

Geometrie im 19. Jahrhundert, WS 2010/11

Übungen, 7. Serie

- 1) Newtons berechnete die Krümmung einer ebenen Kurve $(x(t), y(t))$ als

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Berechnen Sie die Krümmungen

- a) des Graphs $(x, f(x))$ einer mindestens zweimal differenzierbaren Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,
 - b) eines Kreises mit Radius r um den Ursprung,
 - c) einer Ellipse mit Halbachsen a, b und Zentrum im Ursprung,
 - d) einer Hyperbel mit Halbachsen a, b und Zentrum im Ursprung.
- 2) Betrachten Sie die Raumkurve $\gamma(\tau) = (a \cos \tau, a \sin \tau, b\tau)$.
- a) Beschreiben Sie die Kurve geometrisch.
 - b) Berechnen Sie Bogenlänge und Bogenlängenparametrisierung.
 - c) Berechnen Sie Krümmung und Torsion der Kurve.
- 4) Zeigen Sie dass für differenzierbare Kurven $c(t), d(t)$ im euklidischen \mathbb{R}^n mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Produktregel für Skalarprodukte gilt:

$$\langle c(t), d(t) \rangle' := \frac{d}{dt} \langle c(t), d(t) \rangle = \langle c'(t), d(t) \rangle + \langle c(t), d'(t) \rangle$$

- 4) Zeigen Sie, dass für eine in Bogenlänge parametrisierte Kurve $c(t)$ im euklidischen \mathbb{R}^n stets c'' orthogonal zu c' ist.