems an (Culmann, 1866, §126).²⁴

Durchschlagende Erleichterung für statische Analysen an Bauwerken waren durch die Reziprozitätsüberlegungen Culmanns nicht erreichbar. Sein Theoretisierungsansatz durch Methoden der projektiven Geometrie scheint für Ingenieure an anderer Stelle eher auf Zustimmung gestoßen sein. Kurrer verweist in seinem schon zitierten Werk auf die graphische Analyse des Erd-drucks an Stützmauern (Culmann, 1866, p. 563ff.) als wichtigsten Anwendungskontext projektiver Methoden innerhalb der graphischen Statik (Kurrer, 2018, pp. 54ff., 307). Weder in der Theorie der Balkenträger noch der Fachwerke, den beiden grundlegenden Tragstrukturen der ersten Phase der Industrialisierung in Europa, konnte Culmann seine Reziprozitätsüberlegungen zu einem überzeugenden Einsatz bringen.

In der zweiten Auflage seiner *Graphischen Statik* brachte er einen weiteren Aspekt der projektiven Dualitäten zur Sprache: die als “Nullsysteme” bezeichnete involutorischen Korrelationen, auf die Möbius bei der geometrischen Konstellationsanalyse der Darstellung beliebiger räumlicher Kräftesysteme durch Kräftepaare gestoßen war (Culmann, 1875, p. 237ff.). Von Staudt hatte Dualitäten dieses Typs eine kubische “Ordnungskurve” zugeordnet, die für die Nullsystemdualität eine ähnliche Rolle spielten wie die Quadriken für die Polarreziprozitäten. Einen Vorteil für die graphische Statik konnte Culmann jedoch auch für dieses Objekt nicht entdecken. Er beendete den 1875 seinem Lehrbuch neu hinzugefügten Abschnitt über Nullsysteme mit der wenig ermutigenden Bemerkung:

Die Beziehung eines Kräftesystems auf eine solche Curve leistet in der Praxis gerade keine besonderen Dienste, weil die benöthigten Mittelkräfte selbst ebenso leicht direct, als mittels einer solchen Curve construirt werden können (Culmann, 1875, p. 227)

Obwohl die Nullsysteme also, wie Culmann treffend bemerkte, für die graphische Zusammensetzung der Kräfte im Raum nicht hilfreich waren, konnten sie doch dazu eingesetzt werden, der Dualität von Kräfte- und Stabpolygon für ebene Fachwerke eine projektiv-geometrische Untermauerung zu geben. Dies war von L. Cremona am Anfang der 1870er Jahre bemerkt worden. Culmann nahm diese Beobachtung in seiner zweite Auflage, nun auch unter Verweis auf Maxwells Beiträge zu diesem Thema, auf (Culmann, 1875, p. 313ff.). Im folgenden Abschnitt werden einige Hintergrundinformationen zur Entstehung und Einordnung der Nullsysteme zusammengestellt; eine eigentliche Geschichte der Nullsysteme kann er nicht ersetzen.

²⁴Eine Zusammenfassung findet man in (Scholz, 1989, p. 174ff.).

5 Kleiner Exkurs: Nullsysteme

Nullsysteme sind neben den Polarreziprozitäten eine (genau genommen *die*) zweite Klasse von dualen Korrelationen der projektiven Geometrie. Sie wurden im Kontext der Statik entdeckt und von L. Cremona in die Betrachtung der dualen Diagramme der graphischen Statik eingeführt (nächster Abschnitt).

Als *Nullsystem* im projektiven Raum P^3 , der in unserem Kontext stets als reell gelten kann, $P^3 = P^3(\mathbb{R})$, bezeichnet man eine Punkt-Ebenen Korrelation ψ des Raumes, bei der jeder Punkt $p \in P^3$ auf seinem Korrelat liegt und jede Ebene $E \subset P^3$ ihr Korrelat enthält: $p \in \psi(p)$, $\psi(E) \in E$. Unter Verwendung der Notation \top für Inzidenzbeziehungen lässt sich das einfacher formulieren:

Definition 2 Eine Korrelation im projektiven Raum P^3 heißt *Nullsystem*, falls für alle Punkte P und alle Ebenen E in P^3 gilt

$$\psi(P) \top P, \quad \text{und} \quad \psi(E) \top E.$$

Die Bezeichnung “Nullsystem” wurde von A.F. Möbius eingeführt. Sie geht auf eine geometrische Konstellationsanalyse bei der Charakterisierung von Achsen (Geraden) h zurück, bezüglich denen ein vorgegebenes Kräftesystem ein verschwindendes Drehmoment besitzt. Möbius publizierte die statischen Überlegungen und die daraus erwachsene neue Art einer dualen Beziehung der Geometrie Anfang der 1830er Jahre (Möbius, 1833). Der Sachverhalt war ihm allerdings schon fünf Jahre vorher bekannt und wurde – ohne den statischen Hintergrund zu erwähnen – in seiner Arbeit über die Konfiguration zweier gleichzeitig einander ein- und umbeschriebenen Dreieckspyramiden (nichtreguläre Tetraeder) erwähnt (Möbius, 1828).²⁵ Im *Lehrbuch der Statik* findet sich schließlich eine ausführliche Diskussion der statischen Bedeutung von Nullsystemen (Möbius, 1837, §§84–88).²⁶

Jedes Kräftesystem im Raum lässt sich auf unendlich viele Weisen durch ein statisch äquivalentes Paar von Kräften f, f' darstellen, deren Wirkungslinien g, g' im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen. Die eine der Geraden, etwa g , kann dabei beliebig gewählt werden, die andere, g' , ist dann festgelegt. Möbius stellte nun fest, dass sich bei Vorgabe eines Punktes P und Wahl von g durch P die andere Gerade, g' , stets in einer Ebene E durch P liegt. Die Achsen h durch P , bezüglich denen das Moment des Kräftepaars verschwindet, bilden dann das durch (p, E) charakterisierte Geradenbüschel. Reduziert man andererseits bei Vorgabe einer Ebene E das Kräftesystem so, dass g in E liegt, dann geht die andere Gerade g' stets durch einen Punkt

²⁵Für eine Darstellung der Möbius-Konfiguration aus heutiger Sicht siehe etwa (Brieskorn, 2019, p. 459f.).

²⁶Dazu auch (Loh, 1994, p. 92f.) und (Scholz, 1989, pp. 212ff.).

P in E . Auch hier bilden die Geraden h , welche g schneiden und für die das Drehmoment verschwindet, das Geradenbüschel (P, E) .

Möbius zog die Konsequenz:

Auf diese Weise entspricht also in Bezug auf ein System von Kräften jedem Punkte des Raumes eine gewisse Ebene, jeder Ebene ein Punkt, und jeder Geraden als der Richtung der einen von zwei mit dem System gleichwirkenden Kräften, eine andere Gerade als die Richtung der anderen Kraft; und es entstehen somit zwischen allen Theilen des Raumes duale Verhältnisse (sic), die im Allgemeinen von der derselben Beschaffenheit sind, als die in neueren Zeiten schon öfter behandelten Dualitätsverhältnisse der Figuren, nur dass hier die beschränkende Bedingung hinzukommt, dass die einem Punkte entsprechende Ebene durch ihn selbst geht, und dass in jeder Ebene der ihr entsprechende Punkt selbst liegt. (Möbius, 1833, p. 491)

Bei der analytischen Beschreibung der von einem Kräftesystem induzierten Drehmomente bezüglich beliebiger Achsen traten in Möbius Darstellung bilineare antisymmetrische Ausdrücke auf. In – leicht anachronistischer – Sprechweise kann man dies als einen “Vorschein” des mathematischen Sachverhalts ansehen, der in der algebraischen Beschreibung eines Nullsystems durch eine nichtentartete alternierende Bilinearform α auf P^3 , zum Ausdruck gebracht wird:

$$\alpha(x, y) = {}^t x A y = -\alpha(y, x) \quad \text{mit } x = [x_0, \dots, x_3], a = [a_0, \dots, a_3]$$

Die von Möbius entdeckte Korrelation von Nullpunkt-Nullebene bezüglich eines Kräftesystems fügte den bis dahin bekannten Dualitätsphänomenen der projektiven Geometrie (also der Polarreziprozität/Polarsystem auf der einen Seite und der formalen Punkt-Ebenen Dualität bezüglich Inzidenzaussagen) ein weiteres hinzu, das methodisch mit den Polarreziprozitäten vergleichbar war, aber doch andere Eigenschaften besaß.

Karl Christian von Staudt (1798–1868) zog daraus schon in seinem ersten Versuch einer systematischen Begründung der projektiven Geometrie in seiner *Geometrie der Lage* (Staudt, 1847) die Konsequenz einer schrittweisen Spezifizierung der Eigenschaften von Dualitäten des projektiven Raumes. Er ging von einer allgemeinen Charakterisierung der Projektivitäten (“projectivische Verwandtschaften”) als – in unserer Sprache ausgedrückt – bijektiven, inzidenz- und harmonizitätserhaltenden Abbildungen zwischen projektiven Räumen aus (Staudt, 1847, §8ff). Dann traf er der Unterscheidung von *Kollineationen* und *Korrelationen* (“collineare” bzw. “reciproke projectivische Verwandtschaften”) und zeichnete darunter schließlich die involutorischen Korrelationen/Dualitäten aus, $\psi^2 = \pm id$ (Staudt, 1847, p. 118). Diese konnte er nach Möbius’ Entdeckung in Nullsysteme und Polarsysteme unterteilen, je

nachdem sie nur Punkte besaßen, die auf ihrer reziproken Ebene liegen, oder nicht (Staudt, 1847, p. 191).

In seinen späteren Untersuchungen stellte von Staudt eine weitere Beziehung zwischen Raumkurven 3. Ordnung und Nullsystemen her, die eine neue geometrische Charakterisierung lieferte (Staudt, 1856–1860, Bd. 1, p. 311ff):

Zu einem Nullsystem ψ im Raum gibt es eine Kurve dritter Ordnung C_3 , die sogenannte “Ordnungskurve des Nullsystems”, mit den Eigenschaften:

(i) Aus jedem Punkt P des Raumes gibt es genau drei Schmiegeebenen an die C_3 ; die drei zugehörigen Schmiegepunkte erzeugen die Ebene $\psi(P)$.

(ii) Die Schmiegeebenen an die drei Schnittpunkte einer beliebigen Ebene E mit der C_3 schneiden sich in einem Punkt von E ; dieser Punkt ist $\psi(E)$.

Umgekehrt definiert jede Raumkurve 3. Ordnung auf diese Weise ein Nullsystem.

Die Einführung der Ordnungskurve erlaubte eine Betrachtung der Nullsysteme analog der Pol-Polaren Korrelation in der Ebene bzw. der Charakterisierung einer räumlichen Polarreziprozität durch die zugehörige Quadrikfläche. Die große Bedeutung dieser konkreten Beschreibungen beim Studium der Polarreziprozität erklärt wohl die Faszination, die die Staudtsche Beschreibung der Nullsysteme durch kubische Ordnungskurven zunächst ausübte und die, wie wir gesehen haben, auch Culmann anscheinend teilte, obwohl sie letztlich für die graphische Statik bedeutungslos blieb.

6 Cremonas *Figure reciproche nella statica grafica*

Luigi Cremona (1830–1903) setzte Anfang der 1870er Jahre Culmanns und Maxwells Methoden der Verwendung dualer Diagramme in der graphischen Statik zueinander in Beziehung und führte sie einheitlich auf Nullsystem-Dualität zurück. Er hatte an der Universität Pavia Bauwissenschaften, Architektur und Mathematik studiert und war als Lehrer an Gymnasien zunächst in Cremona, später auch in Mailand tätig, bevor er 1860 Professor für höhere Geometrie an der Universität Bologna wurde. 1866 wechselte er unter ausdrücklicher Erweiterung seiner Lehrdenomination auf graphische Statik nach Mailand. 1873 wurde er nach Rom berufen, wurde Leiter der dort neu gegründeten Ingenierschule und lehrte an der Universität Rom, bis er Ende der 1870er Jahre seine wissenschaftliche Laufbahn zugunsten eines Vollzeittätigkeit als Politiker aufgab (zunächst als Senator, dann auch als Erziehungsminister). In seine Mailänder Periode fällt seine intensivste Beschäftigung mit der graphischen Statik; in diesem Zeitraum verfasste er eine weit bekannt gewordene Schrift unter dem Titel “*Le figure reciproche della statica grafica*” (Cremona, 1872). Ein Jahr später erschien sie in (freier) deutscher Übersetzung (?).

In dieser Arbeit schlug Cremona eine Brücke zwischen den Dualitätsauffassungen Culmanns und Maxwell-Rankines und entwickelte sie durch eigene

Ideen weiter. Dabei ersetzte er insbesondere reziproke Diagramme in der Ebene konsequent durch ebene (Zentral-) Projektionen dualer Polyeder bezüglich räumlichen Nullsystemen. Für ihn stand Maxwells Gleichgewichtskriterium (unser Satz 1), gestützt auf Rankines Lemma (Lemma 1) im Vordergrund (Cremona, 1872, p. 11). Aus Cremonas Sicht waren Culmanns Konstruktionen mittels der Reziprozität zwischen Seil- und Kräftepolygonen auch – und sogar besser – unter die Maxwellsche Dualitätsauffassung zu subsumieren, insbesondere wenn man diese, wie er vorschlug, auf das statisch fundierte Konzept der Nullsysteme stützte.²⁷

Zunächst zeigte er, dass die Reziprozität von Seil- und Kräftepolygon im Sinne Culmanns (bei der ja die äußeren Kräfte Wirkungslinien in einem Büschel haben mussten, Satz 3) sich auch als ebene Projektionen von Nullsystem-dualen Polyedern im Raum darstellen lassen (Cremona, 1872, §14, p. 17). Der Übergang zu einer von räumlichen Dualitäten induzierten Reziprozität von Diagrammen in der Ebene erlaubte Cremona darüber hinaus eine Verallgemeinerung auch auf den Fall äußerer Kräfte, deren Wirkungslinien nicht durch einen Punkt laufen. Er führte dazu ein zweites Hilfs-Seilpolygon zu einem weiteren Pol O'' ein. Damit erhielt Cremona den

Satz 4 (Cremona 1872) Gegeben sei ein Seilpolygon Γ zu äußeren Kräften p_1, \dots, p_n und das zugehörige Kräftepolygon Γ' mit Pol O' . Man ergänze das Kräftepolygon durch Einfügung eines (beliebig wählbaren) weiteren Pols O'' und Verbindungsgeraden a_i'' zu den Ecken von Γ' und bezeichne das erweiterte Diagramm als $\tilde{\Gamma}'$. Dem entsprechend füge man in Γ das zugehörige Hilfs-Seilpolygon mit Ecken auf den Kraftlinien der p_i ($1 \leq i \leq n$) (und Kanten parallel zu den a_i'') ein und bezeichne das so erweiterte Seilpolygondiagramm als $\tilde{\Gamma}$ (siehe Abb. 7). Dann gibt es Nullsystem-duale Polyeder Π und Π' im Raum, sodass die ebenen Diagramme $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{\Gamma}'$ deren ebene Zentralprojektionen sind. $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{\Gamma}'$ sind damit insbesondere Maxwell-dual. (Cremona, 1872, §16f.)

Cremonas Beweisidee beruhte darauf, $\tilde{\Pi}$ als eine (schiefe) Säule zu konzipieren. Die Deckflächen entsprachen den beiden Seilpolygonen. $\tilde{\Pi}'$ ist eine Doppelpyramide mit Spitzen, die O' und O'' korrespondieren.

Ein analoges Vorgehensweise konnte Cremona auf Stab- und Kräftepolygonen der Fachwerktheorie anwenden und damit die Maxwellsche Dualität

²⁷“Tutte le quistioni di static teorica, . . . , sono risolte dal prof. Culmann con uniforme e semplice procedimento, che in sostanza si riduce alla costruzione delle due figure ch’egli denomine *Kräftepolygon e Seilpolygon*. E benché egli non le consideri come figure reciproche, nel senso della teoria di Maxwell, tuttavia esse son tali sostanzialmente; . . .” (Cremona, 1872, p. 14f.). Übersetzt: “Alle Fragen der graphischen Statik . . . werden von Prof. Culmann durch ein einheitliches und einfaches Verfahren gelöst, das sich im wesentlichen auf die Konstruktion der beiden Figuren reduziert, die man *Kräfte- und Seilpolygon* nennt. Und obwohl er sie nicht als reziproke Figuren im Sinne der Maxwellschen Theorie betrachtet, sind sie das im Grunde doch . . .”

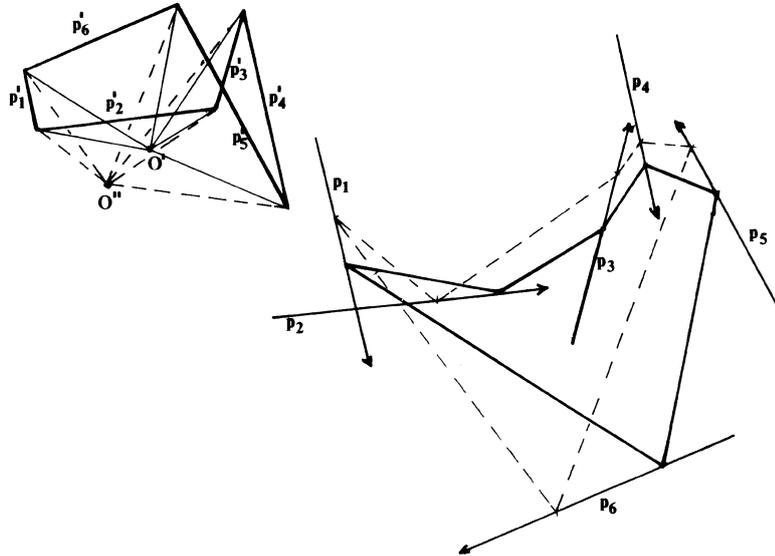


Abbildung 7: Erweitertes Kräftepolygon $\tilde{\Gamma}'$ (links), erweitertes Seilpolygon $\tilde{\Gamma}$ (rechts), Quelle (Scholz 1989, S. 197) nach (Cremona 1872, Fig. 3)

auf den allgemeinen Fall beliebig gerichteter Lasten ausdehnen. Abb. 8 zeigt ein Paar dualer Diagramme für die Tragwerkstruktur einer Hängebrücke mit rein gravitativen äußeren Kräften, Abb. 9 einen Brückenträger mit fiktiven dynamischen Belastungen unterschiedlicher Richtungen.

Bis in die 1890er Jahre erschienen zuweilen noch weitere Arbeiten zur Dualität in der graphischen Statik. Theoretisch gingen sie über die von Maxwell und Cremona entwickelten Ergebnisse jedoch nicht wesentlich hinaus. Diese Arbeiten stellten einzelne Aspekte der Theorie dar (Eddy, 1878) oder diskutierten in leicht abgeänderten Formen Vorschläge zur theoretischen Vereinheitlichung der Maxwellschen und der Cremonaschen Konstruktion dualer Diagramme (Hauck, 1887, 1899). Mit dem Nachweis, dass reziproke Diagramme auch für ebene bestimmte Fachwerke mit allgemeinen Gleichgewichtssystemen äußerer Kräfte gebildet werden können und der Standardisierung der Herleitung durch Nullsystemdualitäten hatten Maxwell und Cremona die theoretische Problematik der reziproken Diagramme der Statik zu diesem Zeitpunkt weitgehend ausgeschöpft.

7 Abschließende Bemerkungen

Die graphischen Methoden der Statik und die Dualität von Diagrammen verloren mit dem Übergang zum neuen Jahrhundert ihre zentrale Stellung für die Disziplinbildung der Baustatik (Kurrer, 2008, chap. 7). Eine einfache Va-

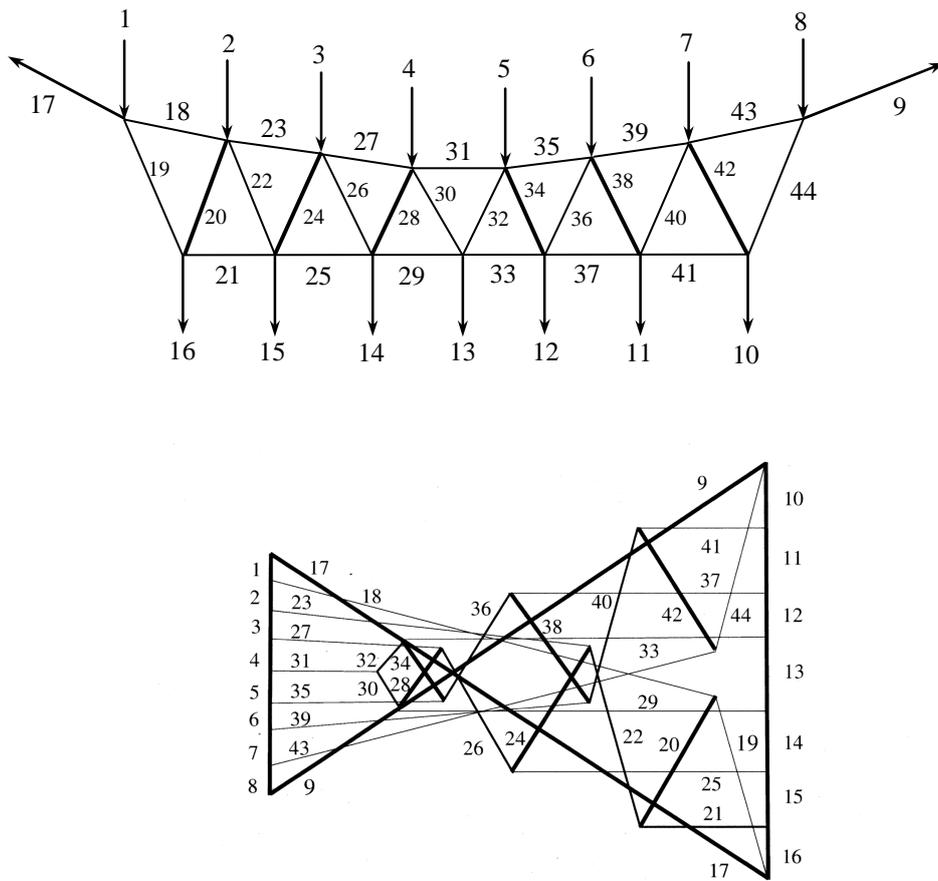


Abbildung 8: Maxwell-Cremona duale Stab- und Kräftediagramme einer Hängebrücke. Quelle (Cremona:o.D., p. 21) nach (Cremona 1872, Fig. 11)

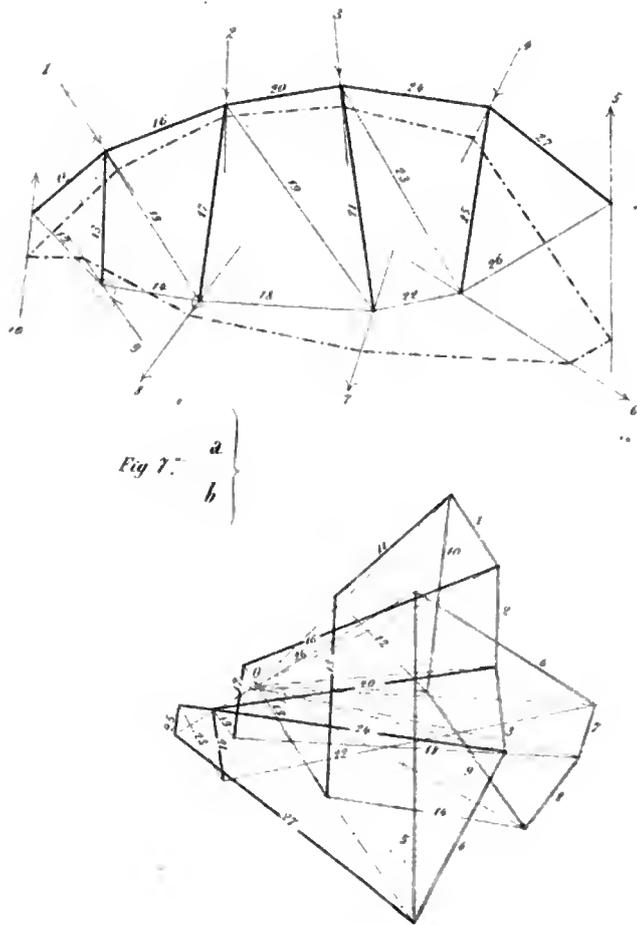


Abbildung 9: Duales Stab- und Kräfte diagramm eines Brückenträgers mit nichtparallelen äußeren Kräften (Cremona 1872, Anhang, Fig. 7)

riante der Konstruktion reziproker Diagramme lagerte sich allerdings unter dem Titel *Cremona-Pläne*, in etwas anderer Fassung auch als *Bow-Pläne*,²⁸ in den Ausbildungsgängen der Bauingenieure ab. Die Reziprozität ließ sich in Form einfacher graphischer Konstruktionsregeln formulieren. In der Tat war eine entsprechende Methode unabhängig von Maxwell und Culmann und vor Cremonas Zusammenschau von einem Zeichner (namens Taylor) eines englischen Konstruktionsbüros (Cochrane) entwickelt worden (Maxwell, 1876, p. 494).²⁹

Zentral war dabei die Anweisung, auf eine Entsprechung von Ecken/Punkten k -ter Ordnung (d.h. mit k Kanten zusammentreffend) des einen Diagramms zu k -Polygonen im anderen zu achten und die Parallelität einander entsprechender Kanten zu gewährleisten. Ein Hintergrund oder gar eine Theoretisierung durch (räumliche) projektive Geometrie war dafür nicht notwendig. Das hier auftretende Dualitätskonzept war durch die genannten kombinatorischen Eigenschaften, ergänzt um eine geometrisch konfigurative Spezifizierung (Parallelität zueinander zugeordneter Kanten), zureichend charakterisiert.

Eine Wiederaufnahme des thematischen Feldes erfolgte erst etwa hundert Jahre später, dann allerdings angereichert durch kombinatorisch-topologische Konzepte (Crapo, 1979, 1982, 1993). Ob diese rezente Wiederaufnahme der Ideen Maxwells, Culmanns, Cremonas und anderer durch eine Gruppe heutiger Mathematiker Bestand haben wird, bleibt abzuwarten.

²⁸Nach Robert Bows umfangreicher Auflistung reziproker Diagramme für 136 Typen bestimmter Fachwerke (Bow, 1873).

²⁹Detaillierter in (Jenkin, 1869).

Literatur

- Bow, Robert. 1873. *Economics of Construction in Relation to Framed Structures*. Edinburgh/London/New York: Black. 27
- Brieskorn, Egbert. 2019. *Klassische Gestalten und moderne Strukturen in Geometrie und Kristallographie* geplant als §13.7 und §14 von Lineare Algebra und Analytische Geometrie III mit Anhang zur Geschichte der Kristallographie. Aus dem Nachlass herausgegeben von E. Scholz. Digitale Fassung auf *Imaginary*. 11, 20
- Buchwald, Jed. 1985. *From Maxwell to Microphysics: Aspects of Electromagnetic Theory in the Last Quarter of the Nineteenth Century*. Chicago: University Press. 8
- Chatzis, Konstantinos. 2004. “La réception de la statique graphique en France durant le dernier tiers du XIX³ siècle.” *Révue d’histoire des mathématiques* 10:7–43. 2
- Crapo, Henry. 1979. “Structural rigidity.” *Structural Topology* (1):26–45. 7, 16, 27
- Crapo, Henry; Whiteley, Walter. 1982. “Statics of frameworks and motions of panel structures.” *Structural Topology* (6):42–82. 27
- Crapo, Henry; Whiteley, Walter. 1993. “Plane self stresses and projected polyhedra I: The basis pattern.” *Structural Topology* (20):55–78. 27
- Cremona, Luigi. 1872. *Le figure reciproche nella statica grafica*. Milano: Giuseppe Bernardoni. 3, 23, 28
- Cremona, Luigi. 1873. “Die reziproken Figuren in der graphischen Statik. Aus dem Italienischen übersetzt von A. Migiotti.” *Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins* 25:230–240. 28
- Cremona, Luigi. 1890. *Reciprocal figures in graphical statics*. English translation of Cremona (1872) by T.h. Beare. Oxford: Clarendon.
- Cremona, Luigi. o.D. “Reciprocal figures in graphical statics.”. English translation of Cremona (1873) by D.H. Delphenich.
URL: [https://neo-classical-physics.info/uploads/3/4/3/6/34363841/...](https://neo-classical-physics.info/uploads/3/4/3/6/34363841/)
- Crowe, Michael. 1967. *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Notre Dame: University Press. Reprint New York: Dover 1985, 1994. 9
- Culmann, Karl. 1866. *Graphische Statik*. Zürich: Meyer & Zeller. 2, 16, 17, 18, 19
- Culmann, Karl. 1875. *Graphische Statik*. Zweite neu bearbeitete Auflage. Zürich: Meyer & Zeller. 2, 16, 19, 20
- Darrigol, Olivier. 2000. *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. Oxford: University Press. 8

- Eddy, H.T. 1878. “On the two general reciprocal methods in graphical statics.” *American Journal of Mathematics* 1:322–335. 24
- Föppl, August. 1900. *Vorlesungen über technische Mechanik*. Bd. 2 *Graphische Statik*. Leipzig: Teubner. Diverse Auflagen, 7-te Auflage 1926. 7
- Hauck, Guido. 1887. “Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik. Teil I.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 100:365–389. 24
- Hauck, Guido. 1899. “Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik. Teil II.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 102:567ff. 24
- Jenkin, Fleeming. 1869. “On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains on frameworks.” *Transaction Royal Society Edinburgh* 25:441–447. 27
- Kurrer, Karl-Eugen. 2002. *Geschichte der Baustatik*. Berlin: Ernst & Sohn/Wiley. 2
- Kurrer, Karl-Eugen. 2008. *The History of the Theory of Structures. From Arch Analysis to Computational Mechanics*. Berlin: Ernst & Sohn/Wiley. 27, 29
- Kurrer, Karl-Eugen. 2018. *The History of the Theory of Structures. Searching for Equilibrium*. Berlin: Ernst & Sohn/Wiley. Second, enlarged edition of Kurrer (2008). 2, 3, 8, 16, 19
- Lehmann, Christine; Maurer, Bertram. 2006. *Karl Culmann und die graphische Statik. Zeichnen, die Sprache des Ingenieurs*. Berlin: Ernst und Sohn. 16
- Loh, André. 1994. “August Ferdinand Moebius (1780–1868) – Leben und Werk.” Dissertationsschrift Mathematisches Institut der Universität Leipzig. 20
- MacLeod, Iain A. 2015. “Maxwell’s articles on structural mechanics.” *Newsletter of the James Clerk Maxwell Society* 6:1–4. 9
- Maurer, Bertram. 1998. *Karl Culmann und die graphische Statik*. Stuttgart: Verlag für Geschichte der Naturwiss. u. Technik. 16
- Maxwell, James Clerk. 1856. “On Faraday’s lines of force.” *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* (10):155–229. In (Maxwell, 1890, 1, 155–229). 8
- Maxwell, James Clerk. 1864a. “On reciprocal figures and diagrams of forces.” *Philosophical Magazine* (27):250ff. In (Maxwell, 1890, vol. 1, 514–525). 9, 10, 11, 12, 13
- Maxwell, James Clerk. 1864b. “On the calculation of of the equilibrium of stiffness of frames.” *Philosophical Magazine* (27):294ff. In (Maxwell, 1890, vol. 1, 598–604). 9
- Maxwell, James Clerk. 1867. “On the application of the theory of reciprocal polar figures to the construction of diagrams of forces.” *Engineer* (24):402. Not in Maxwell (1890). 9, 13

- Maxwell, James Clerk. 1870. "On reciprocal figures, frames, and diagrams of forces." *Transactions Royal Society London* (26):1ff. In (Maxwell, 1890, vol. 2, 161–207). 9, 15
- Maxwell, James Clerk. 1873. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 vols. Oxford: Clarendon. 9
- Maxwell, James Clerk. 1876. "On Bow's method of drawing diagrams in graphical statics with illustrations from Peaucellier's linkage." *Proceedings Cambridge Philosophical Society* (2):407ff. In (Maxwell, 1890, vol. 2, 492ff.). 9, 27
- Maxwell, James Clerk. 1890. *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, ed. W.D. Niven, 2 vols. Cambridge: University Press. Reprint New York (Dover) 1965. 29, 30
- Möbius, August Ferdinand. 1828. "Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und einbeschrieben zugleich heißen?" *Journal für reine und angewandte Mathematik* 3:273–278. In (Möbius, 1885–1887, Bd. 1, 439–446). 20
- Möbius, August Ferdinand. 1833. "Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume." *Journal für reine und angewandte Mathematik* 10:317–341. In (Möbius, 1885–1887, Bd. 1, 489–515). 20, 21
- Möbius, August Ferdinand. 1837. *Lehrbuch der Statik*. Leipzig: Göschen. In (Möbius, 1885–1887, Bd. 3, 1–498). 20
- Möbius, August Ferdinand. 1885–1887. *Gesammelte Werke*, 4 Bände. Leipzig: Hirzel. Neudruck Wiesbaden: Sändig 1967. 30
- Rankine, William John Macquorn. 1858. *A Manual of Applied Mechanics*. London: Griffin & Co. Diverse reeditions, e.g. ²1869, ⁹1877, ¹³1891. 8, 10
- Rankine, William John Macquorn. 1864. "Principle of the equilibrium of polyhedral frames." *Philosophical Magazine* 27:92. 10
- Salmon, George; Fiedler, Wilhelm. 1860. *Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden*. Nach George Salmon frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. Leipzig: Teubner. 2. Auflage 1866, weitere Auflagen; ab 5. Auflage 1887/88 in zwei Teilen, 7. Auflage 1907. 17
- Scholz, Erhard. 1989. *Symmetrie - Gruppe - Dualität*. Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts. Vol. 1 of *Science Networks* Basel: Birkhäuser. 2, 4, 5, 6, 7, 10, 16, 19, 20
- Staudt, Karl Christian von. 1847. *Geometrie der Lage*. Nürnberg: Friedrich Korn. 16, 21, 22
- Staudt, Karl Christian von. 1856–1860. *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3 Bde: Bd. 1 1856, Bd. 2 1857, Bd. 3 1860. Nürnberg: Friedrich Korn. 22
- Straub, Hans. 1949. *Die Geschichte der Bauingenieurkunst*. Basel: Birkhäuser. 3. Auflage 1975. 4

- Tournès, Dominique. 2000. "Pour une histoire du calcul graphique." *Revue d'Histoire des Mathématiques* 6:127–161. 2
- Varignon, Pierre. 1725. *Nouvelle mécanique ou statique*. Paris: Claude Jombert. 4
- Werner, Ernst. 1980. *Technisierung des Bauens. Geschichtliche Grundlagen moderner Bautechnik*. Düsseldorf: Werner Verlag. 16