Diplomarbeit

Regularität der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf komplexen Kurven

Angefertigt am
Mathematischen Institut

Vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen
Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

im Februar 2003
von
Jean Ruppenthal
aus
Darmstadt

- *Regularität der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf komplexen Kurven*, Diplomarbeit, Bonn, 2003, unpublished. (Available at http://www.math.uni-bonn.de/people/jean)

Abstract: It is not clear how to define the Dolbeault complex on singular complex spaces. We give a widespread discussion of several setups, including counter-examples showing that Dolbeault's Lemma is not valid in the setup of algebraic differential sheaves, and that we cannot get satisfying Hölder estimates in the extrinsic setup of Henkin and Polyakov. Working in the intrinsic setup of Fornæss, i.e. on the complex manifold of regular points, is much more promising: We give a $\overline{\partial}$ solution operator with Hölder-$(1-\epsilon)$-estimates on arbitrary relatively compact connected subsets of complex curves. Our proof is independent of the work of Fornæss and Gavosto who already proved this result in 1998.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf komplexen Kurven untersucht. Dabei stellt sich zunächst die Frage, wie Differentialformen auf singulären komplexen Räumen zu definieren sind. Der Differentialformenbegriff, der in der Algebra üblich ist, taugt nicht zur Untersuchung der Differentialgleichungen: Werden die Formen auch in Singularitäten definiert, so muss das Lemma von Dolbeault dort nicht unbedingt gelten.

Henkin und Polyakov haben die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf vollständigen Durchschnitten im Einheitsball gelöst [HePo]. In dieser Situation können allerdings keine Lösungen hoher Regularität erwartet werden, da die Geometrie der analytischen Mengen nicht berücksichtigt wird.

Ergiebiger ist es, $\overline{\partial}$-geschlossene Formen auf der komplexen Mannigfaltigkeit der regulären Punkte zu betrachten, und Lösungen der inhomogenen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ebendort zu suchen. Die Lösbarkeit in dieser Situation impliziert auch die Lösbarkeit in dem Setup, das Henkin und Polyakov betrachtet haben.

Eine irreduzible Komponente einer komplexen Kurve kann in der Nähe einer Singularität mittels der Puiseux-Normalisierung durch die Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene parametrisiert und das Problem dorthin verlagert werden.

Dann liefert das Cauchy-Integral eine Lösung

$$f_0(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\lambda(t)}{t-w} dt \wedge d\bar{t},$$

die nach Zurückziehen auf die komplexe Kurve jedoch nicht unbedingt hölderstetig bleibt.

Subtrahiert man allerdings die ersten Glieder der holomorphen Taylor-Entwicklung, so erhält man über

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\lambda(t) w^k}{(t-w)t^k} dt \wedge d\bar{t}$$

Lösungen höherer Regularität.

Dieses Verfahren wurde schon von Fornæss und Gavosto in [FoGa] vorgeschlagen, allerdings nicht ausgearbeitet, da höherdimensionale Räume in der Regel nicht parametrisierbar sind. Solche Räume können aber lokal als analytische Überlagerung eines Polyzylinders dargestellt werden, um auf diesem Wege die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zu lösen.

Für eine offene, relativ kompakte Teilmenge D einer steinschen komplexen Kurve X ohne Singularitäten im Rand bD können Theorem B und das abstrakte Theorem von de Rham verwendet werden, um mit Hilfe einer Parametrix eine globale Lösung der Differentialgleichungen auf D zu erhalten.

Bezeichnen wir mit $L^\infty_{(0,1)}(D \cap \operatorname{Reg}(X))$ die beschränkten $(0,1)$-Formen auf der komplexen Mannigfaltigkeit der regulären Punkte in D und mit $\Lambda_\alpha(D)$ die α-hölderstetigen Funktionen, so ergibt sich insgesamt:

Theorem 2.7.1 *Sei X eine steinsche komplexe Kurve mit isolierten Singularitäten und weiterhin $D \subset\subset X$ eine relativ kompakte, zusammenhängende, offene Teilmenge ohne Singularitäten auf dem Rand bD. Dann existiert zu gegebenem $\alpha \in (0,1)$ ein linearer Operator*

$$T : L^\infty_{(0,1)}(D \cap \operatorname{Reg}(X)) \to \Lambda_\alpha(D)$$

mit $\overline{\partial} Tf = f$ für $f \in L^\infty_{(0,1)}(D \cap \operatorname{Reg}(X))$ und es gilt

$$\|Tf\|_{\alpha,D} \leq C\|f\|_{\infty,D}$$

für eine Konstante $C > 0$, die unabhängig von f ist.

Damit ist ebendieses Resultat aus [FoGa] auf anderem Wege bestätigt. Von dort stammen auch die Ideen zur Definition der Normen auf singulären komplexen Räumen.

Zur genaueren Erläuterung sei auf die Einleitung der beiden Kapitel verwiesen.

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Ingo Lieb für das schöne Thema, Herrn Lieb und Herrn Dr. Torsten Hefer für die ausgezeichnete Betreuung.

1 Zur Problemstellung

Reduzierte komplexe Räume werden mittels holomorpher Einbettungen lokal als analytische Teilmengen offener Gebiete eines $\mathbb{C}^n$ realisiert.

Eine Funktion g auf einer analytischen Menge X ist holomorph, wenn es zu jedem Punkt $p \in X$ eine Umgebung $U(p)$ in $\mathbb{C}^n$ und eine in $U(p)$ holomorphe Funktion gibt, die auf $X \cap U(p)$ mit g übereinstimmt.

Dies lässt sich nicht direkt auf holomorphe Differentialformen übertragen, da sonst keine Ableitungsoperatoren auf X existieren. Nehmen wir an, X sei in $U(p)$ als gemeinsame Nullstellenmenge k holomorpher Funktionen $f_1, ..., f_k$ gegeben, so muss gesetzt werden, dass die Formen df_i auf X verschwinden.

Für allgemeine Differentialformen treten weitere Schwierigkeiten auf. Es ist nötig, sich auf reell-kohärente analytische Mengen zu beschränken, da das Ideal der unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die auf X verschwinden, ansonsten nicht unbedingt von den Funktionen $f_i, \overline{f_i}$, $i = 1, ..., k$ erzeugt wird. Setzt man für solche analytischen Mengen dann df_i und $d\overline{f_i}$ gleich 0 auf X, so existieren verallgemeinerte Ableitungsoperatoren.

Damit ist es möglich, Komplexe von Differentialformen zu betrachten. H.-J. Reiffen hat am Beispiel der analytischen Menge $A := \{z : z_1^4 + z_2^5 + z_2^4 z_1 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ gezeigt, dass das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen in den Singularitäten nicht gelten muss [Rei].

Wir übertragen dieses Ergebnis auf den Dolbeault-Komplex und zeigen, dass für die Singularität in A auch das Lemma von Dolbeault nicht gilt.

Es sei daraufhingewiesen, dass analytische Mengen, die nicht reell-kohärent sind, durchaus keine Pathologie darstellen. Etwa $\{z : z_1^2 = z_3 z_2^2\} \subset \mathbb{C}^3$ ist nicht reell-kohärent.

Am Beispiel der Parabeln $X_{m,n} := \{z : z_1^m = z_2^n\} \subset \mathbb{C}^2$ zeigt sich, dass im extrinsischen Setup, das Henkin und Polyakov betrachtet haben, kein stetiger Lösungsoperator zu $\overline{\partial}$ vom Raum der beschränkten $(0,1)$-Formen in den Raum der δ-hölderstetigen Funktionen für $\delta > m/n$ erwartet werden darf.

1.1 Reduzierte komplexe Räume

Beginnen wir mit der klassischen Definition analytischer Mengen:

Definition 1.1.1. *Eine Teilmenge A eines offenen Gebietes $D \subset \mathbb{C}^n$ heißt* ***analytisch*** *in D, falls zu jedem Punkt $p \in D$ eine Umgebung U_p von p existiert zusammen mit endlich vielen holomorphen Funktionen $f_1, ..., f_k \in \mathcal{O}(U_p)$, so dass $U_p \cap A$ die exakte gemeinsame Nullstellenmenge der Funktionen $\{f_1, ..., f_k\}$ ist, also*

$$U_p \cap A = \{z \in U_p : f_1(z) = ... = f_k(z) = 0\}$$

gilt.

Wir werden uns auf reduzierte komplexe Räume beschränken, so dass die Strukturgarbe eines solchen Raumes als Untergarbe der Garbe der Keime stetiger Funktionen auftritt und holomorphe Abbildungen durch ihre zu Grunde liegende stetige Abbildung eindeutig bestimmt sind. Folgende Definitionen sind durchaus unüblich, ersparen uns aber den Umweg über komplexe Räume in voller Allgemeinheit.

Definition 1.1.2. *Ein Tupel $(X, \mathcal{O}_X)$, bestehend aus einem hausdorffschen, parakompakten topologischen Raum X mit abzählbarer Topologie und einer Untergarbe $\mathcal{O}_X$ der Garbe der Keime der stetigen Funktionen auf X, heißt* ***reduzierter komplexer Raum****, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jedem Punkt $p \in X$ existiert eine offene Umgebung U von p und eine homöomophe Abbildung f auf eine analytische Teilmenge $f(U)$ eines Gebietes $D \subset \mathbb{C}^n$, so dass die kanonische Abbildung*

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \mathcal{O}_D &\rightarrow f_*(\mathcal{O}_X|_U) \\ h \in \mathcal{O}_D(V) &\mapsto h \circ f \in \mathcal{O}_X|_U(f^{-1}(V)) = f_*(\mathcal{O}_X|_U)(V) \end{aligned}$$

surjektiv ist.
Die Garbe $\mathcal{O}_X$ bezeichnen wir als Garbe der Keime der holomorphen Funktionen auf X bzw. als ***Strukturgarbe*** *von X. Schnitte in $\mathcal{O}_X$ nennen wir* ***holomorphe Funktionen****.*

Das heißt, eine stetige Funktion $g \in C_X(V)$, $V \subset U$ offen, ist holomorph im Punkt $q \in V$ dann und nur dann, wenn in einer Umgebung W von $f(q)$ eine holomorphe Funktion $h \in \mathcal{O}_D(W)$ existiert mit $g|_{f^{-1}(W)} = h \circ f|_{f^{-1}(W)}$. Wir werden einen reduzierten komplexen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ in der Regel nur kurz mit X notieren.
Analytische Mengen besitzen nach unserer Definition also unmittelbar eine eindeutige Struktur als reduzierte komplexe Räume. Wir werden daher in der Regel nicht zwischen den beiden Begriffen für Teilmengen eines $\mathbb{C}^n$ unterscheiden.

Im Allgemeinen sollte man hier aber größere Sorgfalt walten lassen, da eine analytische Menge als topologischer Basisraum diverser nicht-reduzierter komplexer Räume auftreten kann.
Wir wollen noch den Begriff der Idealgarbe einer analytischen Menge einführen und kurz die Verbindung zu komplexen Räumen herstellen.

Definition 1.1.3. *Sei A eine analytische Teilmenge eines Gebietes D des $\mathbb{C}^n$. Für $U \subset D$ offen sei*

$$i_A(U) := \{f \in \mathcal{O}_D(U) : f|_{U \cap A} \equiv 0\}.$$

Damit ist i_A eine Untergarbe von Idealen der Garbe $\mathcal{O}_D$ und wir nennen i_A ***Idealgarbe der analytischen Menge*** *A.*

Wir nutzen die Idealgarbe, um die holomorphen Funktionen auf einer analytischen Menge A auf algebraische Weise zu charakterisieren:

Lemma 1.1.4. *Sei A eine analytische Teilmenge eines Gebietes D des $\mathbb{C}^n$. Dann gilt:*

$$\mathcal{O}_A \cong \left(\mathcal{O}_D / i_A\right)|_A.$$

Beweis. An dieser Stelle sei kurz darauf hingewiesen, dass wir für eine Garbe $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{G}|_A$ die Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{V} \mathcal{G}(V),$$

den direkten Limes über alle offenen Mengen V mit $A \cap U \subset V$, meinen, die wieder eine Garbe ist. Diese Definition wird in dieser Arbeit öfter implizit verwendet werden.
Wenn von einer kleinen offenen Menge die Rede ist, so ist gemeint, dass die Menge im weiteren Verlauf gegebenenfalls ohne Einschränkung verkleinert wird.
Wir konstruieren einen Homomorphismus von Garben. Das können wir lokal tun. Sei $x \in A$ ein Punkt, $\omega_x \in \mathcal{O}_{A,x}$ der Keim einer holomorphen Funktion. Sei weiterhin $U \subset D$ eine kleine offene Umgebung von x, so dass $\omega \in \mathcal{O}_D(U)$ den Keim ω_x repräsentiert. Dann setzen wir:

$$\Phi_x(\omega_x) := [\omega]_x = [\omega_x]$$

Angenommen, wir hätten uns für einen anderen Repräsentanten η entschieden, so stellen ω und η auf $U \cap A$ die gleiche stetige Funktion dar. Damit ist aber $\omega - \eta \in i_A(U)$ und es folgt $\Phi_x(\omega_x) = \Phi_x(\eta_x)$.
Jetzt zeigen wir, dass es sich bei Φ um einen Isomorphismus handelt. Sei dazu wieder $U \subset D$ offen, $[f] \in \left(\mathcal{O}_D / i_A\right)|_A(U \cap A)$, repräsentiert durch $f \in \mathcal{O}_D(U)$. Wir finden eine solche Funktion f, da die Prägarbe $U \mapsto (\mathcal{O}_D(U)/i_A(U))$ schon eine Garbe, also isomorph zu $\mathcal{O}_D/i_A$ ist.

Dann ist aber auch $f|_{U\cap A} \in \mathcal{O}_A(U \cap A)$ und wir sehen, dass $\Phi_{U\cap A}$ für alle U, also auch Φ insgesamt, surjektiv ist:

$$\Phi_{U\cap A}(f_{U\cap A}) = [f].$$

Nehmen wir nun an, es gelte $\Phi_x(\omega_x) = \Phi_x(\eta_x)$, d.h. für ω_x und η_x existieren Repräsentanten ω und η, die in einer kleinen Umgebung U von x auf $U \cap A$ übereinstimmen. Dann gilt aber $\omega_x = \eta_x$, da es sich bei $\mathcal{O}_A$ um eine Untergarbe der Garbe der Keime stetiger Funktionen handelt. Das ist der entscheidende Punkt, wieso dieses Lemma überhaupt gilt! $\square$

Nach dem Oka-Cartan Theorem [GrRe], S.84, wissen wir, dass die Idealgarbe i_A einer analytischen Menge A kohärent ist. Also handelt es sich bei $(A, \mathcal{O}_A)$ tatsächlich um einen (reduzierten) komplexen Raum nach üblicher Definition, da

$$A = N(i_A) := \{z \in D : i_{A,x} \neq \mathcal{O}_x\}$$

gilt. Ist nämlich $x \notin A$ so folgt natürlich $i_{A,x} = \mathcal{O}_x$. Andererseits ist für $x \in A$ nach Definition $f(x) = 0$ für alle $f \in i_{A,x}$, so dass $i_{A,x} \neq \mathcal{O}_x$ gilt.
Dass reduzierte komplexe Räume umgekehrt unserer Definition 1.1.2 genügen, ist klar, da wir wissen, dass komplexe Räume genau dann reduziert sind, wenn ihre Strukturgarbe eine Untergarbe der Garbe der Keime stetiger Funktionen ist [GrRe], S.89.
Nähern wir uns nun den Morphismen reduzierter komplexer Räume.

Definition 1.1.5. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei reduzierte komplexe Räume. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt* ***holomorphe Abbildung****, falls für alle offenen Teilmengen $V \subset Y$ und alle holomorphen Funktionen $g \in \mathcal{O}_Y(V)$ die Komposition $g \circ f$ eine in $f^{-1}(V)$ holomorphe Funktion ist. Ist f homöomorph und f^{-1} ebenfalls holomorph, so nennen wir f eine biholomorphe Abbildung.*

Definition 1.1.6. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei reduzierte komplexe Räume. $(Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt* ***abgeschlossener Unterraum*** *von $(X, \mathcal{O}_X)$, falls $Y \subset X$ abgeschlossen und $\widetilde{\iota} : \mathcal{O}_X \to \iota_*(\mathcal{O}_Y)$ surjektiv ist für die Injektion $\iota : Y \hookrightarrow X$.*
Eine holomorphe Abbildung zwischen zwei reduzierten komplexen Räumen $f : X \to Y$ heißt ***Einbettung****, falls f durch einen abgeschlossenen reduzierten komplexen Unterraum $\iota : Y' \hookrightarrow Y$ faktorisiert, also eine biholomorphe Abbildung $\Phi : X \to Y'$ mit $f = \iota \circ \Phi$ existiert.*
Eine holomorphe Einbettung $\iota : U \hookrightarrow D$ in eine offene Teilmenge D eines $\mathbb{C}^n$ nennen wir ***lokale Karte****, eine Überdeckung von X mit lokalen Karten heißt* ***Atlas****.*

Rückblickend stellen wir also fest, dass reduzierte komplexe Räume lokal durch holomorphe Einbettungen in einen $\mathbb{C}^n$ definiert worden sind.

Betrachten wir nun differenzierbare Funktionen:

Definition 1.1.7. *Sei X ein reduzierter komplexer Raum, $V \subset X$ offen. Eine stetige Funktion $\varphi : V \to \mathbb{C}$ heißt **glatt** oder C^∞, wenn zu jedem Punkt $p \in X$ eine offene Umgebung $U \subset V$ und eine lokale Karte $\iota : U \hookrightarrow D$ existieren, sowie eine glatte Funktion $h \in C^\infty(D)$ mit der Eigenschaft $\varphi|_U = h \circ \iota$.*
Wir bezeichnen mit C_X^∞ die Garbe der Keime der glatten, das heißt unendlich oft differenzierbaren Funktionen.

Es kann überprüft werden, dass die Existenz einer solchen Funktion h nicht von der gewählten lokalen Einbettung abhängt.
Während die vorliegende Definition differenzierbarer Funktionen eine extrinsische Prozedur zu Grunde legt, wie es auch unsere Definition holomorpher Funktionen tut, werden wir im nächsten Abschnitt analog zum Fall der holomorphen Funktionen auch hier noch eine algebraische Definitionsmöglichkeit kennen lernen, die sich für reduzierte Räume allerdings wieder als äquivalent erweist.
Wir erinnern uns, dass komplexe Räume als parakompakt vorausgesetzt worden sind. Das liefert die Existenz einer Zerlegung der Eins, die wir später benutzen werden, um Normen zu definieren und eine Parametrix zum Operator $\overline{\partial}$ zusammenzusetzen. Außerdem werden wir darauf zurückgreifen, um die Feinheit diverser Garben auf X sicherzustellen, die sich damit als azyklisch erweisen.
Für die Konstruktion einer Zerlegung der Eins benötigt man glatte Abschneidefunktionen. Deren Existenz liefert folgendes Lemma:

Lemma 1.1.8. *Sei X ein (reduzierter) komplexer Raum, $U \subset X$ offen und $K \subset U$ kompakt. Dann existiert eine reell-wertige Funktion $\chi \in C_X^\infty(X)$, $0 \leq \chi(z) \leq 1$ für alle $z \in X$, mit $\chi \equiv 1$ auf K und $\chi \equiv 0$ auf $X \setminus U$.*

Beweis. Sei $z \in K$. Dann existieren Umgebungen $W_z \subset\subset V_z \subset\subset U$ von z und eine reell-wertige Funktion $\chi_z \in C_X^\infty(X)$ mit Werten zwischen 0 und 1, die auf W_z identisch 1 ist und außerhalb V_z verschwindet.
Das ist für reguläre Punkte klar (man vergleiche etwa [GuRo], S.288). Falls z ein singulärer Punkt ist, so bette man eine Umgebung von z holomorph in einen $\mathbb{C}^n$ ein, wähle dort eine solche Funktion und ziehe diese auf X zurück.
Da K kompakt ist, überdecken bereits endlich viele der Mengen W_z ganz K, etwa zu den Punkten $I := \{z_1, ..., z_l\} \subset K$. Damit ist

$$\chi(\zeta) := 1 - \prod_{z \in I} (1 - \chi_z(\zeta))$$

die gesuchte Funktion.
Für $\zeta \in K$ ist nämlich $\zeta \in W_z$ für ein $z \in I$, so dass einer der Faktoren $(1 - \chi_z(\zeta))$ verschwindet. Für $\zeta \in X \setminus U$ ist $\zeta \notin V_z$, also $\chi_z(\zeta) = 0$, für alle $z \in I$. □

Das liefert nun unmittelbar:

Satz 1.1.9. *Sei X ein komplexer Raum. Dann existiert zu jeder lokal endlichen Überdeckung $\{U_i\}$ von X mit $U_i \subset\subset X$ eine Zerlegung der Eins.*

Beweis. Wir wählen kompakte Mengen $K_i \subset U_i$, so dass $X \subset \bigcup K_i$. Zu jedem Paar $K_i \subset U_i$ existiert nach Lemma 1.1.8 eine entsprechende Funktion $g_i \in C^\infty_X(X)$. Nun ist auch

$$g(z) := \sum_i g_i(z) > 0$$

wieder eine auf ganz X wohldefinierte C^∞ Funktion, da die offene Überdeckung $\{U_i\}$ lokal endlich ist. Damit bilden die Funktionen $\chi_i(z) = g_i(z)/g(z)$ die gesuchte Zerlegung der Eins. □

Wir benötigen Abschneidefunktionen für den Vergleich von extrinsischem und intrinsischem Setup in Abschnitt 1.4 noch in etwas allgemeinerer Situation. Daher zeigen wir:

Lemma 1.1.10. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset U$ relativ abgeschlossen in U, $S := \overline{A} \cap bU$, $R := \mathbb{R}^n \setminus S$. Dann existiert eine reell-wertige glatte Funktion $\chi \in C^\infty(R)$ mit $0 \le f(x) \le 1$ für alle $x \in R$, $f(x) = 1$ für $x \in A$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$.*

Beweis. Zunächst schöpfen wir U durch beschränkte offene Mengen aus und überdecken A mit Kompakta:

$$\begin{aligned} D_\mu &:= \{x \in U : dist(x, bU) > 2^{-\mu}\} \cap B_{2^\mu}(0) \text{ für } \mu \in \mathbb{N}_0 \\ K_0 &:= \overline{A \cap D_0} \\ K_\mu &:= \overline{A \cap D_\mu \setminus D_{\mu-1}} \text{ für } \mu \ge 1 \end{aligned}$$

Dazu wählen wir

$$\begin{aligned} V_\mu &:= \{x \in U : dist(x, K_\mu) < 2^{-\mu-1}\} \\ V &:= \bigcup_{\mu \ge 0} V_\mu \subset U \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} V_0 &\subset D_1 \\ V_1 &\subset D_2 \\ V_\mu &\subset D_{\mu+1} \setminus D_{\mu-2} \end{aligned}$$

für $\mu \ge 2$ und daher auch

$$V_\mu \cap V_\nu = \emptyset \text{ für } |\mu - \nu| > 2 \tag{1}$$

Außerdem ist $dist(K_\mu, bU) > 0$, also $K_\mu \subset\subset V_\mu$, so dass gilt: Zu jedem $\mu \geq 0$ existiert eine Funktion $\chi_\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, die auf K_μ identisch 1 ist und außerhalb V_μ verschwindet, vgl. dazu [GuRo], S.288, oder modifiziere Lemma 1.1.8 entsprechend.
Damit ist

$$\chi(x) := 1 - \prod_{\mu \geq 0} (1 - \chi_\mu(x))$$

die gesuchte Funktion.
Das Produkt konvergiert überall, da in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ wegen (1) nur endlich viele der χ_μ nicht verschwinden, so dass fast alle Faktoren gleich 1 sind.
Weiterhin ist $\chi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus V$, da außerhalb von V alle χ_μ verschwinden, und $\chi(x) = 1$ für $x \in A$, da $\chi_\nu(x) = 1$ für $x \in K_\nu$.
Wegen $D_\mu \setminus D_{\mu-1} \cap V_\nu = \emptyset$ für $|\mu - \nu| > 1$ ist χ auf $D_\mu \setminus D_{\mu-1}$ und somit auf ganz U eine glatte Funktion.
Für einen Punkt $x \in R \setminus U$ ist $dist(x, A) > 0$, also auch $dist(x, V) > 0$ so dass χ in einer Umgebung von x identisch verschwindet. Also ist χ auch dort unendlich oft differenzierbar, wohingegen χ in Punkten $x \in S$ nicht stetig sein kann. $\square$

Wir wollen nun einige Begriffe zur Verfügung stellen, um die Geometrie reduzierter komplexer Räume beschreiben zu können. Auch hier halten wir uns nicht an die üblichen Definitionen, sondern orientieren uns eher an der Anschauung und der leichten Zugänglichkeit der Begriffe im Rahmen der Anforderungen dieser Arbeit. Das ist möglich, da wir uns auf reduzierte komplexe Räume beschränken.

Definition 1.1.11. *Ein Punkt $p \in X$ eines komplexen Raumes X heißt **regulär**, wenn eine Umgebung U von p existiert, die biholomorph zu einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}^n$ ist. Die Menge der regulären Punkte bezeichnen wir mit* $\mathrm{Reg}(X)$. *Ein nicht regulärer Punkt wird als **singulär** bezeichnet, die Menge solcher Punkte mit* $\mathrm{Sing}(X)$.

Die Menge der regulären Punkte $\mathrm{Reg}(X)$ ist natürlich offen und bildet die maximale in X enthaltene komplexe Mannigfaltigkeit.

Definition 1.1.12. *Sei X ein reduzierter komplexer Raum. Die **Dimension** von X in einem beliebigen Punkt $p \in X$ sei dann gegeben durch*

$$\dim_p X := \limsup_{\substack{z \to p \\ z \in \mathrm{Reg}\, X}} \dim_z \mathrm{Reg}(X),$$

wobei mit $\dim_z \mathrm{Reg}(X)$ *die Dimension der komplexen Mannigfaltigkeit* $\mathrm{Reg}(X)$ *im Punkt z gemeint ist. Für die Dimension von X setzen wir*

$$\dim X := \sup_{p \in X} \dim_p X.$$

Dass diese Definition für reduzierte komplexe Räume sinnvoll ist, zeigt die folgende Charakterisierung der Menge der singulären Punkte $\operatorname{Sing}(X)$ eines reduzierten komplexen Raumes X [GrRe], S.117:

Theorem 1.1.13. *Die Menge der singulären Punkte* $\operatorname{Sing}(X)$ *eines komplexen Raumes* X *bildet eine analytische Menge in* X*. Ist der Raum* X *reduziert, so ist* $\operatorname{Sing}(X)$ *nirgends dicht in* X *und es gilt* $\dim_x \operatorname{Sing}(X) < dim_x X$ *für alle Punkte* $x \in X$.

Weiterhin benötigen wir

Definition 1.1.14. *Ein reduzierter komplexer Raum* X *heißt* ***global irreduzibel****, falls die Menge* $\operatorname{Reg}(X)$ *der regulären Punkte von* X *zusammenhängend ist. Ein reduzierter komplexer Raum* X *heißt* ***irreduzibel im Punkt*** $p \in X$*, falls der Punkt* p *eine Umgebungsbasis von offenen Mengen* $\{U_i\}$ *besitzt, so dass* $X \cap U_i$ *global irreduzibel ist für alle* i*. Ein komplexer Raum heißt* ***lokal irreduzibel****, wenn er in jedem Punkt irreduzibel ist.*

Lokale und globale Irreduzibilität bedingen sich nicht gegenseitig: Jede nicht zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit stellt einen lokal irreduziblen komplexen Raum dar, der natürlich nicht global irreduzibel ist. Andererseits sind zum Beispiel die analytischen Mengen $\{z \in \mathbb{C}^2 : z_2^2 = z_1^3 + z_1^2\}$ und $\{z \in \mathbb{C}^3 : z_1^2 = z_3 z_2^2\}$ zwar global, nicht aber lokal irreduzibel:

Beispiel 1.1.15. *Die analytische Menge* $A := \{z \in \mathbb{C}^3 : z_1^2 = z_3 z_2^2\}$ *ist irreduzibel im Punkt* $0 \in \mathbb{C}^3$ *und global irreduzibel, aber reduzibel in allen Punkten* $(0, 0, z_3)$ *mit* $z_3 \neq 0$.

Beweis. Zunächst ist $\operatorname{Sing}(A) = \{z \in \mathbb{C}^3 : z_1 = z_2 = 0\}$ die z_3-Achse und $\operatorname{Reg}(A)$ der Graph der Funktion

$$z_3 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$$

über $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_2 = 0\}$. Also ist $\operatorname{Reg}(A) \cap V$ zusammenhängend für jeden offenen Polyzylinder V um 0, das heißt A ist lokal irreduzibel bei 0 und global irreduzibel.
Betrachten wir nun einen Punkt $p \in \operatorname{Sing}(A)$ mit $p = (0, 0, p_3)$, $p_3 \neq 0$.
Sei dazu $r < |p_3|$ und

$$V := B_r(p) = \{z \in \mathbb{C}^3 : |z - p| < r\}$$

der offene Ball vom Radius r um p.
Dann ist wegen

$$|z_3 - p_3| < r < |p_3|$$

eine Funktion $\sqrt{z_3}$ auf $B_r(p)$ wohldefiniert und wir können die Funktionen

$$f(z) := z_1 + \sqrt{z_3} z_2$$

und

$$g(z) := z_1 - \sqrt{z_3}z_2$$

auf $B_r(p)$ betrachten. Nun ist

$$f(z)g(z) = z_1^2 - z_3 z_2^2,$$

so dass das Produkt fg auf $B_r(p) \cap A$ identisch verschwindet. Andererseits repräsentiert aber weder f noch g in $\mathcal{O}_{A,p}$ die 0, da die Punktfolgen

$$p_\epsilon = (\epsilon\sqrt{p_3}, \epsilon, p_3)$$

und

$$q_\epsilon = (-\epsilon\sqrt{p_3}, \epsilon, p_3)$$

für $\epsilon \to 0$ in A gegen den Punkt p laufen, aber

$$f(p_\epsilon) = 2\epsilon\sqrt{p_3} \neq 0$$

und

$$g(q_\epsilon) = -2\epsilon\sqrt{p_3} \neq 0.$$

Damit ist $\mathcal{O}_{A,p}$ kein Integritätsbereich, also A im Punkt p lokal reduzibel. $\square$

1.2 Der Dolbeault-Komplex

Es ist bekannt [Rei], dass das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf reduzierten komplexen Räumen in den Singularitäten nicht gelten muss, wenn man von einem Differentialformenbegriff ausgeht, wie er in der Algebra üblich ist [Gr1, Gr2]. Das heißt, die Sequenz

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \to ...,$$

ist nicht notwendig exakt, wobei Ω^p die Garbe der holomorphen Differentialformen vom Grad p und d der verallgemeinerte Ableitungsoperator ist.
Wir wollen zeigen, dass für reduzierte komplexe Räume auch das Lemma von Dolbeault nicht gelten muss. Hierzu führen wir zunächst den Dolbeault-Komplex

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\iota} C^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,2} \to ...$$

ein.
Bei der Charakterisierung von Differentialformen, die nicht holomorph sein müssen, treten allerdings zusätzliche Schwierigkeiten auf, da die reell-analytische Idealgarbe einer reell-analytischen Menge nicht unbedingt endlich erzeugt ist. Wir werden uns daher auf reell-kohärente analytische Mengen beschränken. Die folgende Darstellung ist durch [Ka] motiviert, die Begriffsbildung geht auf Cartan [Ca] und Grothendieck [Gro] zurück.
Wir werden nun also auch noch reell-analytische Funktionskeime und Mengen betrachten müssen. Die Definitionen sind völlig analog zum komplex-analytischen Fall. Sei dazu A eine reell-analytische Teilmenge einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, das heißt A in der Nähe jedes Punktes $p \in U$ die gemeinsame Nullstellenmenge von endlich vielen reell-analytischen Funktionen. Solche Funktionen seien in dieser Arbeit immer als komplex-wertig vorausgesetzt.
Somit ist eine komplex-analytische Menge sofort auch reell-analytisch.
Sei nun $p \in U$. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_p$ den Halm der reell-analytischen Funktionskeime im Punkt p, und weiterhin mit $\mathcal{J}(A)_p \subset \mathcal{R}_p$ das Ideal der reell-analytischen Funktionskeime im Punkt p, die auf A in der Nähe von p verschwinden. Im Gegensatz zum komplex-analytischen Fall ist dann die Garbe $\mathcal{J}(A)$ nicht unbedingt eine über $\mathcal{R}$ kohärente reell-analytische Garbe. Falls sie es ist, so nennen wir die reell-analytische Menge A reell-kohärent [Ca]. Äquivalent zu dieser Definition ist für komplex-analytische Mengen folgende Charakterisierung, auf die wir uns beziehen wollen [Ma1], S.125:

Definition 1.2.1. *Eine analytische Teilmenge A eines Gebietes D in $\mathbb{C}^n$ heißt **reell-kohärent** in einem Punkt $p \in A$, falls die irreduziblen Komponenten von A in p in der Nähe von p irreduzibel bleiben. A heißt reell-kohärent, falls A in allen Punkten reell-kohärent ist, das heißt die Menge der irreduziblen Punkte in den irreduziblen Komponenten offen ist.*

Wir haben in Beispiel 1.1.15 gesehen, dass die analytische Menge $\{z \in \mathbb{C}^3 : z_1^2 = z_3 z_2^2\}$ im Punkt 0 nicht reell-kohärent ist. Solche analytischen Mengen stellen also durchaus keine Pathologie dar. Das ist für diese Arbeit aber dennoch keine wesentliche Einschränkung, da zum Beispiel analytische Mengen mit ausschließlich isolierten Singularitäten sicherlich reell-kohärent sind.
Jetzt wollen wir die differenzierbaren Funktionen auf einem reduzierten komplexen Raum algebraisch charakterisieren. Sei dazu A eine analytische Teilmenge eines Gebietes D des $\mathbb{C}^n$. Für eine offene Teilmenge $V \subset D$ sei

$$\mathcal{I}_A(V) := \{f \in C^\infty(V) : f|_A \equiv 0\},$$

also $\mathcal{I}_A$ die Idealgarbe der Keime differenzierbarer Funktionen, die auf A verschwinden. Nun sieht man analog zum Fall holomorpher Funktionen (vgl. Lemma 1.1.4) leicht

$$C_A^\infty \cong \left(C_D^\infty / \mathcal{I}_A\right)|_A. \tag{2}$$

Wir wollen diese Darstellung nutzen, um C_A^∞ lokal zu beschreiben. Dazu werden wir uns ab sofort auf reell-kohärente analytische Mengen beschränken. Wir benötigen folgende interessante und nützliche Aussage [Ma1], S.123:

Theorem 1.2.2. *Sei A eine reell-kohärente analytische Teilmenge eines Gebietes D des $\mathbb{C}^n$, $f \in C^\infty(D)$ eine differenzierbare Funktion, die auf A verschwindet: $f|_A \equiv 0$. Dann existiert zu jedem Punkt $p \in D$ eine Umgebung $U \subset D$ von p, so dass f auf U eine Darstellung*

$$f = \sum_{i=1}^{k} g_i h_i$$

besitzt, wobei die Funktionen g_i reell-analytisch sind und auf $A \cap U$ verschwinden. Die Funktionen h_i sind differenzierbar.

Betrachten wir nun einen Punkt $p \in A$ und nehmen $p = 0 \in \mathbb{C}^n$ an. Wir erinnern daran, dass die Idealgarbe i_A von A nach dem Oka-Cartan Theorem eine kohärente analytische Garbe ist. Also können wir ein System $(f_1, ...f_m)$ endlich vieler holomorpher Funktionen wählen, die i_A in einer Umgebung U von 0 über $\mathcal{O}_U$ erzeugen. Dann lässt sich $C_{A,0}^\infty$ charakterisieren, indem man

$$\mathcal{I}_{A,0} \cong (f_i, \overline{f_i})C_0^\infty$$

zeigt und auf (2) zurückgreift:

Satz 1.2.3. *Falls die analytische Menge A in der Nähe des Punktes $0 \in A$ reell-kohärent ist, so gilt für die Garbe der Keime der differenzierbaren Funktionen auf A:*

$$C_{A,0}^\infty \cong C_0^\infty / (f_i, \overline{f_i})C_0^\infty.$$

Beweis. Es kann angenommen werden, dass A im Punkt 0 irreduzibel ist. Im allgemeinen Fall sind dann die einzelnen Komponenten nach Definition 1.2.1 wieder reell-kohärent und eine Funktion, die auf A verschwindet, kann induktiv auf den endlich vielen Komponenten faktorisiert werden.
Wir wollen für eine Teilmenge M eines $\mathbb{C}^n$ mit M_p den Keim der Menge M bei $p \in M$ bezeichnen und werden im Folgenden für $\mathcal{R}_{\mathbb{C}^n,0}$ kurz $\mathcal{R}_0$ und für $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2n},0}$ kurz $\mathcal{O}_0$ notieren. Die Koordinaten des $\mathbb{C}^n$ seien mit z, die Koordinaten des $\mathbb{C}^{2n}$ mit (w, ζ) bezeichnet.
1) Die Abbildung $\Phi : \mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_o$ gegeben durch

$$\sum a_{\nu\mu} z^\nu \overline{z}^\mu \mapsto \sum a_{\nu\mu} w^\nu \zeta^\mu$$

ist ein $\mathbb{C}$-Algebra-Isomorphismus zwischen den reell-analytischen Funktionskeimen in $\mathbb{C}^n$ und den holomorphen Funktionskeimen in $\mathbb{C}^{2n}$.
Insbesondere erhalten wir

$$f_i(z) = \sum_\nu a_\nu^i z^\nu \mapsto \sum_\nu a_\nu^i w^\nu = f_i(w)$$

und

$$\overline{f_i}(z) = \sum_\nu \overline{a_\nu^i} \overline{z}^\nu \mapsto \sum_\nu \overline{a_\nu^i} \zeta^\nu = \overline{f_i}(\overline{\zeta}).$$

2) Da A reell-kohärent ist, ist die reell-analytische Idealgarbe $\mathcal{J} := \mathcal{J}(A)$ von A endlich erzeugt. Dann ist mit $\mathcal{J}_0$ aber auch $\widetilde{\mathcal{J}_0} := \Phi(\mathcal{J}_0)$ endlich erzeugt und wir können die analytische Menge $\widetilde{A}_0 := N(\widetilde{\mathcal{J}_0})$ in $\mathbb{C}^{2n}$ betrachten, die als Komplexifizierung von A_0 bezeichnet wird. Nach Rückerts Nullstellensatz ist

$$i(\widetilde{A}_0)_0 = \mathrm{Rad}(\widetilde{\mathcal{J}_0}).$$

3) Für die Komplexifizierung gilt

$$\widetilde{A}_0 = A_0 \times \overline{A}_0 := \{(w, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : w, \overline{\zeta} \in A_0\}.$$

Hier sei erwähnt, dass $\overline{A_0}$ als analytische Menge durch die

$$\Phi(\overline{f_i}) = \sum_\nu \overline{a_\nu^i} \zeta^\nu$$

gegeben ist.
Wir zeigen zunächst $\widetilde{A}_0 \subset A_0 \times \overline{A}_0$. Sei also $(w, \zeta) \in \widetilde{A}_0$. Das heißt, $h(w, \zeta) = 0$ für alle $h \in i(\widetilde{A}_0)_0$. Insbesondere sind aber die Bilder $\Phi(f_i)$, $\Phi(\overline{f_j})$ in $\widetilde{\mathcal{J}_0} \subset \mathrm{Rad}(\widetilde{\mathcal{J}_0}) = i(\widetilde{A}_0)_0$, da die f_i und $\overline{f_i}$ auf A_0 verschwinden. Damit ist

$$0 = \Phi(f_i)(w, \zeta) = \sum_\nu a_\nu^i w^\nu = f_i(w)$$

für $i = 1, ..., m$, da $\Phi(f_i)$ nicht von ζ abhängt, also $w \in A_0$. Analog ist

$$0 = \Phi(\overline{f_i})(w,\zeta) = \sum_\nu \overline{a_\nu^i}\zeta^\nu = \overline{f_i}(\zeta),$$

und somit auch $f_i(\overline{\zeta}) = \overline{\overline{f_i}(\zeta)} = 0$, also $\overline{\zeta} \in A_0$.
Jetzt ist noch zu zeigen, dass $\widetilde{A_0}$ keine echte Teilmenge von $A_0 \times \overline{A_0}$ sein kann. Da es sich bei Φ um einen Isomorphismus handelt, stimmen die reelle Dimension von A_0 als reell-analytische Menge und die komplexe Dimension von $\widetilde{A_0}$ als analytische Menge im Punkt 0 überein. In beiden Fällen stimmt die Dimension nämlich mit der Krull-Dimension des noetherschen lokalen Ringes

$$(\mathcal{R}_0/\mathcal{J}_0) \cong \left(\mathcal{O}_0/\widetilde{\mathcal{J}_0}\right)$$

überein. Das lässt sich bei Narasimhan [Na] nachlesen, der auch reell-analytische Mengen untersucht.
Damit hat aber $\widetilde{A_0}$ im Punkt 0 die gleiche Dimension wie $A_0 \times \overline{A_0}$ als analytische Teilmenge des $\mathbb{C}^{2n}$.
Da mit $\mathrm{Reg}(A_0)$ auch $\mathrm{Reg}(\overline{A_0})$ und $\mathrm{Reg}(A_0 \times \overline{A_0})$ wegzusammenhängend und somit die analytischen Mengen irreduzibel sind (vgl. Definition 1.1.14), stimmen $\widetilde{A_0}$ und $A_0 \times \overline{A_0}$ überein.
4) Sei nun $g \in \mathcal{I}_{A,0}$, also $g \in C_0^\infty$ mit $g|_A \equiv 0$ in der Nähe von 0. Wir müssen nun

$$g = \sum f_i h_i + \sum \overline{f_j} k_j,$$

mit differenzierbaren Funktionen h_i, k_j zeigen. Mit Theorem 1.2.2 können wir annehmen, dass g reell-analytisch ist, also $g \in \mathcal{R}_0$ mit $g|_A \equiv 0$, das heißt $g \in \mathcal{J}_0$. Damit ist aber

$$\Phi(g) \in \widetilde{\mathcal{J}_0} \subset i(\widetilde{A}_0)_0 = i(A_0 \times \overline{A_0})_0 = (\Phi(f_i), \Phi(\overline{f_i})),$$

so dass für $\Phi(g)$ eine Darstellung

$$\Phi(g)(w,\zeta) = \sum f_i(w)\widetilde{h}_i(w,\zeta) + \sum \overline{f_j}(\overline{\zeta})\widetilde{k}_j(w,\zeta),$$

mit in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^{2n}$ holomorphen Funktionen $\widetilde{h}_i$, $\widetilde{k}_j$ existiert. Damit ist dann

$$g(z) = \Phi^{-1}(\Phi(g))(z) = \sum f_i(z)h_i(z) + \sum \overline{f_j}(z)k_j(z),$$

mit $h_i(z) = \widetilde{h}_i(z,\overline{z})$, $k_j(z) = \widetilde{k}_j(z,\overline{z})$ analytisch in $0 \in \mathbb{C}^n$, und die Behauptung ist gezeigt. □

Ein anderer Beweis dieser Aussage findet sich in [Ma2], S.95.
Ausgehend von dieser lokalen Darstellung der glatten komplexwertigen Funktionen auf A, wollen wir nun Differentialformen auf A definieren. Bezeichnen wir mit $\Lambda^{p,q}$ zunächst die Garbe der Keime der gewöhnlichen (p,q)-Formen auf D. Jetzt charakterisieren wir die Idealgarbe $\mathcal{L}_A^{p,q}$ der Keime der Differentialformen, die auf A verschwinden. Dazu definieren wir: $\omega_0 \in \Lambda_0^{p,q}$ gehört genau dann zu $\mathcal{L}_{A,0}^{p,q}$, wenn zu einem Repräsentanten ω von ω_0 in einer kleinen Umgebung U von 0 Formen $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_m \in \Lambda^{p,q}(U)$ und $\gamma_1, ..., \gamma_m \in \Lambda^{p-1,q}(U), \delta_1, ..., \delta_m \in \Lambda^{p,q-1}(U)$ existieren mit:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum f_i \alpha_i + \sum \overline{f_j} \beta_j + \sum df_k \wedge \gamma_k + \sum d\overline{f_l} \wedge \delta_l \\ &= \sum f_i \alpha_i + \sum \overline{f_j} \beta_j + \sum \partial f_k \wedge \gamma_k + \sum \overline{\partial f_l} \wedge \delta_l, \end{aligned}$$

wobei wir mit $\Lambda^{-1,q}$ bzw. $\Lambda^{p,-1}$ jeweils die Garbe 0 meinen. Damit ist $\mathcal{L}_A^{p,q}$ tatsächlich eine Untergarbe von Moduln von $\Lambda^{p,q}$ und wir setzen jetzt:

Definition 1.2.4. *Sei A eine analytische Teilmenge eines Gebietes D des $\mathbb{C}^n$. Dann heißt*

$$\Lambda_A^{p,q} := \left(\Lambda_D^{p,q} / \mathcal{L}_A^{p,q}\right)|_A$$

Garbe der Keime der ***Differentialformen*** *des Grades (p,q) auf dem reduzierten komplexen Raum A.*

Für eine reell-kohärente analytische Menge A gilt nun nach Satz 1.2.3 insbesondere

$$\Lambda_A^{0,0} \cong \left(C_D^\infty / \mathcal{I}_A\right)|_A \cong C_A^\infty,$$

was unsere Definition rechtfertigt.
Wir wollen nun die Ableitungsoperatoren festlegen. Sei dazu $V \subset D$ offen, $[\omega] \in \Lambda_A^{p,q}(V \cap A)$ eine (p,q)-Form auf A, $\omega \in \Lambda^{p,q}(V)$ ein Repräsentant. Ein solcher kann immer gefunden werden, da es sich hier um Formen mit glatten Koeffizienten handelt.
Dann setzen wir:

$$\overline{\partial}[\omega] := [\overline{\partial}\omega] \in \Lambda_A^{p,q+1}(V \cap A).$$

Nehmen wir an, wir hätten uns für einen anderen Repräsentanten $\eta \in \Lambda^{p,q}(V)$ mit $[\omega] = [\eta]$ entschieden, so gilt $[\omega - \eta] = 0$, also $\omega - \eta \in \mathcal{L}_A^{p,q}(V)$. Nun ist nach unserer Definition aber $\overline{\partial}(\omega - \eta) \in \mathcal{L}_A^{p,q+1}(V)$, so dass folgt:

$$\overline{\partial}[\omega] - \overline{\partial}[\eta] = [\overline{\partial}(\omega - \eta)] = 0.$$

Damit haben wir einen Operator $\overline{\partial} : \Lambda_A^{p,q} \to \Lambda_A^{p,q+1}$ definiert. Analog legen wir $\partial : \Lambda_A^{p,q} \to \Lambda_A^{p+1,q}$ fest und setzen letztendlich noch

$$d := \partial + \overline{\partial} : \Lambda_A^{p,q} \to \Lambda_A^{p+1,q} \oplus \Lambda_A^{p,q+1}.$$

Da wir ausschließlich reduzierte komplexe Räume betrachten, gilt nun noch $\mathcal{O}_A \subset C_A^\infty$ und wir können neben dem de Rham-Komplex

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_A \xrightarrow{d} \Omega_A^1 \xrightarrow{d} \Omega_A^2 \to ...,$$

wegen $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$ und $\overline{\partial} f = 0$ für f auf A holomorph, auch den **Dolbeault-Komplex**

$$0 \to \mathcal{O}_A \xrightarrow{\iota} C_A^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda_A^{0,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda_A^{0,2} \to ...$$

betrachten. Die so definierten Komplexe stimmen tatsächlich auch mit den abstrakten Komplexen von Grothendieck überein. Das findet sich in der Arbeit [Ka] von Kantor.
Auf die Übertragung der Definitionen auf allgemeine komplexe Räume verzichten wir hier, da wir lediglich die lokale Exaktheit des Komplexes untersuchen wollen.

1.3 Das Lemma von Dolbeault

Wie angekündigt wollen wir nun zeigen, dass der Dolbeault-Komplex in Singularitäten nicht exakt sein muss, also das Lemma von Dolbeault für komplexe Räume in den Singularitäten nicht unbedingt gilt.
Unser Gegenbeispiel ist motiviert durch die Arbeit [Rei], in der ein Gegenbeispiel zur Gültigkeit des Lemmas von Poincaré gegeben wird. Wir müssen allerdings etwas mehr Arbeit investieren, da in [Rei] der holomorphe de Rham-Komplex betrachtet wird, was den Vorteil mit sich bringt, dass erstens die Garben der Differentialformen leichter zu charakterisieren sind und zweitens alle betrachteten Funktionen in Potenzreihen entwickelbar sind. Wir müssen hingegen noch einen Koeffizientenvergleich für Taylor-Entwicklungen mit Restglied begründen.
Es sei darauf hingewiesen, dass in [Rei] auch noch eine positive Aussage über das Lemma von Poincaré getroffen wird: Für holomorph kontrahierbare Räume bleibt es in den Singularitäten gültig. Das hat folgenden Hintergrund:
Das Lemma von Poincaré wird in der Theorie der Mannigfaltigkeiten bewiesen, indem man die lokale Kontrahierbarkeit in den Punkten der Mannigfaltigkeit ausnutzt. Für komplexe Räume muss man diese Kontrahierbarkeit fordern.
Wir wollen zunächst den Begriff der Exaktheit in eine etwas andere Form bringen. Dazu werden wir in diesem Abschnitt eine analytische Teilmenge A eines Gebietes D im $\mathbb{C}^N$ betrachten. Die Idealgarbe $\mathcal{I}_A$ der differenzierbaren Funktionen von A wollen wir mit $\mathcal{I}(A)$ bezeichnen, für die Differentialformen auf D bzw. $\mathbb{C}^N$ notieren wir einfach $\Lambda^{p,q}$, die (p,q)-Formen auf A bezeichnen wir mit $\Lambda^{p,q}(A)$ und setzen $\mathcal{L}^{p,q} := \mathcal{L}^{p,q}_A$ für die (p,q)-Formen, die auf A verschwinden.
Wir führen einige Notationen ein. Sei $x \in \mathbb{C}^N$, $\mathcal{H} \subset C^\infty_x$ und $H \subset \Lambda^{p,q}_x$. Dann sei:

$$\mathcal{H} \cdot H := \{\sum f_i \alpha_i; f_i \in \mathcal{H}, \alpha_i \in H\},$$

$$H \wedge \Lambda^{0,r}_x := \{\sum \alpha_i \wedge \beta_i; \alpha_i \in H, \beta_i \in \Lambda^{0,r}_x\},$$

$$\overline{\partial} H := \{\overline{\partial}\alpha; \alpha \in H\}.$$

Wir weisen noch explizit darauf hin, dass nach Definition der Differentialformen

$$\overline{\partial}\mathcal{L}^{p,q} \subset \mathcal{L}^{p,q+1} \text{ bzw.}$$

$$\partial\mathcal{L}^{p,q} \subset \mathcal{L}^{p+1,q}$$

gilt und wir außerdem von

$$\mathcal{I}(A)_x \cong (f_i, \overline{f_j})C^\infty_x$$

ausgehen können, da A im Folgenden als kohärent vorausgesetzt wird.

Nun sehen wir:

Lemma 1.3.1. *Sei A eine analytische Teilmenge eines Gebietes D des $\mathbb{C}^N$, $x \in A$ ein Punkt. Dann gilt für alle $p, q \in \mathbb{N}$:*

$$\Lambda^{p,q-1}(A)_x \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,q}(A)_x \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,q+1}(A)_x \tag{3}$$

ist exakt genau dann, wenn

$$\mathcal{L}_x^{p,q} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{L}_x^{p,q+1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{L}_x^{p,q+2} \tag{4}$$

exakt ist.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch eine einfache Diagrammjagd. Wir beschränken uns daher hier auf die Rückrichtung, der andere Fall geht ähnlich.
Sei (4) exakt, also $[\omega_x] \in \Lambda^{p,q}(A)_x$ mit Repräsentanten $\omega_x \in \Lambda_x^{p,q}$, so dass $\overline{\partial}[\omega_x] = 0$ gilt. Dann ist $[\overline{\partial}\omega_x] = \overline{\partial}[\omega_x] = 0$, also $\overline{\partial}\omega_x \in \mathcal{L}_x^{p,q+1}$, und wegen $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$ existiert mit (4) nun $\eta_x \in \mathcal{L}_x^{p,q}$ mit $\overline{\partial}\eta_x = \overline{\partial}\omega_x$.
Damit ist aber $\overline{\partial}(\omega_x - \eta_x) = 0$ und nach dem gewöhnlichen Lemma von Dolbeault existiert $\alpha_x \in \Lambda_x^{p,q-1}$ mit $\overline{\partial}\alpha_x = \omega_x - \eta_x$. Dann folgt aber auch

$$\overline{\partial}[\alpha_x] = [\omega_x - \eta_x] = [\omega_x],$$

da $\eta_x \in \mathcal{L}_x^{p,q}$ ist, und (3) ist exakt. □

Lemma 1.3.2. *Sei A eine analytische Teilmenge eines Gebietes D des $\mathbb{C}^N$ mit der Idealgarbe $\mathcal{I}(A)$ der Keime der differenzierbaren auf A verschwindenden Funktionen. Sei $0 \in A$, $q \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(A)_0 \cdot \Lambda_0^{0,N} \quad &\subset \quad \overline{\partial}(\mathcal{I}(A)_0 \cdot \Lambda_0^{0,N-1}) && (5)\\ \overline{\partial}\mathcal{I}(A)_0 \wedge \Lambda_0^{0,N-1} \quad &\subset \quad \overline{\partial}(\mathcal{I}(A)_0 \cdot \Lambda_0^{0,N-1}) && (6)\\ \mathcal{L}_0^{0,N} \quad &= \quad \overline{\partial}\mathcal{L}_0^{0,N-1} && (7)\\ \Lambda^{0,N-2}(A)_0 \quad &\xrightarrow{\overline{\partial}} \quad \Lambda^{0,N-1}(A)_0 \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,N}(A)_0 \text{ \textit{ist exakt.}} && (8) \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst gilt:

$$\overline{\partial}(\mathcal{I}(A)_0 \cdot \Lambda_0^{0,q}) = \overline{\partial}(\mathcal{L}_0^{0,q}). \tag{9}$$

Die Relation $\subset$ ist wegen $\mathcal{I}(A)_0 \cdot \Lambda_0^{0,q} \subset \mathcal{L}_0^{0,q}$ klar. Sei aber $\omega \in \mathcal{L}_0^{0,q}$, also

$$\omega = \sum f_i \alpha_i + \sum \overline{f_j} \beta_j + \sum \overline{\partial f_l} \wedge \delta_l,$$

für $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_m \in \Lambda_0^{0,q}$ und $\delta_1, ..., \delta_m \in \Lambda_0^{0,q-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \overline{\partial}\omega \quad &= \quad \sum f_i \overline{\partial}\alpha_i + \sum \overline{\partial f_j} \beta_j + \sum \overline{f_j} \overline{\partial} \beta_j - \sum \overline{\partial f_l} \wedge \overline{\partial}\delta_l \\ &= \quad \overline{\partial}\left(\sum f_i \alpha_i + \sum \overline{f_j} \beta_j - \sum \overline{f_l} \wedge \overline{\partial}\delta_l\right), \end{aligned}$$

und (9) ist gezeigt.
(5)⇒(6): Sei

$$\omega = \sum \overline{\partial f_j} \wedge \beta_j$$

mit $\beta_1, ..., \beta_m \in \Lambda_0^{0,N-1}$. Dann ist

$$\omega = \overline{\partial}\left(\sum \overline{f_j} \wedge \beta_j\right) - \sum \overline{f_j} \overline{\partial} \beta_j$$

und die Behauptung folgt mit (5).
(6)⇒(5): Sei dazu

$$\omega = \sum f_i \alpha_i + \sum \overline{f_j} \beta_j$$

für $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_m \in \Lambda_0^{0,N}$. Diese sind als $(0, N)$-Formen natürlich $\overline{\partial}$-geschlossen, so dass wir mit dem gewöhnlichen Lemma von Dolbeault $(0, N-1)$-Formen $A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_m \in \Lambda_0^{0,N-1}$ finden mit $\overline{\partial} A_i = \alpha_i$ und $\overline{\partial} B_j = \beta_j$:

$$\omega = \overline{\partial}\left(\sum f_i A_i + \sum \overline{f_j} B_j\right) - \sum \overline{\partial f_j} \wedge B_j,$$

und die Behauptung folgt mit (6).
(5)∧(6)⇒(7):

$$\mathcal{L}_0^{0,N} = \mathcal{I}(A)_0 \cdot \Lambda_0^{0,N} + \overline{\partial}\mathcal{I}(A)_0 \wedge \Lambda_0^{0,N-1} \subset \overline{\partial}(\mathcal{I}(A)_0 \cdot \Lambda_0^{0,N-1}) = \overline{\partial}(\mathcal{L}_0^{0,N-1}),$$

wobei die letzte Gleichheit aus (9) folgt. Außerdem gilt natürlich

$$\overline{\partial}\mathcal{L}_0^{0,N-1} \subset \mathcal{L}_0^{0,N}.$$

(7)⇒(5): Diese Implikation ist klar mit $\mathcal{I}(A)_0 \cdot \Lambda_0^{0,N} \subset \mathcal{L}_0^{0,N}$ und Gleichung (9).
Zuletzt liefert uns Lemma 1.3.1 noch die Äquivalenz von (7) und (8). □

Korollar 1.3.3. *Sei $N \geq 2$ und $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0}$ enthalte keine Primelementquadrate. f sei in einer Umgebung U von 0 holomorph, und es sei $A := \{z \in U : f(z) = 0\}$. Dann gilt:*

$$\Lambda^{0,N-2}(A)_0 \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,N-1}(A)_0 \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,N}(A)_0$$

ist exakt genau dann wenn zu jedem Element $g \in C_0^\infty$ Funktionskeime $v_1, ..., v_N$, $w_1, ..., w_N$, $k_1, ..., k_N$, $l_1, ..., l_N \in C_0^\infty$ existieren, welche die partiellen Differentialgleichungen

$$f \cdot g = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial(f v_i)}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial(\overline{f} w_j)}{\partial z_j}$$

und

$$\overline{f} \cdot g = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial(f k_i)}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial(\overline{f} l_j)}{\partial z_j}$$

in einer Umgebung von 0 lösen.

Beweis. Zunächst ist $\mathcal{I}(A)_0 = (f, \overline{f})C_0^\infty$, da nach der Voraussetzung an f für die Idealgarbe
$$i_{A,0} = Rad(f) = \{h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0} : h^k = f\} = (f)$$
gilt.
Damit folgt die Behauptung aus der Äquivalenz von (5) und (8) nach komplexer Konjugation der Relation (5). □

Kommen wir nun zum Gegenbeispiel, die verwendeten Lemmata finden sich im Anschluss.

Beispiel 1.3.4. *Es sei* $f(z_1, z_2) := z_1^4 + z_2^5 + z_2^4 z_1$ *und* $A := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : f(z_1, z_2) = 0\}$*. Dann ist*

$$C_{A,0}^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(A)_0 \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,2}(A)_0 \cong 0$$

nicht exakt.

Beweis. Wir nehmen an, es existieren Funktionskeime $A, B, C, D \in C_0^\infty$, so dass gilt:
$$f = \frac{\partial(fA)}{\partial z_1} + \frac{\partial(fB)}{\partial z_2} + \frac{\partial(\overline{f}C)}{\partial z_1} + \frac{\partial(\overline{f}D)}{\partial z_2}.$$
Wir setzen für die Funktionen A, B, C, D die Taylor-Entwicklung bei 0 an:

$$A(z) = \sum_{|\nu| \leq 6} a_\nu z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \overline{z_1}^{\nu_3} \overline{z_2}^{\nu_4} + R_A(z) \text{ mit } R_A(z) = o(|z|^6),$$
$$B(z) = \sum_{|\nu| \leq 6} b_\nu z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \overline{z_1}^{\nu_3} \overline{z_2}^{\nu_4} + R_B(z) \text{ mit } R_B(z) = o(|z|^6),$$

analog für C und D mit $\nu \in \mathbb{N}_0^4$, $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$. Sei

$$\widetilde{A}(z) := A(z) - R_A(z),$$

usw. Nach Lemma 1.3.5 ist nun

$$\frac{\partial R_A}{\partial z_1}(z) = o(|z|^5), \frac{\partial R_B}{\partial z_2}(z) = o(|z|^5), ...$$

und wir erhalten

$$f(z) = \frac{\partial(f\widetilde{A})}{\partial z_1}(z) + \frac{\partial(f\widetilde{B})}{\partial z_2}(z) + \frac{\partial(\overline{f}\widetilde{C})}{\partial z_1}(z) + \frac{\partial(\overline{f}\widetilde{D})}{\partial z_2}(z) + R_f(z)$$

mit $R_f(z) = o(|z|^5)$.

Nun ist nach Lemma 1.3.6 aber $R_f \equiv 0$ und wir können die Koeffizienten der Polynome vergleichen. Wegen

$$\frac{\partial(\overline{f}\widetilde{C})}{\partial z_1}(z) + \frac{\partial(\overline{f}\widetilde{D})}{\partial z_2}(z) = \overline{f}\frac{\partial(\widetilde{C})}{\partial z_1}(z) + \overline{f}\frac{\partial(\widetilde{D})}{\partial z_2}(z)$$

leisten die Summanden, die $\widetilde{C}$ und $\widetilde{D}$ enthalten, keinen Beitrag zu den Koeffizienten von z_1^4, z_2^5 und $z_1 z_2^4$. Mit

$$\begin{aligned} z_1^4 &= \frac{\partial}{\partial z_1}\left(z_1^4 \frac{z_1}{5}\right) = \frac{\partial}{\partial z_2}\left(z_1^4 z_2\right) \\ z_2^5 &= \frac{\partial}{\partial z_1}\left(z_2^5 z_1\right) = \frac{\partial}{\partial z_2}\left(z_2^5 \frac{z_2}{6}\right) \\ z_1 z_2^4 &= \frac{\partial}{\partial z_1}\left(z_1 z_2^4 \frac{z_1}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial z_2}\left(z_1 z_2^4 \frac{z_2}{5}\right) \end{aligned}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} 1 &= a_{(1,0,0,0)}/5 + b_{(0,1,0,0)} \\ 1 &= a_{(1,0,0,0)} + b_{(0,1,0,0)}/6 \\ 1 &= a_{(1,0,0,0)}/2 + b_{(0,1,0,0)}/5, \end{aligned}$$

was nicht sein kann. Es existieren also keine passenden Funktionen A, B und mit Korollar 1.3.3 folgt die Behauptung, nachdem wir gezeigt haben, dass f irreduzibel ist. Das werden wir in Lemma 1.3.8 tun. $\square$

Lemma 1.3.5. *Falls $R(x_1, ..., x_n) \in C_0^\infty$ für $x \to 0$ schneller gegen 0 konvergiert als $|x|^m$, also $R(x) = o(|x|^m)$ gilt, so folgt*

$$\frac{\partial R}{\partial x_i}(x) = o(|x|^{m-1}).$$

Beweis. Wir betrachten die Taylorentwicklung von R bei 0. Nun bedeutet

$$R(x) = o(|x|^m),$$

dass die partiellen Ableitungen von R bei 0 bis zum Grad m verschwinden:

$$\frac{\partial^{|l|} R}{\partial^{l_1} x_1 \cdots \partial^{l_n} x_n}(0) = 0 \text{ für } |l| \leq m.$$

Damit aber verschwinden die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial R}{\partial x_i}$ bei 0 bis zum Grad $m-1$ und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Lemma 1.3.6. *Seien $p_m(x_1, ..., x_n)$ und $q_m(x_1, ..., x_n)$ zwei Polynome vom Grad $\leq m \in \mathbb{N}_0$ und $R(x) \in C_0^0$ ein stetiges Restglied, das für $|x| \to 0$ stärker als $|x|^m$ gegen 0 konvergiert, also $R(x) = o(|x|^m)$. Unter der Voraussetzung $p_m = q_m + R$ gilt dann $R \equiv 0$.*

Beweis. Es ist $R = p_m - q_m$, also R ein Polynom vom Grad m mit $R(x) = o(|x|^m)$. Dann ist natürlich $R \equiv 0$. Wir wollen das dennoch kurz formal ausführen: Nehmen wir nun an, es existiere $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $R(x_0) \neq 0$. Dann betrachten wir

$$r(t) := R(tx_0).$$

Damit ist $r \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom in t vom Grad $l := \deg r \leq m$ und es folgt:

$$\frac{r(t)}{t^l} = \frac{o(|t|^m)}{t^l} \to 0 \text{ für } t \to 0,$$

was aber nicht sein kann, da r ein Polynom vom exakten Grad l ist. $\square$

Es bleibt noch zu zeigen, dass f in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ irreduzibel ist. Folgende Aussage aus [GrRe], S.42, reduziert das Problem:

Lemma 1.3.7. *Ein Weierstrass-Polynom $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}[x]$ ist prim in $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}[x]$ genau dann, wenn es in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ prim ist.*

Man beachte, dass die betrachteten Ringe faktoriell sind, so dass die Begriffe irreduzibel und prim zusammenfallen. Es reicht also, zu zeigen:

Lemma 1.3.8. *Das Weierstrass-Polynom $f(x) = x^4 + y^4x + y^5$ ist in $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}[x]$ irreduzibel, wobei mit y die komplexe Koordinate in $\mathbb{C}$ bezeichnet ist.*

Beweis. I.) Nehmen wir zunächst

$$x^4 + y^4x + y^5 = (x^2 + a_1x + a_0)(x^2 + b_1x + b_0)$$

an. Dies ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0b_0 &= y^5 \\ a_1b_0 + a_0b_1 &= y^4 \\ a_0 + a_1b_1 + b_0 &= 0 \\ b_1 + a_1 &= 0 \end{aligned}$$

Insbesondere ist $b_0 \neq 0$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$. Wir rechnen im Quotientenkörper. Mit $a_1 = -b_1$ und $a_0 = y^5/b_0$ folgt:

$$\begin{aligned} b_1\left(\frac{y^5}{b_0} - b_0\right) &= y^4 \\ \frac{y^5}{b_0} - b_1^2 + b_0 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplikation der beiden Gleichungen mit b_0 liefert

$$b_1\left(y^5 - b_0^2\right) = b_0y^4 \tag{10}$$
$$b_0^2 = b_0b_1^2 - y^5 \tag{11}$$

Mit (11) in (10) ist weiter:

$$\begin{aligned}
b_1\left(y^5-(b_0b_1^2-y^5)\right) &= b_0y^4\\
\Leftrightarrow b_1(2y^5-b_0b_1^2) &= b_0y^4\\
\Leftrightarrow 2b_1y^5-b_0b_1^3-b_0y^4 &= 0\\
\Leftrightarrow b_0(b_1^3+y^4) &= 2b_1y^5\\
\Leftrightarrow b_0 &= \frac{2b_1y^5}{b_1^3+y^4}
\end{aligned}$$

Diese Darstellung von b_0 setzen wir in (11) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2b_1y^5}{b_1^3+y^4}\right)^2 &= \left(\frac{2b_1y^5}{b_1^3+y^4}\right)b_1^2-y^5\\
\Leftrightarrow 4b_1^2y^{10} &= 2b_1^3y^5(b_1^3+y^4)-y^5(b_1^6+2b_1^3y^4+y^8)\\
\Leftrightarrow -4b_1^2y^{10} &= b_1^6y^5(1-2)+b_1^3(2y^9-2y^9)+y^{13}\\
\Leftrightarrow y^5b_1^6-4y^{10}b_1^2 &= y^{13}
\end{aligned}$$

Eine Funktion $b_1\in\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$, die

$$y^5b_1^6-4y^{10}b_1^2=y^{13} \tag{12}$$

erfüllt, kann aber nicht existieren: Sei dazu $k\geq 0$ die Nullstellenordnung von b_1 in 0. Damit ist die Nullstellenordnung in 0 der linken Seite von (12) entweder 5 für $k=0$ oder 11 für $k=1$ oder streng größer 13 für $k>1$. Das gilt aber nicht für die Funktion y^{13}.

II.) Es bleibt die Möglichkeit

$$x^4+y^4x+y^5=(x+a_0)(x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)$$

zu betrachten. Dies ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
a_0b_0 &= y^5\\
b_0+a_0b_1 &= y^4\\
b_1+a_0b_2 &= 0\\
b_2+a_0 &= 0
\end{aligned}$$

Mit $a_0=-b_2$ folgt:

$$\begin{aligned}
-b_2b_0 &= y^5\\
b_0-b_2b_1 &= y^4\\
b_1-b_2^2 &= 0
\end{aligned}$$

Weiter liefert $b_1 = b_2^2$ also:

$$\begin{aligned} -b_2 b_0 &= y^5 \quad (13) \\ b_0 - b_2^3 &= y^4 \quad (14) \end{aligned}$$

Und (14) in (13) gibt:

$$\begin{aligned} -b_2(b_2^3 + y^4) &= y^5 \\ \Leftrightarrow -b_2^4 - b_2 y^4 &= y^5, \end{aligned}$$

was keine Funktion $b_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$ erfüllen kann. Ist nämlich wieder k die Nullstellenordnung von b_2, so besitzt $b_2^4 + b_2 y^4$ für $k = 0$ die Ordnung 0, für $k = 1$ die Ordnung 4 und für $k > 1$ eine Verschwindungsordnung im Punkt 0, die streng größer als 5 ist. $\square$

1.4 Das extrinsische Setup von Henkin und Polyakov

Wir wollen eine weitere Möglichkeit kennenlernen, den Cauchy-Riemann Operator auf singulären reduzierten komplexen Räumen zu studieren. Es handelt sich um eine extrinsische Untersuchungsmethode. Man betrachtet eine glatte Form α in einer Umgebung eines eingebetteten komplexen Raumes M, die auf M $\overline{\partial}$-geschlossen ist, und sucht Lösungen der Gleichung $\overline{\partial}u = \alpha$ auf $\operatorname{Reg} M$. Henkin und Polyakov [HePo] haben dieses Problem betrachtet:
Sei $B := \overline{B_1(0)}$ der abgeschlossene Einheitsball im $\mathbb{C}^n$ und weiterhin $g_1, ..., g_p$ holomorphe Funktionen in einer Umgebung von B. Dann ist $M = \{z \in B : g_1(z) = ... = g_p(z) = 0\}$ eine analytische Menge. Sei noch $\iota : \operatorname{Reg} M \hookrightarrow B$ die Einbettungsabbildung für die Mannigfaltigkeit der regulären Punkte $\operatorname{Reg} M$. Dann gilt:

Theorem 1.4.1. *Angenommen, M ist ein vollständiger Durchschnitt und α eine Differentialform auf B mit Koeffizienten in C^∞, so dass $\iota^*\overline{\partial}\alpha = \overline{\partial}\iota^*\alpha = 0$ auf $\operatorname{Reg} M$. Dann existiert eine Differentialform β auf $B \setminus \operatorname{Sing}(M)$ mit Koeffizienten in C^∞, so dass $\overline{\partial}\iota^*\beta = \iota^*\overline{\partial}\beta = \iota^*\alpha$ auf $\operatorname{Reg} M$ gilt.*

Es stellt sich nun die Frage, ob wir in dieser Situation hölderstetige Lösungen erwarten dürfen. Für einen eingebetteten komplexen Raum $X \subset \mathbb{C}^n$ mit einer isolierten Singularität bei $0 \in X$ formulieren Fornæss und Gavosto [FoGa] für dieses extrinsische Setup folgende natürliche Fragestellung:

Problem 1.4.2. *Wähle eine in X offene Menge $V \subset X$ um die Singularität. Existieren dann Konstanten $C > 0$, $\delta > 0$ und eine offene Menge U mit $0 \in U \subset\subset V$, so dass für jede beschränkte $(0,1)$-Form f auf einer offenen Menge $V' \subset \mathbb{C}^n$, $V' \cap X = V$, mit Koeffizienten in C^∞, die auf U $\overline{\partial}$-geschlossen ist, eine δ-hölderstetige Funktion u auf einer offenen Menge U', $U' \subset V'$, $U' \cap X = U \setminus \{0\}$, $u \in C^\infty(U')$, existiert mit*

$$\overline{\partial}u = f \text{ auf } U \setminus \{0\}$$

und

$$\|u\|_{\delta,U'} \leq C\|f\|_{\infty,V'}?$$

Eine solche Lösung u ist gleichmäßig stetig und setzt sich daher zu einer δ-hölderstetigen Funktion nach $U' \cup \{0\}$, also in die isolierte Singularität bei 0, fort.
Das Gegenbeispiel, das Fornæss und Gavosto im Anschluss geben, ist leider nicht korrekt.
Auch folgendes Beispiel liefert zwar keine negative Antwort, zeigt aber, dass δ in Abhängigkeit von der Art der Singularität nach oben beschränkt ist und gegebenenfalls sehr klein bleiben muss. Das stellt eine wesentliche Einschränkung gegenüber der intrinsischen Situation dar, die wir in Kapitel 2 betrachten werden.

Beispiel 1.4.3. *Seien $n > m$ zwei teilerfremde natürliche Zahlen, m gerade, $X = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : z^m = w^n\}$, $\widetilde{V} := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|, |w| < 1\}$ und $V := \widetilde{V} \cap X$. Sei weiterhin $U_\tau := \{(z,w) \in X : |w| < \tau\} \setminus \{0\}$ für $\tau > 0$.*
Für festes $\tau \ll 1$ existiert zu jeder Konstante $C > 0$ eine $(0,1)$-Form f auf einer offenen Menge V', $V \subset V'$, mit $\|f\|_{\infty,V'} < 1$, die auf V $\overline{\partial}$-geschlossen ist, so dass für jede Funktion g auf einer offenen Menge $U' \subset V'$, $U_\tau \subset U'$, mit $\overline{\partial} g = f$ auf U_τ dann $\|g\|_{\delta,U'} > C$ für $\delta > m/n$ gilt.

Beweis. Zunächst parametrisieren wir die Kurve X durch die holomorphe Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C} \to X, t \mapsto (t^n, t^m).$$

Diese Parametrisierung ist biholomorph außerhalb der 0. Das ist zu zeigen.
Zunächst ist klar, dass $\Phi(\mathbb{C}) \subset X$ gilt. Angenommen, $\Phi(s) = \Phi(t)$ für zwei Punkte $s, t \in \mathbb{C}$. Dann ist $t^n = s^n$ und $t^m = s^m$, also

$$t = \xi_n s = \xi_m s,$$

wo ξ_n eine n-te und ξ_m eine m-te Einheitswurzel ist. Aber m und n sind teilerfremd, so dass dies nur für $\xi_n = \xi_m = 1$, also $s = t$, möglich ist. Damit ist Φ injektiv.
Für die Surjektivität sei $w_0 = re^{it} \neq 0$ beliebig. Dann existieren genau m verschiedene Werte von z mit $z^m = w_0^n$:

$$z_k = \xi^k r^{n/m} e^{int/m} = \xi^k z_0 \text{ für } k = 0, ..., m-1$$

mit $\xi = e^{2\pi i/m}$. Also $X \cap \{w = w_0\} = \{(z_0, w_0); ...; (z_{m-1}, w_0)\}$.
Sei nun

$$t_l := \xi^l r^{1/m} e^{it/m} \text{ für } l = 0, ..., m-1.$$

Dann ist $t_l^m = w_0$ und

$$t_l^n = \xi^{ln} r^{n/m} e^{int/m} = \xi^{ln} z_0.$$

Da n, m teilerfremd sind, nimmt

$$ln \mod m$$

für $l = 0, ..., m-1$ alle Werte $k = 0, ..., m-1$ an und

$$\Phi(\{t_0; ..., t_{m-1}\}) = \{(z_0, w_0); ...; (z_{m-1}, w_0)\}.$$

Somit sind $\mathbb{C}$ und X homöomorph und wir erhalten als Nebenresultat, dass X global und lokal irreduzibel ist, und können auf die Irreduzibilität von $f(z,w) = z^m - w^n$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ schließen. Umgekehrt hätten wir für die Surjektivität von Φ auch zunächst zeigen können, dass X irreduzibel ist, und dann gesehen, dass $\Phi(\mathbb{C})$ als analytische Teilmenge gleicher Dimension schon gleich X sein muss.

Damit ist eine Funktion $z^{1/n}$, die sich mittels der Parametrisierung durch t darstellen lässt, auf X stetig und holomorph außerhalb von 0.
Diese Funktion lässt sich als $z^{1/n}$ holomorph auf eine Umgebung U von $X \setminus B_\epsilon(0)$ fortsetzen, da sich in $X \setminus B_\epsilon(0)$ die Blätter von X über $\mathbb{C}_z$ nicht mehr beliebig nahe kommen können und auch nicht mehr die Nähe der Achse $\mathbb{C}_z$ erreichen:
Für festes w_0 ist $U \cap \{w = w_0\}$ entweder leer oder besteht aus disjunkten Umgebungen verschiedener Punkte z_k mit $z_k^m = w_0^n$ (die Blätter kommen sich nicht nahe), die nicht den Punkt 0 enthalten (... erreichen nicht die Nähe der Achse $\mathbb{C}_z$). In diesen Umgebungen kann ein Zweig der n-ten Wurzel gewählt werden, der im Punkt z_k (also auf X) mit der durch t gegebenen Funktion übereinstimmt. Diese Fortsetzung ist natürlich holomorph in z.
Für festes z_0 ist andererseits $U \cap \{z = z_0\}$ wieder entweder leer oder zerfällt in disjunkte Umgebungen von Punkten w_k mit $w_k^n = z_0^m$, auf denen $z^{1/n}$ jeweils konstant gleich dem Wert in w_k ist.
Wählen wir nun eine C^∞-Abschneidefunktion $\chi(x)$ auf $\mathbb{R}$ mit $\chi \equiv 0$ für $x \leq 1/2$ und $\chi \equiv 1$ für $x \geq 1$ und setzen $a := \max_p \frac{\partial \chi}{\partial x}(p)$. Für $\epsilon > 0$ genügend klein definieren wir nun

$$g_\epsilon(z, w) := \epsilon^{1-1/m} \frac{1}{a} \chi(\frac{|w|}{\epsilon}) z^{1/n}.$$

Damit ist $g_\epsilon \equiv 0$ in einer Umgebung der Singularität und wohldefiniert in einer Umgebung W von X.
Wir wählen nun $V' := W \cap \widetilde{V}$ und erhalten

$$\begin{aligned} |\overline{\partial} g_\epsilon(z, w)| &= \epsilon^{1-1/m} \frac{1}{a} \left| \frac{\partial \chi}{\partial x}(\frac{|w|}{\epsilon}) z^{1/n} \frac{w}{2\epsilon|w|} d\overline{w} \right| \\ &\leq \frac{1}{a} \left| \frac{\partial \chi}{\partial x}(\frac{|w|}{\epsilon}) \right| \left| \frac{z^{1/n}}{\epsilon^{1/m}} \right| \\ &= \frac{1}{a} \left| \frac{\partial \chi}{\partial x}(\frac{|w|}{\epsilon}) \right| \frac{|w|^{1/m}}{\epsilon^{1/m}} \leq 1, \end{aligned}$$

da $|z|^{1/n} = |w|^{1/m}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial x} \equiv 0$ für $|w| > \epsilon$.
Sei also $f_\epsilon := \overline{\partial} g_\epsilon$, so ist wie gewünscht $\|f_\epsilon\|_{\infty, V'} \leq 1$.
Sei nun G_ϵ definiert in einer Umgebung U' von U_τ, $U' \subset V'$, mit

$$\|G_\epsilon\|_{\delta, U'} = \|G_\epsilon\|_{\infty, U'} + \sup_{P, Q \in U'} \frac{|G_\epsilon(P) - G_\epsilon(Q)|}{dist_{\mathbb{C}^2}(P, Q)^\delta} \leq C$$

für ein $\delta > m/n$ und $\overline{\partial} G_\epsilon = f_\epsilon$ auf U_τ. Da G_ϵ gleichmäßig stetig ist, setzt es sich stetig nach 0 fort.
Jetzt ist die Differenz zweier Lösungen

$$h_\epsilon := G_\epsilon - g_\epsilon$$

eine Funktion auf $U' \cup \{0\}$, holomorph auf U_τ. Wir verwenden die Parametrisierung Φ, um die Funktionen auf U_τ in Abhängigkeit von t darzustellen:

$$h'_\epsilon(t) := h_\epsilon(t^n, t^m)$$

Nun ist h'_ϵ eine holomorphe Funktion auf $\{0 < |t| < \sqrt[m]{\tau}\} \subset \mathbb{C}$, stetig in 0, nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz also holomorph auf der ganzen Kreisscheibe, so dass wir für G_ϵ auf U_τ erhalten:

$$\begin{aligned} G'_\epsilon(t) &= g_\epsilon(t^n, t^m) + h_\epsilon(t^n, t^m) \\ &= \epsilon^{1-1/m}\frac{1}{a}\chi(\frac{|t|^m}{\epsilon})t + \sum_{k\geq 0} a_k t^k \end{aligned}$$

für eine auf $\{|t| < \sqrt[m]{\tau}\}$ konvergente Potenzreihe.
Wegen der δ-Hölderstetigkeit von G_ϵ ist für $|t|^m, |s|^m < \epsilon/2$ (damit verschwindet g_ϵ) aber

$$\begin{aligned} C &\geq \frac{|G_\epsilon(t^n, t^m) - G_\epsilon(s^n, s^m)|}{\|(t^n, t^m) - (s^n, s^m)\|^\delta} = \frac{|h'_\epsilon(t) - h'_\epsilon(s)|}{\|(t^n - s^n, t^m - s^m)\|^\delta} \\ &= \frac{|\sum_{k\geq 0} a_k(t^k - s^k)|}{\|(t^n - s^n, t^m - s^m)\|^\delta}. \end{aligned}$$

Insbesondere kann etwa $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ und $s = \xi t = e^{2\pi i/m}t$ gewählt werden. Dann ist $t^m = s^m$ und es folgt:

$$C \geq \frac{|\sum_{k\geq 0} a_k t^k(1 - \xi^k)|}{|t^n(1 - \xi^n)|^\delta},$$

wo der Nenner für $t \to 0$ wegen $n\delta > m$ schneller als t^m gegen 0 geht, da $1-\xi^n \neq 0$ ist (n, m sind teilerfremd).
Damit müssen die Koeffizienten $a_1, ..., a_{m-1}$ aber verschwinden, da für $0 \leq k < m$ auch $1-\xi^k \neq 0$ ist und der Quotient sonst nicht durch C beschränkt sein könnte.
Wir wollen nun die Hölder-Norm von G_ϵ nach unten abschätzen. Dazu wählen wir zwei Punkte $P, Q \in U_\tau \subset U'$:

$$P := (\sqrt[m]{\epsilon}^n, \epsilon) \text{ , also } P = \Phi(\sqrt[m]{\epsilon})$$

$$Q := (-\sqrt[m]{\epsilon}^n, \epsilon) \text{ , also } Q = \Phi(-\sqrt[m]{\epsilon})$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |G_\epsilon(P) - G_\epsilon(Q)| &= |G'_\epsilon(\sqrt[m]{\epsilon}) - G'_\epsilon(-\sqrt[m]{\epsilon})| \\ &= \frac{2}{a}\epsilon^{1-1/m+1/m} + 2\sum_{l\geq 0} a_{2l+m+1} \sqrt[m]{\epsilon}^{2l+m+1} \\ &= \frac{2}{a}\epsilon + 2\epsilon\sqrt[m]{\epsilon}\sum_{l\geq 0} a_{2l+m+1} \sqrt[m]{\epsilon}^{2l}, \end{aligned}$$

da sich die geraden Terme gegenseitig aufheben.
Hier ist zu beachten, dass die Koeffizienten a_k zwar von ϵ abhängen, nach den Cauchyschen Ungleichungen aber wegen $|h'_\epsilon| = |G'_\epsilon - g'_\epsilon| \leq |G'_\epsilon| + |g'_\epsilon|$ durch

$$\frac{1}{\sqrt[m]{\tau}^k}\left(C + \epsilon^{1-1/m}\frac{\sqrt[m]{\tau}}{a}\right) \leq \frac{1}{\sqrt[m]{\tau}^k} M =: C_k$$

mit $M := (C + \sqrt[m]{\tau}/a)$ unabhängig von ϵ nach oben beschränkt sind.
Damit besitzt $\sum_{l\geq 0} a_{2l+m+1}x^{2l}$ die Majorante $\sum_{k\geq 0} C_k x^k$, die als geometrische Reihe

$$M\sum_{k\geq 0}\left(\frac{x}{\sqrt[m]{\tau}}\right)^k$$

den Konvergenzradius $\sqrt[m]{\tau}$ hat.
Also geht

$$2\epsilon\sqrt[m]{\epsilon}\sum_{l\geq 0} a_{2l+m+1}\sqrt[m]{\epsilon}^{2l}$$

für $\epsilon \to 0$ schneller gegen 0 als ϵ und in

$$\|G_\epsilon\|_{\delta,U'} \geq \frac{|G_\epsilon(P) - G_\epsilon(Q)|}{dist_{\mathbb{C}^2}(P,Q)^\delta} = \frac{2\epsilon}{a2^\delta\sqrt[m]{\epsilon}^{n\delta}} + Rest \qquad (15)$$

ist das Verhalten der rechten Seite für $\epsilon \to 0$ vom Rest unabhängig und somit $\|G_\epsilon\|_{\delta,U'} \to \infty$ für $\epsilon \to 0$, da $\delta > m/n$ ist. Das steht für genügend kleines ϵ aber im Widerspruch zur Voraussetzung an G_ϵ. □

Für unsere Zwecke hätte es natürlich völlig genügt, den Fall $m = 2$ zu betrachten. Das Beispiel beruht auf folgender Überlegung: Es existiert eine Schar g_ϵ schlechter Lösungen, deren δ-Höldernorm nicht beschränkt bleibt. Jede andere Lösung G_ϵ unterscheidet sich von g_ϵ um eine bis auf die Singularität holomorphe Funktion h_ϵ, die im Pullback holomorph ist und daher in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. In dieser Potenzreihe verschwinden wegen der angenommenen δ-Hölderstetigkeit von G_ϵ aber niedrige Koeffizienten. Zum Beispiel der Summand $a_1 t$ würde auf X eine Funktion $a_1\sqrt[n]{z}$ liefern, die δ-hölderstetig nur für $\delta \leq 1/n$ ist. Damit überträgt sich das schlechte Verhalten der g_ϵ auf die Lösungen G_ϵ.
Vergleichen nun wir das extrinsische Setup mit einer anderen Untersuchungsmethode, die wir als intrinsisch bezeichnen wollen:
Sei ω eine Differentialform auf der Mannigfaltigkeit $\operatorname{Reg} X$ der regulären Punkte eines komplexen Raumes X, die $\overline{\partial}$-geschlossen ist. Existiert dann eine Form u auf $\operatorname{Reg} X$ mit $\overline{\partial}u = \omega$? Die Antwort fällt im eindimensionalen Fall positiv aus, wie wir in Kapitel 2 sehen werden.
Das liefert aber eine stärkere Aussage als Theorem 1.4.1:

Satz 1.4.4. *Die Lösbarkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in der intrinsischen Situation impliziert die Lösbarkeit im extrinsischen Fall.*

Beweis. Wir beziehen uns auf die Bezeichnungen aus Theorem 1.4.1 und können annehmen an, dass es sich bei α um eine $(0,1)$-Form handelt.
Sei $R := \operatorname{Reg} M$ und $\iota : M \hookrightarrow B$ die holomorphe Einbettung. Dann können wir α zurückziehen zu einer Form

$$\omega := \alpha|_R = \iota^* \alpha$$

mit

$$\overline{\partial}_R \omega = \overline{\partial}_R \circ \iota^* \alpha = \iota^* \circ \overline{\partial}_B \alpha = 0,$$

da Pullback und $\overline{\partial}$ nach [Ra], S.128, kommutieren.

Nach Voraussetzung existiert auf der komplexen Mannigfaltigkeit R nun eine glatte Funktion f mit $\overline{\partial}_R f = \omega$ auf R. Wir müssen diese Funktion auf den ganzen Ball fortsetzen. Die Konstruktion wird lokal ausgeführt.

Für jeden Punkt $q \in R$ existiert eine Umgebung $U(q)$ in B und ein Diffeomorphismus $\Phi(q) : U(q) \to V(q) \subset \mathbb{C}^n$ mit

$$\Phi(R \cap U(q)) = \{z \in V(q) : z_{d+1} = ... = z_n = 0\}. \tag{16}$$

Dabei sei mit d die komplexe Dimension von R bezeichnet, die sich als $n - p$ ergibt, da es sich bei R um einen vollständigen Durchschnitt der Nullstellenmengen von p holomorphen Funktionen handelt.

Wähle nun eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ von R durch solche Umgebungen. Das kann etwa durch eine Prozedur wie im Beweis von Lemma 1.1.10 erreicht werden. Sei weiterhin $\{\chi_j\}_{j=1}^{\infty}$ eine Zerlegung der Eins zu dieser Überdeckung $\mathcal{U}$ und

$$V := \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \subset B \setminus \operatorname{Sing} M.$$

Wegen (16) existieren Funktionen $f_j \in C^\infty(U_j)$ mit

$$f_j|_{R \cap U_j} = f|_{R \cap U_j}.$$

Setze

$$F := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j f_j.$$

Da die Summe lokal endlich ist, folgt $F \in C^\infty(V)$ und es gilt

$$F|_{R \cap V} = \iota^* F = f.$$

Damit folgt auch

$$\iota^* \overline{\partial}_B F = \overline{\partial}_R \iota^* F = \overline{\partial}_R f = \omega = \iota^* \alpha.$$

Damit ist F auf einer Umgebung V von R in B konstruiert. Abschließend soll F noch auf $B \setminus \operatorname{Sing} M$ fortgesetzt werden. Nach Lemma 1.1.10 existiert eine Abschneidefunktion $\chi \in C^\infty(B \setminus \operatorname{Sing} M)$, die auf R identisch 1 ist und auf dem Rand von V verschwindet. χF lässt sich dann durch 0 auf den Einheitsball fortsetzen und hat die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Umgekehrt ließe sich eine Form auf $\operatorname{Reg} X$ zwar wohl in eine Umgebung von $\operatorname{Reg} X$ fortsetzen, nachdem X lokal in einen $\mathbb{C}^n$ eingebettet worden ist, nicht aber in die Singularität $\operatorname{Sing} X$, so dass Theorem 1.4.1 nicht anwendbar ist.

Wenn wir von Lösungen einer $\overline{\partial}$-Gleichung nach der intrinsischen Prozedur nun δ-Hölderstetigkeit verlangen, so wäre das Verfahren aus Beispiel 1.4.3 auch auf eine solche Lösung anwendbar. Das gilt übrigens auch für das Gegenbeispiel aus [FoGa], so dass jenes Beispiel dem ersten Teil des Artikels widersprechen würde.

Da wir in der intrinsischen Situation aber komplexe Räume unabhängig von einer Einbettung betrachten, liegt es nahe, den Abstand zweier Punkte über das Infimum der verbindenden Wege ebenfalls intrinsisch zu definieren, was zu einer anderen, X-spezifischen Definition der Hölderstetigkeit führt.
Dann stellt Beispiel 1.4.3 tatsächlich keine Obstruktion für die Existenz eines stetigen Lösungsoperators in die Hölder-Räume mehr dar, da sich in der neuen Geometrie der Abstand der Punkte P und Q aus dem vorangehenden Beweis wesentlich verlängert:

$$dist_X(P,Q) \approx 2\epsilon$$

für kleine ϵ, wie wir in Kapitel 2 sehen werden. Damit erhalten wir in der Abschätzung (15) im Nenner den Faktor ϵ^δ, während im Zähler der Exponent von ϵ nicht kleiner 1 werden kann: Ansonsten wäre $\|\overline{\partial} g_\epsilon\|_{\infty,V'}$ nicht mehr unabhängig von ϵ beschränkt, sondern wir erhielten

$$\|\overline{\partial} g_\epsilon\|_{\infty,V'} \to \infty \text{ für } \epsilon \to 0.$$

2 Komplexe Kurven

Sei X eine komplexe Kurve, das heißt ein eindimensionaler komplexer Raum, mit isolierten Singularitäten. Wir bezeichnen mit $S := \mathrm{Sing}(X)$ die Menge der singulären Punkte, mit $R := \mathrm{Reg}(X)$ die komplexe Mannigfaltigkeit der regulären Punkte.

Sei weiterhin $D \subset\subset X$ eine relativ kompakte, zusammenhängende, offene Teilmenge. Wir wollen die Supremumsnorm für $(0,1)$-Formen auf der komplexen Mannigfaltigkeit $D \cap R$ definieren. Leider ist aber $\overline{D} \cap R$ nicht mehr kompakt, falls $\overline{D}$ Singularitäten enthält. Das heißt, wenn wir die Supremumsnorm über einen Atlas definieren, so benötigen wir, um $\overline{D} \cap R$ zu überdecken, in der Regel unendlich viele Karten und eine andere Überdeckung könnte eine nicht-äquivalente Norm liefern.

Es ist also nötig, ganz $\overline{D}$ mit nur endlich vielen offenen Mengen, die auch Singularitäten enthalten dürfen und eine holomorphe Einbettung in einen $\mathbb{C}^n$ besitzen, zu überdecken und über diese die Supremumsnorm zu definieren. Dabei ist zu zeigen, dass andere Einbettungen eine äquivalente Norm liefern.

Mit Hilfe der Puiseux-Normalisierung ist es möglich, die irreduziblen Komponenten der komlexen Kurve X in der Nähe jeder isolierten Singularität durch die Einheitskreisscheibe $\Delta \subset \mathbb{C}$ zu parametrisieren. Höherdimensionale komplexe Räume sind in der Regel nicht parametrisierbar, wie wieder die analytische Menge $\{z : z_1^2 = z_3 z_2^2\} \subset \mathbb{C}^3$ zeigt, die in der Singularität bei 0 keine topologische Mannigfaltigkeit darstellt.

Der Abstand zweier Punkte P und Q in $\overline{D}$ lässt sich dann definieren als das Infimum der Längen stetiger Wege, die P und Q verbinden und in allen regulären Punkten glatt sind. Die Puiseux-Normalisierung zeigt einerseits, dass solche Wege immer existieren, liefert andererseits auch eine Abschätzung für den Abstand zweier Punkte in der Nähe einer Singularität.

Betrachtet man eine $(0,1)$-Form ω auf einer Umgebung U eines singulären Punktes einer eingebetteten komplexen Kurve, die mittels

$$\begin{aligned} \varphi : \Delta &\to U \\ t &\to (t^k, z_2(t), ..., z_n(t)), \end{aligned}$$

für ein $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, parametrisiert ist, so lässt sich ω zurückziehen zu einer Form

$$\eta := \varphi^*\omega = \lambda d\bar{t} \in L^\infty_{(0,1)}(\Delta^*)$$

mit $|\lambda|(t) \lesssim |t|^{k-1}$.

Dann bleibt die Standard-Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung

$$f_0(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\lambda(t)}{t-w} dt \wedge d\bar{t}$$

nach Zurückziehen durch φ^{-1} nicht unbedingt hölderstetig. Wir müssen daher eine Lösung höherer Regularität finden. Dazu subtrahieren wir von f_0 noch die holomorphe Taylor-Entwicklung bis zum $(k-1)$-ten Glied und erhalten:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\lambda(t)w^k}{(t-w)t^k} dt \wedge d\bar{t},$$

wobei dieses Integral wegen $|\lambda|(t) \lesssim |t|^{k-1}$ existiert.
Nun ist $(\varphi^{-1})^* f$ auf $\varphi(B_{1/3}(0))$ α-hölderstetig für alle $\alpha < 1$.

Für D ohne Singularitäten auf dem Rand bD liefert eine Zerlegung der Eins einen stetigen linearen Operator

$$T : L^\infty_{(0,1)}(D \cap R) \to \Lambda_\alpha(D)$$

vom Raum der beschränkten $(0,1)$-Formen in den Raum der α-hölderstetigen Funktionen mit

$$\overline{\partial} \circ T = id + K,$$

wobei K ein kompakter Operator ist. Funktionalanalytische Betrachtungen zeigen dann, dass T so modifiziert werden kann, dass $\overline{\partial} \circ T = id$ gilt.

2.1 Whitney-Kegel und Tangentialvektoren

In einem regulären Punkt $p \in A$ einer analytischen Teilmenge A eines $\mathbb{C}^n$ ist der gewöhnliche holomorphe Tangentialraum T_pA wohldefiniert und wir können T_pA als Unterraum des $\mathbb{C}^n$ auffassen, indem wir die Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial z_i}$ mit den Koordinaten z_i identifizieren. Wir benötigen eine ähnliche Konstruktion auch für singuläre Punkte, um analytische Mengen dort gut beschreiben zu können.
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, solche Tangentialkegel an analytische Mengen zu definieren, die in regulären Punkten mit dem Tangentialraum übereinstimmen. Diese wurden von Whitney [Wh] studiert und werden als Whitney-Kegel mit $C_i(A,p)$, $i = 1, ..., 6$ bezeichnet.
Von besonderer Bedeutung ist folgende Konstruktion für beliebige Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$:

Definition 2.1.1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt tangential an M in einem Punkt $p \in M$, genau dann, wenn eine Folge von Punkten $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$ und eine Folge von Werten $t_i > 0$ existieren mit $p_i \to p$ und $t_i(p_i - p) \to v$ für $i \to \infty$. Die Menge aller dieser Punkte heißt* ***Tangentialkegel an M im Punkt p*** *und wird mit $C(M,p)$ bezeichnet.*

Wir interessieren uns natürlich für Tangentialkegel an analytische Teilmengen eines $\mathbb{C}^n$. Dabei stimmt der Tangentialkegel in einem regulären Punkt natürlich mit dem gewöhnlichen Tangentialraum überein. In Singularitäten erhalten wir in der Regel andere Strukturen. Einen Sonderfall stellen allerdings die eindimensionalen lokal irreduziblen analytischen Mengen dar, wie wir später mit Hilfe der Puiseux-Normalisierung sehen werden.
Charakterisieren wir nun die Whitney-Kegel:

Definition 2.1.2. *Sei $A \subset \mathbb{C}^n$ eine analytische Menge, $p \in A$.*
(1) Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ gehört zu $C_1(A,p)$, falls eine Umgebung U von p in $\mathbb{C}^n$ und ein holomorphes Vektorfeld $v(z)$ in U existieren, so dass $v(p) = v$ und $v(z) \in T_z(A)$ für alle $z \in \mathrm{Reg}(A) \cap U$ ist.
(2) $v \in C_2(A,p)$, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $z \in \mathrm{Reg}(A)$ mit $|z-p| < \delta$ ein $k \in T_z(A)$ mit $|v-k| < \epsilon$ existiert.
(3) $C_3(A,p) := C(A,p)$ der Tangentialkegel.
(4) $v \in C_4(A,p)$, falls Folgen von Punkten $z^j \in \mathrm{Reg}(A)$ und Vektoren $v^j \in T_{z^j}A$ existieren mit $z^j \to p$ und $v^j \to v$.
(5) $v \in C_5(A,p)$, falls Folgen von Punkten $z^j, w^j \in A$ und Werte $\lambda^j \in \mathbb{C}$ existieren mit $z^j, w^j \to p$ und $\lambda^j(z^j - w^j) \to v$.
(6) $v \in C_6(A,p)$, falls $(df)_p(v) = 0$ für jede holomorphe Funktion $f \in i(A)_p$, also jede holomorphe Funktion, die auf A in der Nähe von p verschwindet.

In einem regulären Punkt $p \in A$ stimmen alle diese Kegel mit dem Tangentialraum T_pA überein. Sie sind invariant unter biholomorphen Transformationen:

$$C_i(f(A), f(p)) = f'_p(C_i(A, p)),$$

wobei mit f'_p die Ableitung der biholomorphen Abbildung f im Punkt p bezeichnet ist. Das ist für eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung klar und folgt im allgemeinen Fall aus:

$$f(p) - f(z) = f'_p(p - z) + o(|p - z|).$$

Daher lassen sich die Whitney-Kegel für allgemeine (reduzierte) komplexe Räume erklären.
In einem singulären Punkt $p \in A$ wollen wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum $C_6(A, p)$ als Tangentialraum bezeichnen, setzen daher allgemein

$$T_pA := C_6(A, p),$$

und bezeichnen Vektoren $v \in C_6(A, p)$ als Tangentialvektoren an A im Punkt p. Eigenschaften der Whitney-Kegel werden in [Ch, St1, St2, Wh] beschrieben. Zum Beispiel gilt die Inklusion

$$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4 \subset C_5 \subset C_6.$$

Wir werden unser Augenmerk im Folgenden auf den Tangentialraum T_pA richten und uns auf den Beweis von $C_i(A, a) \subset T_pA$ für alle i beschränken.

Lemma 2.1.3. *Die Tangentialvektoren $v \in T_pA = C_6(A, p)$ lassen sich identifizieren mit den $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen $\delta : \mathcal{O}_{A,p} \to \mathbb{C}$, die eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllen:*
(i) $\delta(fg) = f(p)\delta(g) + \delta(f)g(p)$ für alle $f, g \in \mathcal{O}_{A,p}$
(ii) $\delta(\mathbb{C} \cdot 1) = 0$ und $\delta(m^2) = 0$,
wobei mit m das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{A,p}$ bezeichnet sei.

Beweis. Sei $v \in \mathbb{C}^n \cong T_p\mathbb{C}^n$. Dann erfüllt v als Element des gewöhnlichen holomorphen Tangentialraumes $T_p\mathbb{C}^n$ natürlich Bedingung (i) für $f, g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Nun stellt v genau dann eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$v : \mathcal{O}_{A,p} \cong (\mathcal{O}_p/i(A)_p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

dar, wenn v auf allen Funktionskeimen $f \in i(A)_p$ verschwindet. Das ist aber genau dann der Fall, wenn v als Element des $\mathbb{C}^n$ in $C_6(A, p)$ ist.
Es bleibt die Äquivalenz von (i) und (ii) zu zeigen:
(i) $\Rightarrow$ (ii): Für $f, g \in m$ ist $f(p) = g(p) = 0$, also $\delta(fg) = f(p)\delta(g) + \delta(f)g(p) = 0$.
Außerdem ist $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1)$, also $\delta(1) = 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Wegen

$$\mathcal{O}_{A,p} = \mathbb{C} \oplus m$$

ist $f = f(p) + f^+$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned}\delta(fg) &= \delta((f(p)+f^+)(g(p)+g^+)) = \delta(f(p)g(p)) + \delta(f^+g^+)\\ &+ f(p)\delta(g^+) + \delta(f^+)g(p) = f(p)\delta(g) + \delta(f)g(p).\end{aligned}$$

□

Definieren wir den Tangentialraum also über Derivationen, so sehen wir sofort, dass es sich hier eigentlich um eine intrinsische Konstruktion handelt, die in den Singularitäten eine natürliche Verallgemeinerung des gewöhnlichen Tangentialraumes darstellt.
Aus Lemma 2.1.3 lässt sich sofort eine interessante Aussage über die Dimension des Tangentialraumes ableiten, wenn man die **Einbettungsdimension** eines komplexen Raumes kennt:
Lokal ist jeder komplexe Raum X ein abgeschlossener komplexer Unterraum einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{C}^m$. Daher existiert zu jedem Punkt $p \in X$ eine kleinste ganze Zahl $e \in \mathbb{N}$, so dass eine Umgebung U von p biholomorph zu einem abgeschlossenen komplexen Unterraum eines Gebietes in $\mathbb{C}^e$ ist. Diese ganze Zahl nennt man Einbettungsdimension $\operatorname{emb}_p X$ von X im Punkt p.
Es ist bekannt [GrRe], S.115, dass

$$\operatorname{emb}_p X = \dim_{\mathbb{C}} \left(m/m^2\right) < \infty$$

gilt, wobei mit m das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{X,p}$ bezeichnet ist. Daher gilt auch:

Korollar 2.1.4. *Die Dimension des Tangentialraumes an einen (reduzierten) komplexen Raum X in einem Punkt $p \in X$ stimmt mit der Einbettungsdimension im Punkt p überein:*

$$\dim_{\mathbb{C}} T_pX = \dim_{\mathbb{C}} \left(m/m^2\right) = \operatorname{emb}_p X < \infty$$

Beweis. Wegen

$$\mathcal{O}_{X,p} \cong \mathbb{C} \oplus \left(m/m^2\right) \oplus m^2 \tag{17}$$

ist T_pX mit Bedingung (ii) aus Lemma 2.1.3 dual zum endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum (m/m^2).
Wir zeigen noch (17): Klar ist

$$\mathcal{O}_{X,p} = \mathbb{C} \oplus m.$$

Dabei ist m ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Aber auch (m/m^2) ist ein $\mathcal{O}_{X,p}/m \cong \mathbb{C}$-Vektorraum.
Damit ist die Projektion

$$\pi : m \to (m/m^2)$$

eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung und auch $\ker \pi = m^2$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und es gilt:

$$m = (m/m^2) \oplus m^2.$$

□

Damit folgt wiederum:

Korollar 2.1.5. *Für $i = 1, ..., 5$ ist der Whitney-Kegel $C_i(A, p)$ im Tangentialraum $T_pA = C_6(A, p)$ enthalten.*

Beweis. Man bette eine Umgebung von p in A in den $\mathbb{C}^e$ für $e = \mathrm{emb}_p A$ ein. Dann ist $T_pA \cong \mathbb{C}^e$ und die Behauptung folgt, da die Whitney-Kegel invariant unter biholomorphen Transformationen sind. $\square$

Für eine analytische Teilmenge A eines $\mathbb{C}^n$ ist die Vereinigung der Tangentialräume als Unterraum von $A \times \mathbb{C}^n$ mit der Einschränkung der euklidischen Metrik versehen. Man beachte, dass die Metrik von der reellen Struktur abhängt und etwa $\|\frac{\partial}{\partial z_j}\|^2 = 1/2$ gilt.
Fassen wir den Tangentialraum T_pA als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf, so können wir den komplexifizierten Tangentialraum

$$\mathbb{C}T_pA = \mathrm{Re}\ (\mathbb{C}T_pA) \oplus \mathrm{Im}\ (\mathbb{C}T_pA) = T_pA \oplus \mathrm{Im}\ (\mathbb{C}T_pA) =: T_p^{1,0}A \oplus T_p^{0,1}A$$

betrachten. Hier wollen wir die rein reellen Vektoren $v \in T_pA$ als $(1,0)$-Vektoren und die rein imaginären Vektoren als $(0,1)$-Vektoren bezeichnen.
Die Metrik setzt sich in natürlicher Weise zu einer hermiteschen Struktur auf dem komplexifizierten Tangentialraum fort.
Wir wollen nun noch das Differential einer holomorphen Funktion zwischen (reduzierten) komplexen Räumen definieren. Seien also X, Y zwei reduzierte komplexe Räume, $\varphi : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung. Dann sei das **Differential**

$$\varphi_* : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$$

von φ in einem Punkt $p \in X$ gegeben durch

$$\varphi_*(v)(f) := v(f \circ \varphi).$$

Aufgefasst als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung setzt sich das Differential zu einer Abbildung zwischen den komplexifizierten Tangentialräumen fort. Biholomorphe Abbildungen induzieren einen Isomorphismus zwischen den Tangentialräumen.
Für eine holomorphe Abbildung zwischen analytischen Mengen sei die Norm von φ_* in einem Punkt p gegeben durch

$$\|\varphi_*(p)\| := \max_{v \in T_pA, \|v\|=1} \|\varphi_*(v)\| < \infty.$$

2.2 Kurven in $\mathbb{C}^n$

Betrachten wir hierzu zunächst den Keim einer komplexen Kurve M in $\mathbb{C}^n$.
Dann können wir die Norm für $(0,1)$-Formen auf M nicht unmittelbar global definieren. Betrachten wir dazu ein Beispiel:
Sei $K := \{(x,y) : y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$, ω eine 1-Form auf K. Dann lässt sich ω darstellen in der Form

$$\omega = \iota^*(\lambda_x dx + \lambda_y dy),$$

wobei ι die Injektion $\iota : K \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ bezeichnet, und es wäre naheliegend, zu definieren:

$$|\omega|(p) := |\lambda_x|(p) + |\lambda_y|(p).$$

Leider ist aber die verwendete Darstellung von ω nicht eindeutig und damit auch die so konstruierte Norm nicht wohldefiniert. Ist zum Beispiel $\omega := \iota^*(dx)$, so erhalten wir zunächst $|\omega| \equiv 1$. Andererseits gilt auf K aber:

$$\omega(p) = \iota^*(dx)(p_1,p_2) = \frac{\iota^*(dy)}{2p_1}(p_1,p_2),$$

und wir erhalten aus dieser Darstellung

$$|\omega|(p) \to \infty \text{ für } p \to 0.$$

Fornæss und Gavosto umgehen dieses Problem, indem sie die Norm einer Differentialform punktweise definieren. Sie gehen folgendermaßen vor:
Sei $p \in M$ ein regulärer Punkt. Dann zerlegen wir den Tangentialraum $T_p\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ in zwei orthogonale Unterräume $T_p\mathbb{C}^n = T_pM \oplus N_pN$. Sei nun $p = 0$, z_1 eine Koordinate für T_pM mit $\|\frac{\partial}{\partial z_1}\| = 1$, $z_2, ..., z_n$ ein orthonormales Koordinatensystem für N_pM. In einer kleinen Umgebung von p lässt sich eine $(0,1)$-Form ω auf der Menge der regulären Punkte dann eindeutig als

$$\omega = \iota^* \circ \Pi^*(\lambda_1 d\overline{z_1}) = \Pi|_M^*(\lambda_1 d\overline{z_1})$$

darstellen, wobei $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ die Einbettung und Π die orthogonale Projektion $\Pi : \mathbb{C}^n \to T_pM$ bezeichnet. Fornæss und Gavosto setzen dann:

$$|\omega(p)| := |\lambda_1|(p).$$

Sei nun $v \in T_p^{0,1}M$ ein $(0,1)$-Tangentialvektor an M im Punkt p mit $\|v\| = 1$, also $v = \alpha\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\omega_p(v)| &= \iota^* \circ \Pi^*(\lambda_1 d\overline{z_1})_p(v) \\ &= |\lambda_1(p) d\overline{z_1}(\Pi_* \circ \iota_*(v))| \\ &= |\lambda_1(p)\alpha| = |\lambda_1|(p) \end{aligned}$$

Dies legt es nahe, etwas anders vorzugehen und die Norm als Operatorennorm zu definieren.

Definition 2.2.1. *Es sei* ω *eine* $(0,1)$*-Form auf* $\operatorname{Reg}(M)$*. Wähle in einem Punkt* $p \in \operatorname{Reg}(M)$ *einen beliebigen* $(0,1)$*-Tangentialvektor* $v \in T_p^{0,1}M$ *der Länge* 1*. Dann sei*

$$|\omega|(p) := |\omega_p(v)|.$$

Definieren wir aber auf diesem Weg die Norm für Formen auf einer allgemeinen komplexen Kurve, so müssen wir diese lokal in einen $\mathbb{C}^n$ einbetten, so dass die Norm dann von der Einbettung abhängt. Das verursacht aber tatsächlich keine Probleme, da gilt:

Lemma 2.2.2. $|\omega|(p)$ *ist von der Wahl des* $(0,1)$*-Tangentialvektors unabhängig. Betten wir* M *auf eine andere Art in einen* $\mathbb{C}^m$ *ein, so ändert sich die Norm* $|\omega|(p)$ *um einen gleichmäßig nach oben und unten beschränkten Faktor.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist klar: Für einen anderen Tangentialvektor u haben wir $u = \alpha v$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, und es folgt

$$|\omega_p(u)| = |\omega_p(\alpha v)| = |\alpha \omega_p(v)| = |\omega_p(v)|,$$

so dass $|\omega|$ wohldefiniert ist.
Für den zweiten Teil der Behauptung ist etwas mehr Arbeit nötig. Wir betten M auf eine andere Art in einen $\mathbb{C}^m$ ein, das heißt wir erhalten einen Keim einer komplexen Kurve $\widetilde{M}$ in einem $\mathbb{C}^m$ und eine biholomorphe Abbildung

$$\varphi : \widetilde{M} \to M.$$

Nun sei

$$\lambda(p) := \limsup_{\substack{z \to p \\ z \in \operatorname{Reg} \widetilde{M}}} \|\varphi_*(z)\|.$$

In regulären Punkten ist $\lambda(p) = \|\varphi_*(p)\|$, in singulären Punkten ist $\lambda(p)$ durch $\|\varphi_*(p)\|$ nach oben beschränkt, da der Whitney-Kegel $C_4(\widetilde{M}, p)$ nach Korollar 2.1.5 im Tangentialraum $T_p\widetilde{M}$ enthalten ist.
Damit ist λ eine auf $\widetilde{M}$ wohldefinierte oberhalbstetige Funktion und nimmt auf jedem Kompaktum ein Maximum an. Wir können also $\widetilde{M}$ am Rand einschränken und $\lambda(p) \le C$ annehmen.
Sei nun ω auf $\widetilde{M}$ repräsentiert durch $\widetilde{\omega} := \varphi^*\omega$. Dann ist für einen Punkt $p \in \widetilde{M}$:

$$\begin{aligned} |\widetilde{\omega}|(p) &= |\widetilde{\omega}_p(v)| = |\varphi^*\omega_p(v)| = |\omega_{\varphi(p)}(\varphi_*(v))| \\ &= \lambda(p) \left| \omega_{\varphi(p)} \left(\frac{\varphi_*(v)}{\lambda(p)} \right) \right| \le C|\omega|(p). \end{aligned}$$

Wenden wir noch das gleiche Argument auf die Inverse Abbildung φ^{-1} an, so ist die Behauptung gezeigt. $\square$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass sich unsere Definition der Norm problemlos auf (p, q)-Formen ausdehnen lässt, der Beweis von Lemma 2.2.2 bleibt auch für höherdimensionale Räume richtig.

2.3 Supremumsnorm auf komplexen Kurven

Wir kehren in die Ausgangssituation zurück und überdecken $\overline{D}$ mit endlich vielen offenen Mengen $\{U_\alpha\}$, so dass in $\overline{U_\alpha}$ entweder genau eine oder keine Singularität liegt. Weiterhin nehmen wir an, es existieren holomorphe Einbettungen

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha \subset \mathbb{C}^{n_\alpha},$$

wobei W_α eine relativ abgeschlossene Kurve in einer offenen Menge O_α ist. Außerdem können wir annehmen, dass $\varphi_\alpha(p) = 0$ genau für singuläre Punkte p gilt. Ein solcher Atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ heißt **regulärer Atlas** von D.
Jeder reguläre Atlas besitzt einen regulären Unteratlas $\{U'_\alpha, \psi_\alpha\}$ mit $U'_\alpha \subset\subset U_\alpha$, $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{U'_\alpha}$ und

$$\overline{D} \subset U := \bigcup U'_\alpha \subset\subset X. \tag{18}$$

Indem wir mit dem Unteratlas weiterarbeiten, sind sämtliche Probleme, die am Rand der Einbettungen entstehen, wie zum Beispiel die Einschränkungen im Beweis zu Lemma 2.2.2, behoben.
Ist nun ω eine $(0,1)$-Form auf $D \cap R$, so könnten wir ω zu einer Schar von Formen $\omega_\alpha := (\psi_\alpha^{-1})^*\omega$ auf den W_α zurückziehen und die Supremumsnorm definieren durch

$$\|\omega\|_\infty := \max_\alpha \sup_{p \in U'_\alpha \cap R} |\omega_\alpha|(\psi_\alpha(p)).$$

Diese Norm hängt natürlich von der gewählten Überdeckung ab, aber nur bis auf einen konstanten Faktor, der von ω unabhängig ist. Für einen anderen Atlas erhalten wir mit Lemma 2.2.2 eine äquivalente Norm.
Schöner ist es allerdings, eine Zerlegung der Eins zu verwenden, da wir so die Norm von ω in einem Punkt der Mannigfaltigkeit $U \cap R$ auch global definieren können:

Definition 2.3.1. *Sei $\{\lambda_\alpha\}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich $\{U'_\alpha, \psi_\alpha\}$. Dann ist die **Norm von ω im Punkt** $p \in U \cap R$ gegeben durch*

$$|\omega|(p) := \sum_\alpha \lambda_\alpha(p)|\omega_\alpha|(\psi_\alpha(p)),$$

*und für die **Supremumsnorm** setzten wir*

$$\|\omega\|_{\infty,D} := \sup_{p \in D \cap R} |\omega(p)|.$$

Wir werden in der Notation R unterdrücken. Abschließend definieren wir noch den Banachraum der beschränkten $(0,1)$-Formen auf $D \cap R$:

$$L^\infty_{(0,1)}(D \cap R) := \{\omega : \omega \text{ meßbare } (0,1)\text{-Form auf } D \cap R, \|\omega\|_{\infty,D} < \infty\}.$$

2.4 Puiseux-Normalisierung

Wir könnten die Supremumsnorm auf relativ kompakten Teilmengen komplexer Kurven noch auf einem anderen Weg definieren. Mit Hilfe der Puiseux Normalisierung ist es möglich, die irreduziblen Komponenten der komlexen Kurve X in der Nähe jeder isolierten Singularität durch die Einheitskreisscheibe $\Delta \subset \mathbb{C}$ zu parametrisieren. Diese Parametrisierung entspricht dann der bekannten Normalisierung eines komplexen Raumes, was die Bezeichnung rechtfertigt.
Mit Hilfe der Puiseux-Normalisierung lässt sich auch der Tangentialkegel in Singularitäten eindimensionaler analytischer Mengen beschreiben: Es handelt sich im irreduziblen Fall um einen komplexen Vektorraum der Dimension 1.
Wir benötigen:

Definition 2.4.1. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei lokal kompakten Hausdorffschen topologischen Räumen. Dann heißt f* ***eigentlich****, falls die Urbilder $f^{-1}(K)$ kompakter Mengen $K \subset Y$ wieder kompakt sind.*

Eigentliche Projektionen sind der Schlüssel zur Charakterisierung analytischer Mengen als analytische Überlagerungen, wie das folgende Theorem (vgl. [Ch], S.38) zeigt:

Theorem 2.4.2. *Sei $A \subset \mathbb{C}^n$ eine (nicht notwendig rein-dimensionale) analytische Menge, $\dim_a A = p$, $0 < p < n$, U eine Umgebung von a und $\pi : A \cap U \to U' \subset \mathbb{C}^p$ eine eigentliche Projektion. Dann existiert eine analytische Teilmenge $\sigma \subset U'$ von Dimension $< p$ und eine natürliche Zahl k, so dass gilt:*
(i) $\pi : A \cap U \setminus \pi^{-1}(\sigma) \to U' \setminus \sigma$ ist eine lokal biholomorphe k-blättrige Überlagerung, insbesondere also $\#\pi^{-1}(z') \cap A \cap U = k$ für alle $z' \in U' \setminus \sigma$, und
(ii) $\pi^{-1}(\sigma)$ ist nirgends dicht in $A_{(p)} \cap U$, $A_{(p)} = \{z \in A : \dim_z A = p\} \cap U$.

Kommen wir also zu eindimensionalen komplexen Räumen:

Lemma 2.4.3. *Sei $A \subset \mathbb{C}^n$ eine eindimensionale, in $0 \in A$ irreduzible, analytische Menge. Dann ist der Tangentialkegel $C(A, 0)$ ein komplexer Vektorraum der Dimension 1. Wählen wir für diese komplexe Linie die z_1-Achse, so existiert eine offene Umgebung $U = U' \times U'' \subset \mathbb{C}_{z_1} \times \mathbb{C}^{n-1}$ von 0 und eine homoömorphe holomorphe Abbildung $z = z(\zeta)$ der Einheitskreisscheibe $\Delta = \{|\zeta| < 1\} \subset \mathbb{C}$ auf $A \cap U$ mit $z_1(\zeta) = r\zeta^k$, $r > 0$, wobei k die Anzahl der Blätter von $A \cap U$ über U' ist. Weiterhin gilt $\mathrm{ord}_0 z_j(\zeta) > k$ für alle $j > 1$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass der Tangentialkegel $C(A, 0)$ nicht leer ist. Für einen regulären Punkt ist das klar. Sei also $0 \in A$ ein singulärer Punkt, das heißt $0 \in \mathrm{Sing}(X)$. Dann ist aber $\mathrm{Sing}(X)$ nach Theorem 1.1.13 eine 0-dimensionale analytische Teilmenge in A, so dass der Punkt $0 \in A$ eine isolierte Singularität darstellt und als Randpunkt einer reell zweidimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand aufgefasst werden kann. Damit finden wir auch in diesem Fall problemlos einen Vektor $v \in C(A, 0)$:

Sei nämlich $\{z_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset X$ eine beliebige Folge von Punkten in X mit $z_\mu \to 0$ für $\mu \to \infty$. Dazu existieren Werte $t_\mu := 1/\|z_\mu\| \in \mathbb{C}$, so dass $\|t_\mu z_\mu\| = 1$ ist. Also ist $\{t_\mu z_\mu\}$ eine Folge in der kompakten Sphäre $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. Wir gehen über zu einer konvergenten Teilfolge. Damit ist nach Definition 2.1.1 des Tangentialkegels

$$v := \lim_j t_{\mu_j} z_{\mu_j} \in C(A,0)$$

und $\|v\| = 1$. Durch unitären Koordinatenwechsel können wir $v = z_1 = (1,0,...,0)$ annehmen.
Betrachte nun die analytische Menge

$$\widetilde{A} := A \cap \mathbb{C}_{z_2 \dots z_n}.$$

Da $v = z_1$ tangential an A liegt, ist $\widetilde{A}$ eine echte analytische Teilmenge von A. Aber A ist irreduzibel. Daher besitzt $\widetilde{A}$ lediglich die Dimension 0.
Also existiert $r > 0$, so dass für

$$\begin{aligned} U'' &:= \{z'' \in \mathbb{C}_{z_2\dots z_n} : |z_i| < r\} \subset \mathbb{C}_{z_2\dots z_n} \\ bU'' &= \{z'' : |z_i| = r\} \subset \mathbb{C}_{z_2\dots z_n} \end{aligned}$$

nun

$$A \cap (\{0\} \times U'') = \widetilde{A} \cap (\{0\} \times U'') = \{0\}$$

und

$$A \cap (\{0\} \times bU'') = \widetilde{A} \cap (\{0\} \times bU'') = \emptyset$$

gilt.
Da A und $\{0\} \times bU''$ in $\mathbb{C}^n$ abgeschlossen und disjunkt sind, ist $dist(A, \{0\} \times bU'') > 0$, und es existiert $r' > 0$, so dass für

$$U' := B_{r'}(0) = \{z_1 : |z_1| < r'\} \subset \mathbb{C}_{z_1}$$

jetzt

$$A \cap (U' \times bU'') = \emptyset \tag{19}$$

ist.

$$U := U' \times U'' \subset \mathbb{C}^n$$

ist die gesuchte Umgebung von 0 in $\mathbb{C}^n$.
Nun wollen wir zeigen, dass die Einschränkung der orthogonalen Projektion

$$\pi : U' \times U'' \subset \mathbb{C}_{z_1} \times \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow U' \subset \mathbb{C}_{z_1}$$

auf $A \cap U$ eine eigentliche Abbildung ist.
Dies beruht auf folgender allgemeinen Tatsache (vgl. [Ch], S.29): Seien $D \subset X$ und $G \subset Y$ Teilmengen mit $\overline{G}$ kompakt. Die Einschränkung der Projektion

$(x, y) \mapsto x$ auf eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset D \times G$ ist eigentlich genau dann, wenn A keine Randpunkte in der Menge $D \times bG$ hat.
Wir führen die Überlegung speziell in unserem Fall aus:
Sei $K \subset U'$ kompakt. Es ist zu zeigen, dass

$$\widetilde{K} := \pi|_{A\cap U}^{-1}(K) = (K \times U'') \cap A$$

wieder kompakt ist. Sei also $\{V_\iota\}_\iota$ eine offene Überdeckung von $\widetilde{K}$. Dann ist

$$\{V_\iota\}_\iota \cup \{\big(K \times \overline{U''} \setminus A\big)\}$$

eine in $K \times \overline{U''}$ offene Überdeckung von $K \times \overline{U''}$, da wegen (19)

$$\big(K \times \overline{U''} \setminus A\big) \cup \widetilde{K} = (K \times \overline{U''}) \setminus (K \times bU'' \cap A) = K \times \overline{U''}$$

ist.
Da $K \times \overline{U''}$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$\{V_i\}_{i=1}^k \cup \{\big(K \times \overline{U''} \setminus A\big)\}.$$

Dann ist aber $\{V_i\}_{i=1}^k$ auch eine endliche Teilüberdeckung zu $\widetilde{K}$. Also ist

$$\pi : A \cap U \to U'$$

eine eigentliche Projektion und Theorem 2.4.2 liefert uns eine komfortable Ausgangssituation für das weitere Vorgehen.
Sei also $A \subset \mathbb{C}^n$ eine eindimensionale, in $0 \in A$ irreduzible, analytische Menge mit einer lokal biholomorphen k-blättrigen Überlagerung $\pi : A \setminus \{0\} \to B_r \setminus \{0\}$ über einer Scheibe $B_r := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < r, z_j = 0 \text{ für } j > 1\} \subset \mathbb{C}_{z_1}$, so dass $\pi^{-1}(0) \cap A = \{0\}$. Weiterhin können wir annehmen, dass $A \setminus \{0\}$ zusammenhängend ist, da A im Punkt 0 als irreduzibel vorausgesetzt worden ist.
Wir betrachten jetzt die Mengen

$$\Gamma_\rho := \pi^{-1}(\{|z_1| = \rho\})$$

und wollen zeigen, dass Γ_ρ für alle $0 < \rho < r$ eine geschlossene zusammenhängende Kurve ist. Da Γ_ρ kompakt (π ist eigentlich) und π lokal biholomorph ist, besteht Γ_ρ aus endlich vielen geschlossenen Kurven. Es ist also lediglich zu zeigen, dass Γ_ρ zusammenhängend ist.
Dazu wählen wir einen beliebigen stetigen Weg $\gamma : [0, r) \to A$ mit $\pi \circ \gamma(t) = (t, 0, .., 0)$. Das ist natürlich möglich, da π eine Überlagerung von $B_r \setminus \{0\}$ ist. Spezifizieren wir nun die Zusammenhangskomponente von Γ_ρ, deren Schnitt mit der Spur von γ nicht leer ist:

$$\widetilde{\Gamma_\rho} := \{z \in \Gamma_\rho : \exists c : [0, 1] \to \Gamma_\rho \text{ stetig }, c(0) = z, c(1) = \gamma(\rho)\}.$$

Wegen $\gamma(\rho) \in \Gamma_\rho$ ist $\gamma(\rho) \in \widetilde{\Gamma_\rho} \neq \emptyset$. Sei nun

$$M := \bigcup_{0<\rho<r} \widetilde{\Gamma_\rho}$$

Die Menge M ist in $A \setminus \{0\}$ gleichzeitig offen und abgeschlossen, da π lokal biholomorph ist. Das ist anschaulich klar, man sieht es aber auch folgendermaßen: Sei $w \in M$. Dann existiert σ mit $w \in \widetilde{\Gamma_\sigma}$. Nun ist $\widetilde{\Gamma_\sigma}$ als Zusammenhangskomponente einer kompakten Menge wieder kompakt. Überdecken wir also $\widetilde{\Gamma_\sigma}$ in der komplexen Mannigfaltigkeit $A \setminus \{0\}$ mit endlich vielen offenen Scheiben S_i, $1 \leq i \leq k$, die die anderen kompakten Komponenten $\Gamma_\sigma \setminus \widetilde{\Gamma}_\sigma$ nicht berühren.
Für die offene Vereinigung $V := \bigcup_i S_i$ dieser Scheiben (gewissermaßen ein Schlauch um $\widetilde{\Gamma_\sigma}$) gilt dann

$$V \cap \pi^{-1}(\{|z_1| = \sigma\}) = V \cap \Gamma_\sigma = \widetilde{\Gamma}_\sigma \subset\subset V$$

und $dist(\Gamma_\sigma, bV) > 0$.
Daher existieren wegen der Stetigkeit von π^{-1} Konstanten $\sigma_1 < \sigma$ und $\sigma_2 > \sigma$ mit

$$dist(\bigcup_{\sigma_1<\rho<\sigma_2} \Gamma_\rho, bV) > 0,$$

also

$$V \cap \pi^{-1}(\{\sigma_1 < |z_1| < \sigma_2\}) \subset\subset V.$$

Mit $\gamma(\sigma) \in \pi^{-1}(\sigma) \cap \widetilde{\Gamma}_\sigma \in V$ ist aber auch $\gamma((\sigma_1, \sigma_2)) \subset V$, so dass wegen $\gamma((\sigma_1, \sigma_2)) \subset \pi^{-1}(\{\sigma_1 < |z_1| < \sigma_2\})$ gilt:

$$V \cap \pi^{-1}(\{\sigma_1 < |z_1| < \sigma_2\}) = \bigcup_{\sigma_a<\rho<\sigma_2} \widetilde{\Gamma}_\rho \subset M.$$

Das heißt, eine Umgebung von $\widetilde{\Gamma}_\sigma$ gehört noch zu M, so dass insbesondere natürlich auch alle Punkte in der Nähe von $w \in \widetilde{\Gamma}_\sigma$ zu M gehören. Analog kann man für einen Punkt $w \in A \setminus \{0\}$, $w \notin M$ eine Schlauch-Umgebung finden, in der kein Punkt zu M gehören kann.
Damit ist nun also $M = A \setminus \{0\}$, da $A \setminus \{0\}$ zusammenhängend ist, und wir erhalten $\Gamma_\rho = \widetilde{\Gamma_\rho}$, so dass die Menge Γ_ρ tatsächlich eine geschlossene zusammenhängende Kurve darstellt, die den Kreis $\{|z_1| = \rho\}$ k-blättrig überlagert.
Durchlaufen wir die Kurve komplett in positiver Orientierung, so erhalten wir eine eindeutige Parametrisierung $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \to \Gamma_\rho$ mit

$$\pi \circ \gamma_\rho(t) = \rho e^{itk}$$

und $\gamma_\rho(0) = \gamma_\rho(2\pi)$.

Diese Parametrisierung wollen wir nun verwenden, um einen Homöomorphismus zwischen A und der Einheitskreisscheibe $\Delta = \{|\zeta| < 1\} \subset \mathbb{C}$ zu konstruieren. Sei also

$$\zeta(\gamma_\rho(t)) := \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1/k} e^{it},$$

wobei hier die positive reelle k-te Wurzel gemeint ist. Damit ist $\zeta : A \to \Delta$ bijektiv und auf $A \setminus \{0\}$ sogar holomorph, da $\zeta(z)$ hier lokal durch $(z_1/r)^{1/k}$ dargestellt werden kann. Betrachten wir nun die Umkehrabbildung $z : \Delta \to A$. Dann ist z als Inverse einer bijektiven holomorphen Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten selbst holomorph auf der punktierten Einheitskreisscheibe $\Delta^* = \{0 < |\zeta| < 1\} \subset \mathbb{C}$ und nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph auf ganz Δ.
An Hand der lokalen Darstellung von $\zeta(z)$ in Abhängigkeit von z_1 ergibt sich $z_1(\zeta) = r\zeta^k$. Wir erinnern daran, dass nach der Definition des Tangentialkegels $C(A, 0)$ eine Folge von Punkten $\{p_\mu\} \subset A \setminus \{0\}$ mit

$$\frac{p_\mu}{\|p_\mu\|} \to z_1 = (1, 0, ..., 0)$$

für $\mu \to \infty$ existiert.
Dazu gibt es $\zeta_\mu := \zeta(p_\mu) \in \Delta^*$ mit $\zeta_\mu \to 0$, so dass gilt:

$$\frac{(z_1(\zeta_\mu), ..., z_n(\zeta_\mu))}{\|z(\zeta_\mu)\|} = \frac{z(\zeta_\mu)}{\|z(\zeta_\mu)\|} \to v = z_1 = (1, 0, ..., 0) \text{ für } \mu \to \infty.$$

Damit konvergieren $z_1(\zeta)$ und $z(\zeta)$ in ζ gleich schnell gegen 0, $z_1 = O(\|z\|)$, wohingegen für $j > 1$ nun gilt:

$$z_j(\zeta) = o(\|z(\zeta)\|) = o(\|z_1(\zeta)\|),$$

so dass wir in der Tat $ord_0 z_j(\zeta) > k$ erhalten. Aber dann ist $z(\zeta) = z_1(\zeta)(v + o(1))$ für $\zeta \to 0$ und alle Tangentialvektoren an A im Punkt 0 sind komplex proportional zu v. Weil $\pi(A) = B_r$, die Folge $\{\zeta_\mu\}$ also aus allen Richtungen nach 0 laufen kann, erhalten wir für den Tangentialkegel die ganze komplexe Linie: $C(A, 0) = \mathbb{C}_{z_1}$. $\square$

Tatsächlich haben wir eine Puiseux-Normalisierung schon in Gegenbeispiel 1.4.3 verwendet. Wir erinnern:

Beispiel 2.4.4. *Seien $n > m$ zwei teilerfremde natürliche Zahlen, m gerade. Dann ist $X = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_2^m = z_1^n\}$ eine eindimensionale irreduzible analytische Teilmenge des $\mathbb{C}^2$, die durch $z : \mathbb{C} \to X$, $z(t) = (t^m, t^n)$ parametrisiert ist. Der Tangentialkegel besteht aus der z_1-Achse: $C(X, 0) = \mathbb{C}_{z_1}$.*

Da es sich bei einer solchen Parametrisierung $\varphi : \Delta \to A$ leider nicht um einen Diffeomorphismus handelt, können wir die Supremumsnorm einer Differentialform nicht über die zurückgezogene Form definieren. Wir hätten

$$|\varphi^*\omega|(p) = |\varphi^*\omega_p(v)| = |\omega_{\varphi(p)}(\varphi_*(v))|,$$

was wegen $d\varphi|_p = \varphi_{*,p} \to 0$ für $p \to 0$ zu keinem guten Ergebnis führt, da auch einige unbeschränkte Formen nun eine gleichmäßig beschränkte Supremumsnorm erhalten würden.
Ein Vorteil der Normalisierung besteht aber darin, dass die z_1-Achse in der Singularität tangential an der analytischen Menge liegt, so dass $(0,1)$-Formen in der Nähe der Singularität eine eindeutige Darstellung

$$\omega(z) = \lambda(z)\iota^* \circ \pi^*(d\overline{z_1})|_z$$

besitzen, wobei $\iota : A \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ die Einbettung und $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}_{z_1}$ die orthogonale Projektion bezeichnet. Damit können wir hier einfach

$$|\omega|(p) := |\lambda|(p)$$

setzen, um so die Norm in der Nähe der Singularitäten zu definieren. Die Supremumsnorm einer $(0,1)$-Form definieren wir dann wieder unter Verwendung einer Zerlegung der Eins über eine endliche Überdeckung von offenen Mengen, die entweder keine Singularität enthalten oder durch Δ parametrisiert sind.
Dabei ist darauf zu achten, dass wir in reduziblen Singularitäten jeweils die lokalen irreduziblen Komponenten parametrisieren. Die so entstehende Supremumsnorm ist natürlich wieder äquivalent zu der bereits konstruierten Norm aus Definition 2.3.1, da sich die Länge von Tangentialvektoren unter $\iota_* \circ \pi_*$ nicht ändert.
Diese Konstruktion ist aber leider für höherdimensionale komplexe Räume nicht durchführbar, da diese in der Regel nicht parametrisierbar sind. Zum Beispiel kann die analytische Menge $A = \{z \in \mathbb{C}^3 : z_1^2 = z_3 z_2^2\}$ aus Beispiel 1.1.15 in der Singularität bei 0 nicht parametrisierbar sein, da sie in der Nähe dieses irreduziblen Punktes nicht irreduzibel bleibt, und somit keine topologische Mannigfaltigkeit ist. Auch analytische Mengen mit ausschließlich isolierten Singularitäten wie $A = \{z \in \mathbb{C}^3 : z_1^2 = z_2 z_3\}$ müssen nicht parametrisierbar sein.

2.5 Hölder-Normen auf komplexen Kurven

Wir arbeiten wieder mit dem regulären Atlas aus Abschnitt 2.3: Für jedes α erhalten wir eine Metrik auf $U'_\alpha \cap R$, indem wir die euklidische Metrik auf W_α einschränken und zurückziehen. Eine Zerlegung der Eins liefert dann eine Metrik auf der reellen Mannigfaltigkeit

$$U \cap R = \bigcup U'_\alpha \cap R,$$

wobei $\overline{D} \subset U$ ist (vgl. (18)).
Genauer setzen wir mit den Bezeichnungen aus Definition 2.3.1:

Definition 2.5.1. *Für zwei reelle Tangentialvektoren v, w an der reellen Mannigfaltigkeit $U \cap R$ im Punkt $p \in U \cap R$ sei*

$$< v, w >_U := \sum_\alpha \lambda_\alpha(p) < (\psi_\alpha)_*(v), (\psi_\alpha)_*(w) >_\alpha,$$

wobei $(\psi_\alpha)_*$ die reelle Tangentialabbildung der Abbildung $\psi_\alpha : U'_\alpha \to \mathbb{C}^{n_\alpha}$ und $< \cdot, \cdot >_\alpha$ das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{C}^{n_\alpha}$ bezeichnet.

Nun müssen wir den Abstand zwischen zwei Punkten $P, Q \in D$ in $\overline{D}$ bestimmen. Wir definieren

$$dist_D(P, Q) := \inf_\gamma L(\gamma),$$

wobei wir das Infimum bilden über alle stetigen Wege in $\overline{D}$, die P und Q verbinden, und die in jedem regulären Punkt glatt sind. Wir verwenden bewusst den Abstand der Punkte in $\overline{D}$, und nicht den Abstand der Punkte in D, da wir später von Hölder-stetigen Funktionen erwarten wollen, dass sie sich auf den Rand ihres Definitionsgebietes fortsetzen. Die Länge eines solchen Weges ergibt sich dann mit

$$L(\gamma) := \int \sqrt{< \gamma'(t), \gamma'(t) >_U} dt,$$

wenn er stückweise stetig differenzierbar ist. Wir müssen nun noch zeigen, dass mindestens ein solcher Weg endlicher Länge existiert.

Lemma 2.5.2. *Sei $D \subset\subset X$ eine relativ kompakte, zusammenhängende, offene Teilmenge einer komplexen Kurve X. Dann existiert für je zwei Punkte $P, Q \in D$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg endlicher Länge in D, der P und Q verbindet und in allen regulären Punkten von X glatt ist.*

Beweis. Sei $P \in D$. Wir bezeichnen mit M die Menge der Punkte in D, die mit P wie gewünscht verbindbar sind, und werden zeigen, dass M gleichzeitig offen und relativ abgeschlossen ist. Da D zusammenhängend ist, muss dann aber schon $D = M$ gelten, da M wegen $P \in M$ nicht leer ist.

Sei also $x \in M$. Ist x ein regulärer Punkt, so ist D in einer Umgebung von x diffeomorph zu einer offenen Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ und damit sind sicherlich auch alle Punkte in dieser Umgebung in M enthalten. Ist x ein singulärer Punkt, so können wir die irreduziblen Komponenten von D in einer genügend kleinen Umgebung von x durch endlich viele Einheitskreisscheiben $\Delta \subset \mathbb{C}$ parametrisieren und erhalten so für jeden Punkt y in dieser Umgebung einen glatten Weg, der x und y verbindet. Damit ist M offen.
Sei nun $x \in D \setminus M$. Dann finden wir eine kleine Umgebung von x, so dass alle Punkte y in dieser Umgebung ebenfalls in $D \setminus M$ liegen, da wir ansonsten wie eben jeden Weg, der P mit y verbindet, zu einem Weg nach x fortsetzen könnten. Damit ist aber $D \setminus M$ offen und M relativ abgeschlossen in D. □

Wir können dieses Ergebnis auf komplexe Räume höherer Dimension verallgemeinern. Da diese Räume in der Nähe der Singularitäten aber in der Regel nicht parametrisierbar sind, müssen wir mit einer anderen Methode glatte Wege finden, die aus den Singularitäten herausführen. Dazu können wir das "Curve Selection Lemma" verwenden, das zum Beispiel Milnor in [Mi] beweist. Das im vorigen Lemma angewandte Verfahren, einen Weg aus den Singularitäten über eine Parametrisierung durch die Einheitskreisscheibe $\Delta \subset \mathbb{C}$ zu finden, ist ein trivialer Spezialfall dieses Satzes und wird auch im Beweis desselben verwendet.

Definition 2.5.3. *Für $\alpha > 0$ sei die **α-Hölder-Norm** einer Funktion f auf D gegeben durch*

$$\|f\|_{\alpha,D} := \|f\|_{\infty,D} + \sup_{P,Q\in D} \frac{|f(P) - f(Q)|}{dist_D(P,Q)^\alpha},$$

und wir sagen, f ist α-hölderstetig genau dann, wenn $\|f\|_\alpha < \infty$ ist, und definieren den Banachraum

$$\Lambda_\alpha(D) := \{f \in L^\infty(D) : \|f\|_{\alpha,D} < \infty\}.$$

Eine Funktion $f \in \Lambda_\alpha(D)$ ist gleichmäßig stetig und setzt sich daher auch auf den Rand von D stetig fort.
Man kann diese Norm auch für (p,q)-Formen definieren, indem man für solche Formen ω die Norm $|\omega|(p)$ mit einer Zerlegung der Eins wie in Abschnitt 2.3 global definiert.
Wir wollen hier noch auf den Abstand zweier Punkte in komplexen Kurven nahe einer Singularität eingehen. Sei dazu A eine eindimensionale irreduzible analytische Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ mit einer isolierten Singularität bei 0. Dann wenden wir Lemma 2.4.3 an und erhalten neben der Parametrisierung

$$z : \Delta = \{|\zeta| < 1\} \subset \mathbb{C} \to A$$

$$z(\zeta) = (r\zeta^k, z_2(\zeta), ..., z_n(\zeta))$$

noch die eigentliche orthogonale Projektion

$$\Pi : A \to \mathbb{C}_{z_1}$$

auf die z_1-Achse. Dies ist eine k-blättrige analytische Überlagerung, die nur bei 0 verzweigt ist. Für jeden Punkt $q \in \Delta$, $q \neq 0$, in der Einheitsscheibe bezeichnen wir nun mit S_q das Kreissegment von Δ, dass sich zu beiden Seiten um den Winkel $\pi/(2k)$ von q erstreckt. Wir werden nun für zwei Punkte $P, Q \in A$ festlegen, wann sie in A dicht beieinander liegen.
Sei dazu q der Punkt mit $z(q) = Q$. Dann ist $z_1(S_q) = r\zeta^k(S_q) \subset \mathbb{C}_{z_1}$ ein Kreissegment vom Winkel π um $\Pi(Q)$, so dass Π dort eine eindeutige differenzierbare Inverse Π_Q^{-1} mit $\Pi_Q^{-1}(\Pi(Q)) = Q$ besitzt. Wir sagen: Q und P liegen in A dicht beieinander, wenn auch P im Bild dieser Inversen liegt. Äquivalent liegt P genau dann dicht bei Q, wenn $P \in z(S_q)$ ist. Ist Q oder P gleich 0, so liegen die beiden Punkte immer dicht beieinander. Ist keiner dieser Fälle gegeben, so sagen wir, Q und P liegen nicht dicht beieinander in A.
Aus der Puiseux-Normalisierung ergibt sich in den Koordinaten aus Lemma 2.4.3 für den Abstand zweier Punkte in der Nähe der Singularität bei 0 folgende Abschätzung:

Korollar 2.5.4. *Seien $P = (P_1, ..., P_n)$, $Q = (Q_1, ..., Q_n) \neq 0$ zwei Punkte in A in der Nähe der Singularität. Sei $z : \Delta \to A$ mit $z(\zeta) = (r\zeta^k, z_2(\zeta), ..., z_n(\zeta))$ die Puiseux-Normalisierung, $0 \neq q \in \Delta$ der Punkt mit $z(q) = Q$, $S_q = \{\zeta \in \Delta : |\arg(\zeta/q)| < \pi/2k\}$. Dann gilt:*
(i) $dist_A(P, Q) \sim |P_1 - Q_1|$, falls P und Q in A dicht beieinander liegen, also $P \in z(S_q)$ ist.
(ii) $dist_A(P, Q) \sim |P_1| + |Q_1|$, falls P und Q in A nicht dicht beieinander liegen, also $P \notin z(S_q)$ ist.

Beweis. Wir greifen in diesem Beweis auf die Abbildung Π zurück, die zur Charakterisierung der Blätter verwendet wird.
(i) Π_Q^{-1} kann explizit angegeben werden:

$$\Pi_Q^{-1}(z_1) = (z_1, z_2(z_1), ..., z_n(z_1)),$$

wobei mit $z_j, j > 1$ die holomorphen Funktionen aus der Puiseux-Normalisierung gemeint sind. Dann ist nach Lemma 2.4.3

$$ord_0 z_j(\zeta) = k_j > k = ord_0 z_1(\zeta),$$

und daher

$$z_j = o(|z_1|),$$

so dass das Differential $d\Pi_Q^{-1}$ in der Nähe der Singularität beschränkt ist, sagen wir durch M.

Betrachten wir den Weg

$$\sigma(t) := tP_1 + (1-t)Q_1$$

von Q_1 nach P_1 in der Ebene. Dieser Weg liegt im konvexen Bild von Π_Q, so dass $\Pi_Q^{-1} \circ \sigma$ ein Weg von Q nach P in A ist:

$$dist_A(P,Q) \leq L(\Pi_Q^{-1} \circ \sigma) = \int_0^1 \| \frac{\partial}{\partial t} \Pi_Q^{-1} \circ \sigma \| \leq M|P_1 - Q_1|.$$

Andererseits ist natürlich

$$dist_A(P,Q) \geq \|P - Q\| \geq |P_1 - Q_1|.$$

(ii) In diesem Fall ist

$$dist_A(P,Q) \leq dist_A(P,0) + dist_A(0,Q) \lesssim |P_1| + |Q_1|$$

nach (i) klar.
Für die andere Ungleichung nehmen wir $Q_1 \in \mathbb{R}^+$ an. Weil P nicht in der Nähe von von Q, also nicht im Bild der Inverse $\Pi_Q^{-1}(\{z_1 \in \mathbb{C}_{z_1} : \text{Re } z_1 > 0\})$ liegt, muss ein Weg σ von Q nach P in A den Halbraum $H := \{z \in \mathbb{C}^n : \text{Re } z_1 > 0\}$ zunächst verlassen.
Der Weg σ kann aber natürlich auch nicht im Zylinder $Z := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < |P_1|\}$ enden. Sei

$$d := \sqrt{|P_1|^2 + |Q_1|^2},$$

so ist

$$D := \{z : |z_1 - Q_1| < d\} \subset H \cup Z,$$

weil für $z \in D$ entweder $\text{Re } z_1 > 0$, also $z \in H$, oder $\text{Re } z_1 \leq 0$, also

$$\begin{aligned} |z_1 - Q_1|^2 &= (\text{Im } z_1)^2 + (Q_1 - \text{Re } z_1)^2 \\ &= (\text{Im } z_1)^2 + Q_1^2 - 2Q_1 \text{Re } z_1 + (\text{Re } z_1)^2 \\ &< d^2 = |P_1|^2 + |Q_1|^2 \end{aligned}$$

gilt. Mit letzterem ist aber

$$|z_1|^2 = (\text{Im } z_1)^2 + (\text{Re } z_1)^2 \leq |P_1|^2,$$

also $z \in Z$.
Ein Weg σ von Q nach P muss also mit $H \cup Z$ auch D verlassen, falls $\text{Re } (\Pi(P)) \leq 0$ ist. Dann folgt:

$$L(\sigma) \geq d = \sqrt{|P_1|^2 + |Q_1|^2} \geq \frac{1}{2}(|P_1| + |Q_1|).$$

Falls $\text{Re } (\Pi(P)) > 0$ ist, so muss der Weg σ zunächst H und dann Z verlassen. Aus Symmetriegründen (Spiegelung an der $\{Rez_1 = 0\}$-Achse bzw. -Ebene) ergibt sich dann die gleiche Abschätzung. □

2.6 Lokale Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung

Es ist bekannt, dass zur $\overline{\partial}$-Gleichung auf Riemannschen Flächen lokal ein stetiger Lösungsoperator in die Hölder-α-Räume für $0 < \alpha < 1$ existiert. Wir wollen dieses Ergebnis nun auf eindimensionale komplexe Räume ausdehnen. Wir müssen also zeigen, dass die $\overline{\partial}$-Gleichung in der Nähe der Singularitäten mit entsprechender Regularität lösbar ist.
Betrachten wir zur Vorbereitung die Situation in der komplexen Ebene:

Lemma 2.6.1. *Sei $G \subset\subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $0 < \alpha < 1$. Dann existiert ein stetiger linearer Operator*

$$K : L^{\infty}_{(0,1)}(G) \longrightarrow \Lambda_{\alpha}(G)$$

mit $\overline{\partial} K\omega = \omega$ im Distributionssinne für $\omega \in L^{\infty}_{(0,1)}(G)$ und es gilt

$$\|K\omega\|_{\alpha,G} \leq C_G \|\omega\|_{\infty,G},$$

mit einer Konstanten C_G, die nur von G abhängt.

Beweis. Das Cauchy-Integral liefert den gesuchten Operator:

$$K\omega(z) := -\int_G \omega(\zeta) \wedge K_0(\zeta, z)$$

mit

$$K_0 = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Es ist bekannt [Ra], S.158, dass die gesuchte Konstante C_G existiert. Wir müssen noch zeigen, dass tatsächlich

$$\overline{\partial} K\omega = \omega$$

gilt.
Sei dazu $\omega = f d\bar{z} \in L^{\infty}_{(0,1)}(G)$ eine beschränkte $(0,1)$-Form, also $f \in L^{\infty}(G)$. Damit ist $f \in L^p(G)$ für ein beliebiges $p > 2$ und es existiert eine Folge glatter Funktionen mit kompaktem Träger $f_\epsilon \in C^{\infty}_0(G)$, die in L^p-Norm gegen f konvergiert. Sei nun

$$u_\epsilon(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_G f_\epsilon(t) \frac{dt \wedge d\bar{t}}{t - z},$$

so ist $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \bar{z}} = f_\epsilon$ und die Folge der u_ϵ konvergiert auf G gleichmäßig gegen $K\omega$:

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(z) - K\omega(z)| &= \left| \int_G (f_\epsilon(t) - f(t)) \frac{dt \wedge d\bar{t}}{t - z} \right| \\ &\leq \|f_\epsilon - f\|_{L^p(G)} \|\frac{1}{t - z}\|_{L^q(G)} \to 0, \end{aligned}$$

für $\epsilon \to 0$, da $q < 2$ ist.
Für eine beliebige Testfunktion $\chi \in C_0^\infty(G)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int f\chi &= \lim_{\epsilon \to 0} \int f_\epsilon \chi = \lim_{\epsilon \to 0} \int \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \overline{z}} \chi \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0} \int u_\epsilon \frac{\partial \chi}{\partial \overline{z}} = -\int K\omega \frac{\partial \chi}{\partial \overline{z}}. \end{aligned}$$

□

Kommen wir nun also zu komplexen Kurven.

Satz 2.6.2. *Sei X eine komplexe Kurve mit isolierten Singularitäten, $p \in X$ ein beliebiger Punkt. Dann existiert für $0 < \alpha < 1$ eine Umgebung $V \subset\subset X$ von p in X und ein linearer Operator*

$$T : L^\infty_{(0,1)}(R \cap V) \to \Lambda_\alpha(V)$$

mit $\overline{\partial} Tf = f$ für $f \in L^\infty_{(0,1)}(R \cap V)$ und es gilt

$$\|Tf\|_{\alpha,V} \leq C_V \|f\|_{\infty, R\cap V}.$$

Nach Konstruktion hängen T und V nicht von α ab.

Beweis. Sei zunächst $p \in R$ ein regulärer Punkt. Dann wählen wir Umgebungen $V \subset\subset U$ von p in X, die keine Singularitäten enthalten und mittels einer Abbildung $\varphi : U \to O$ biholomorph zu offenen Mengen $W \subset\subset O \subset \mathbb{C}$ sind. Ist nun $\omega \in L^\infty_{(0,1)}(R \cap V) = L^\infty_{(0,1)}(V)$, so können wir ω zurückziehen zu einer Form $\eta := (\varphi^{-1})^* \omega \in L^\infty_{(0,1)}(W)$ und in $\mathbb{C}$ die Bochner-Martinelli-Koppelman Formel anwenden:

$$K_0^W \eta(z) := -\int_W \eta(\zeta) \wedge K_0(\zeta, z),$$

wobei hier

$$K_0 = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

ist, und nach Lemma 2.6.1 existiert für $\alpha < 1$ eine Konstante c_α mit

$$\|K_0^W \eta\|_\alpha \leq c_\alpha \|\eta\|_\infty$$

und $\overline{\partial} K_0^W \eta = \eta$. Das liefert aber schon den gesuchten Operator

$$T := \varphi^* \circ K_0^W \circ (\varphi^{-1})^*$$

und eine Konstante C_V, so dass nun

$$\|T\omega\|_{\alpha,V} \leq C_V \|\omega\|_{\infty,V}$$

für alle $\omega \in L^\infty_{(0,1)}(V)$ gilt, da φ noch in der Umgebung U von $\overline{V}$ biholomorph ist. Wegen

$$|\varphi(P) - \varphi(Q)| = |\int_Q^P d\varphi| \leq M \cdot dist_V(P,Q)$$

mit $M := \max_{t\in\overline{V}} \|d\varphi(t)\|$ ist nämlich

$$\frac{|\varphi^* f(P) - \varphi^* f(Q)|}{|dist_V(P,Q)|^\alpha} \lesssim \frac{|f(\varphi(P)) - f(\varphi(Q))|}{|\varphi(P) - \varphi(Q)|^\alpha} \leq \|f\|_{\alpha,W}.$$

Betrachten wir nun den Fall, dass p ein singulärer Punkt ist. Wir können annehmen, dass X im Punkt p irreduzibel ist, und dass X lokal in einen $\mathbb{C}^n$ eingebettet ist. Sei nun $U \subset\subset X$ eine Umgebung von p in X, die durch die Einheitskreisscheibe mittels der Puiseux-Normalisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \Delta &\rightarrow U \\ t &\rightarrow (t^k, z_2(t), ..., z_n(t)), \end{aligned}$$

für ein $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, parametrisiert ist.
Hier ist $\varphi^{-1}(U \cap R) = \Delta^* = \Delta - \{0\}$ die punktierte Scheibe. Ist nun $\omega \in L^\infty_{(0,1)}(R \cap U)$, so können wir wieder ω zurückziehen zu einer Form

$$\eta := \varphi^*\omega = \lambda d\bar{t} \in L^\infty_{(0,1)}(\Delta^*),$$

da wegen $d\varphi_t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$ auch η gleichmäßig beschränkt ist:

$$|\eta|(t) = |\eta_t(v)| = |\omega_{\varphi(t)}(\varphi_{*,t}(v))| \lesssim |\omega|(\varphi(t)).$$

Genauer erhalten wir wegen $\|d\varphi(t)\| \lesssim |t|^{k-1}$ sogar

$$|\lambda|(t) \lesssim |t|^{k-1} \tag{20}$$

Nun bleibt aber die Standard-Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung

$$f_0(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\lambda(t)}{t-w} dt \wedge d\bar{t}$$

nach Zurückziehen durch φ^{-1} nicht unbedingt hölderstetig. Wir müssen daher eine Lösung höherer Regularität finden. Dazu ziehen wir von f_0 noch die holomorphe Taylor-Entwicklung bis zum $(k-1)$-ten Glied ab. Sei also

$$f(w) := f_0(w) - T_0^{k-1} f(w)$$

mit

$$T_0^{k-1} f(w) := \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=0}^{k-1} w^i \int_\Delta \frac{\lambda(t)}{t^{i+1}} dt \wedge d\bar{t}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-w}-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{w^i}{t^{i+1}} &= \frac{1}{t-w}-\frac{1}{t^k}\sum_{i=0}^{k-1}t^{k-1-i}w^i\\ &= \frac{1}{t-w}-\frac{t^k-w^k}{t^k(t-w)}=\frac{w^k}{(t-w)t^k}\end{aligned}$$

heißt das aber nichts anderes als

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\lambda(t)w^k}{(t-w)t^k}dt\wedge d\bar{t}.$$

Mit (20) sehen wir, dass dieses Integral für $w\neq 0$ existiert:

$$|f(w)|\lesssim |w|^k\int_\Delta \frac{dt\wedge d\bar{t}}{|t-w||t|}$$

und wir f mit $f(0)=0$ fortsetzen können.
Nun ist $(\varphi^{-1})^*f$ auf $V:=\varphi(B_{1/3}(0))$ α-hölderstetig für alle $\alpha<1$, wie Lemma 2.6.6 zeigen wird. □

Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen.

Lemma 2.6.3. *Seien $w_1=r_1e^{i\varphi_1}$ und $w_2=r_2e^{i\varphi_2}$ mit $r_i\geq 0$, $0\leq\varphi_i<2\pi$ zwei komplexe Zahlen , so dass $|\varphi_1-\varphi_2|\leq\pi/k$ für $k\in\mathbb{N}$, $k>1$ gilt. Dann ist*

$$|w_1^k-w_2^k|\gtrsim |w_1-w_2|^k.$$

Beweis. Wir können $|w_2|\leq|w_1|$ und $w_1=1\in\mathbb{R}$, also $\varphi_1=0$ und $r_1=1$ annehmen. Damit ist also $w_2=r_2e^{i\varphi_2}$ mit $0\leq r_2\leq 1$ und $0\leq\varphi_2\leq\pi/k$.
Betrachte nun die Funktion

$$f(w)=\frac{(1-w)^k}{1-w^k}$$

für $w=re^{i\varphi}$ auf dem Sektor $0\leq r\leq 1$ und $0\leq\varphi\leq\pi/k$. Wir müssen überprüfen, ob f in Punkten w mit $w^k=1$ stetig ist. Wegen $\varphi\leq\pi/k$ kommt dafür aber nur $w=1$ in Frage. Nach de l'Hopital ist

$$\lim_{w\to 1}\frac{(1-w)^k}{1-w^k}=0.$$

Damit ist f auf dem kompakten Sektor stetig, so dass $|f|$ ein Maximum M annimmt. Damit ist aber

$$|1-w_2|^k\leq M|1-w_2^k|,$$

und nur das war noch zu zeigen. □

Die Aufteilung für die Integrationsgebiete der folgenden Integrale ist [FoGa] entnommen.

Lemma 2.6.4. *Sei* $\Delta \subset \mathbb{C}$ *die Einheitskreisscheibe,* $0 < |w| < 1/3$*. Dann ist*

$$\int_\Delta \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t||t-w|} \lesssim |\log||w|.$$

Beweis. Sei $\delta := |w|/2$. Wir zerlegen das Integrationsgebiet Δ in vier Gebiete:

$$\begin{aligned} R_1 &:= B_\delta(0) \\ R_2 &:= B_\delta(w) \\ R_3 &:= B_{3\delta}(0) \setminus (R_1 \cup R_2) \\ R_4 &:= B_1(0) \setminus B_{3\delta}(0) \end{aligned}$$

Das Integral über R_i sei mit I_i bezeichnet. Für $t \in R_1$ ist $|t-w| > \delta$, also

$$I_1 < \frac{1}{\delta} \int_{R_1} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t|} = \frac{2\pi}{\delta} \int_0^\delta dr = 2\pi.$$

Analog ist $|t| > \delta$ für $t \in R_2$:

$$I_2 < \frac{1}{\delta} \int_{R_2} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t-w|} = \frac{2\pi}{\delta} \int_0^\delta dr = 2\pi.$$

Für $t \in R_3$ ist $|t-w| > \delta > |t|/3$, also:

$$I_3 < 3 \int_{R_3} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t|^2} < 6\pi \int_\delta^{3\delta} \frac{dr}{r} = 6\pi \log 3.$$

Und schließlich gilt für $t \in R_4$: Wegen $|t| > 3\delta = 3|w|/2$ und $|t| \leq |t-w| + |w|$ ist $|t-w| \geq |t| - |w| > |t| - 2|t|/3 = |t|/3$, also:

$$I_4 < 3 \int_{R_4} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t|^2} = 6\pi \int_{3\delta}^1 \frac{dr}{r} = -6\pi \log 3\delta$$

□

Lemma 2.6.5. *Sei* $\Delta \subset \mathbb{C}$ *die Einheitskreisscheibe,* $0 < |w_1| \leq |w_2| < 1/3$ *und* $|w_1 - w_2| < |w_2|/10$*. Dann ist*

$$\int_\Delta \frac{|w_1||w_1 - w_2|}{|t||t-w_1||t-w_2|} dt \wedge d\bar{t} \lesssim |w_1 - w_2||\log||w_1 - w_2|.$$

Beweis. Der Faktor $|w_1 - w_2|$ kann ignoriert werden.
Sei $\delta := |w_1 - w_2|$. Dann ist $\delta < |w_2|/10$. Weiterhin ist

$$|w_1| \geq |w_2| - |w_1 - w_2| \geq |w_2| - |w_2|/10 = \frac{9}{10}|w_2|,$$

also etwa $|w_2| < 2|w_1|$. Wir zerlegen das Integrationsgebiet in sieben Gebiete:

$$\begin{aligned}
R_0 &:= B_{|w_2|/3}(0) \\
R_1 &:= B_{\delta/3}(w_1) \\
R_2 &:= B_{\delta/3}(w_2) \\
R_3 &:= B_{3\delta}(w_2) \setminus (R_1 \cup R_2) \\
R_4 &:= B_{|w_2|/3}(w_2) \setminus B_{3\delta}(w_2) \\
R_5 &:= B_{3|w_2|}(0) \setminus \big(R_0 \cup B_{|w_2|/3}(w_2)\big) \\
R_6 &:= \Delta \setminus B_{3|w_2|}(0)
\end{aligned}$$

Das Integral über R_i sei mit I_i bezeichnet. Wir werden im Folgenden immer einen der Faktoren im Nenner nach unten gegen $|w_1|$ abschätzen.
0) Für $t \in R_0$ ist $|t - w_1| > |w_2|/3 \geq |w_1|/3$ und $|t - w_2| > |w_2|/3$, also:

$$I_0 < \frac{9}{|w_2|} \int_{R_0} \frac{|w_1| dt \wedge d\bar{t}}{|w_1||t|} = \frac{18\pi}{|w_2|} \int_0^{|w_2|/3} dr = 6\pi.$$

1) Für $t \in R_1$ ist

$$|t| \geq |w_1| - \delta/3 \geq |w_1| - \frac{|w_2|}{30} > |w_1| - \frac{|w_1|}{15} \gtrsim |w_1|$$

und $|t - w_2| > \delta/3$, also:

$$I_1 \lesssim \frac{3}{\delta} \int_{R_1} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t - w_1|} = \frac{6\pi}{\delta} \int_0^{\delta/3} dr = 2\pi.$$

2) Für $t \in R_2$ ist analog

$$|t| \geq |w_2| - \delta/3 \geq |w_2| - \frac{|w_2|}{30} \gtrsim |w_2| \geq |w_1|$$

und $|t - w_1| > \delta/3$, also:

$$I_2 \lesssim \frac{3}{\delta} \int_{R_2} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t - w_2|} = \frac{6\pi}{\delta} \int_0^{\delta/3} dr = 2\pi.$$

3) $t \in R_3$ liefert einerseits

$$|t| \geq |w_2| - 3\delta \geq |w_2| - \frac{3|w_2|}{10} \gtrsim |w_2| \geq |w_1|$$

und wegen $|t - w_2| \leq 3\delta$ andererseits auch

$$|t - w_1| \geq \delta/3 \geq |t - w_2|/9.$$

Daher ist

$$I_3 \lesssim 9 \int_{R_3} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t - w_2|^2} < 18\pi \int_{\delta/3}^{3\delta} \frac{dr}{r} = 18\pi \log 9.$$

4) Für $t \in R_4$ ist

$$|t| \geq |w_2| - \frac{|w_2|}{3} = \frac{2}{3}|w_2| \geq \frac{2}{3}|w_1|$$

und

$$|t - w_1| \geq |t - w_2| - |w_1 - w_2| = |t - w_2| - \delta \geq \frac{2}{3}|t - w_2|,$$

da hier $|t - w_2| \geq 3\delta$ ist. Es folgt also:

$$I_4 \leq \frac{9}{4} \int_{R_4} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t - w_2|^2} = \frac{9\pi}{2} \int_{3\delta}^{|w_2|/3} \frac{dr}{r} = \frac{9\pi}{2} \log \frac{|w_2|}{9\delta},$$

aber

$$\log \frac{|w_2|}{\delta} = \log |w_2| - \log \delta \leq -\log \delta = |\log \delta|,$$

da $|w_2| < 1$ und $\delta < 1$ ist.
5) Für $t \in R_5$ ist

$$|t - w_1| \geq \frac{1}{3}|w_2| - \delta \geq \frac{1}{3}|w_2| - \frac{|w_2|}{10} \gtrsim |w_2| \geq |w_1|,$$

und mit $|t - w_2| \geq |w_2|/3$ ist daher

$$I_5 \lesssim \frac{3}{|w_2|} \int_{R_5} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t|} < \frac{6\pi}{|w_2|} \int_{|w_2|/3}^{3|w_2|} dr = 16\pi.$$

6) Für $t \in R_6$ ist $|t - w_1| > |w_2| \geq |w_1|$ und

$$|t - w_2| \geq |t| - |w_2| \geq \frac{2}{3}|t|,$$

da $|t| > 3|w_2|$, also $|w_2| < |t|/3$ ist. Es folgt:

$$I_6 \leq \frac{3}{2} \int_{R_6} \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t|^2} = 3\pi \int_{3|w_2|}^{1} \frac{dr}{r} = -3\pi \log 3|w_2|.$$

Wegen $\delta \leq |w_2|/10$ ist aber

$$-\log |w_2| < -\log \delta = |\log \delta|.$$

□

Beenden wir also nun den Beweis von Satz 2.6.2:

Lemma 2.6.6. *In der Situation von Satz 2.6.2 seien P, Q Punkte in $V \subset\subset X$ mit $P = \varphi(w_1)$ und $Q = \varphi(w_2)$, also $|w_1|, |w_2| < 1/3$. Sei*

$$I(P,Q) := \int_\Delta \frac{1}{|t|} \left| \frac{w_1^k}{t - w_1} - \frac{w_2^k}{t - w_2} \right| dt \wedge d\bar{t}.$$

Dann ist $I(P,Q) \lesssim dist_X(P,Q)^\alpha$ für alle $\alpha < 1$.

Beweis. Wir werden $|w_1| \leq |w_2|$ annehmen. Zunächst ist nach Korollar 2.5.4

$$\begin{aligned} dist_V(P,Q) &\cong |P_1 - Q_1| = |w_1^k - w_2^k| = |k \int_{w_2}^{w_1} t^{k-1} dt| \\ &\gtrsim |w_1 - w_2||w_1|^{k-1}, \end{aligned} \tag{21}$$

falls P und Q im selben Zweig liegen. In diesem Fall überschreitet der Winkel zwischen w_1 und w_2 auch nicht den Wert π/k und es gilt ebenfalls

$$dist_V(P,Q) \cong |P_1 - Q_1| = |w_1^k - w_2^k| \geq |w_1 - w_2|^k \tag{22}$$

nach Lemma 2.6.3.
Nehmen wir nun zunächst an, P, Q liegen nicht im selben Zweig. Dann ist nach Korollar 2.5.4

$$dist_V(P,Q) \cong |P_1| + |Q_1| = |w_1|^k + |w_2|^k$$

und wir erhalten mit Lemma 2.6.4:

$$\begin{aligned} I(P,Q) &\leq |w_1|^k \int \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t||t - w_1|} + |w_2|^k \int \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t||t - w_2|} \\ &\lesssim |w_1|^k \log |w_1| + |w_2|^k |\log||w_2| \\ &\lesssim |w_1|^{k\alpha} + |w_2|^{k\alpha} \\ &\leq (|w_1|^k + |w_2|^k)^\alpha \\ &\cong dist_V(P,Q)^\alpha \end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt auch für den Fall, dass einer der beiden Punkte gleich 0 ist. Seien $P, Q \neq 0$ also ab sofort aus dem gleichen Zweig. Wir untersuchen jetzt den Fall $|w_1 - w_2| \geq |w_2|/10$. Hier ist wieder

$$\begin{aligned} I(P,Q) &\lesssim |w_1|^k |\log||w_1| + |w_2|^k |\log||w_2| \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

und mit (21) sowie $|w_1| \lesssim |w_1 - w_2|$, folgt

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim |w_1|^{k\alpha} \\ &\lesssim \left(|w_1 - w_2||w_1|^{k-1}\right)^\alpha \\ &\lesssim dist_V(P,Q)^\alpha. \end{aligned}$$

Nach (22) ist aber auch

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim |w_1 - w_2|^k |\log||w_1 - w_2| \\ &\lesssim |w_1 - w_2|^{k\alpha} \\ &\lesssim dist_V(P,Q)^\alpha. \end{aligned}$$

Nun müssen wir letztendlich noch den Fall $|w_1 - w_2| < |w_2|/10$ behandeln. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{w_1^k}{t-w_1} - \frac{w_2^k}{t-w_2} &= \frac{tw_1^k - w_1^k w_2 - tw_2^k + w_1 w_2^k}{(t-w_1)(t-w_2)} \\ &= \frac{w_1^k(w_1 - w_2) + (t-w_1)(w_1^k - w_2^k)}{(t-w_1)(t-w_2)} \end{aligned}$$

ist mit Lemma 2.6.4 und Lemma 2.6.5

$$\begin{aligned} I(P,Q) &\leq |w_1|^{k-1} \int \frac{|w_1||w_1 - w_2| dt \wedge d\bar{t}}{|t||t-w_1||t-w_2|} + |w_1^k - w_2^k| \int \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t||t-w_2|} \\ &\lesssim |w_1|^{k-1} |w_1 - w_2||\log||w_1 - w_2| + |w_1^k - w_2^k||\log||w_2| \\ &= I_3 + I_4, \end{aligned}$$

Nun folgt

$$I_3 \lesssim \left(|w_1|^{k-1}|w_1 - w_2|\right)^\alpha \lesssim dist_V(P,Q)^\alpha$$

wieder mit (21) und zu guter letzt bleibt wegen $|w_1| \leq |w_2|$ noch

$$\begin{aligned} I_4 &\cong dist_V(P,Q)^\alpha |w_1^k - w_2^k|^{1-\alpha} |\log||w_2| \\ &\leq dist_V(P,Q)^\alpha \left(|w_1^k| + |w_2^k|\right)^{1-\alpha} |\log||w_2| \\ &\leq dist_V(P,Q)^\alpha \left(2|w_2|^k\right)^{1-\alpha} |\log||w_2| \\ &\lesssim dist_V(P,Q)^\alpha. \end{aligned}$$

$\square$

2.7 Globale Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung

Wir wollen nun einen Lösungsoperator zu $\overline{\partial}$ für eine offene, relativ kompakte Teilmenge D des komplexen Raumes X konstruieren.
Im eindimensionalen Fall müssen wir dazu an D keine Zusatzbedingung stellen, da hier jede offene Menge streng pseudokonvex ist. In höheren Dimensionen muss vorausgesetzt werden, dass der Rand bD von D durch eine streng plurisubharmonische Funktion gegeben ist.

Theorem 2.7.1. *Sei X eine Steinsche komplexe Kurve mit isolierten Singularitäten und weiterhin $D \subset\subset X$ eine relativ kompakte, zusammenhängende, offene Teilmenge ohne Singularitäten auf dem Rand bD. Dann existiert zu gegebenem $\alpha \in (0,1)$ ein linearer Operator*

$$T : L^\infty_{(0,1)}(D \cap R) \to \Lambda_\alpha(D)$$

mit $\overline{\partial} T f = f$ für $f \in L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$ und es gilt

$$\|Tf\|_{\alpha,D} \leq C\|f\|_{\infty,D}$$

für eine Konstante $C > 0$, die unabhängig von f ist.

Der nun folgende Beweis ist so leider nicht auf höhere Dimensionen übertragbar, da wir dort keinen azyklischen Komplex als Auflösung der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ erhalten. Dafür kann aber Grauerts Beulenmethode zum Ausdehnen von Lösungen auf größere streng pseudokonvexe Gebiete verwendet werden.
Wir wollen zunächst die lokale Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung verwenden, um eine Parametrix zum Operator $\overline{\partial}$ zu definieren.
Wir bezeichnen mit $F_\alpha(D \cap R)$ den Definitionsbereich von $\overline{\partial}$ als Operator von $\Lambda_\alpha(D \cap R)$ nach $L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$. Das heißt $f \in F_\alpha(D \cap R)$, wenn $\overline{\partial} f$ im Sinne von Distributionen definiert und beschränkt ist.
Sei weiterhin $B_\alpha(D \cap R) := \overline{\partial} F_\alpha(D \cap R)$. Es gilt:

Lemma 2.7.2. *Sei $0 < \alpha < 1$. Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.7.1 gilt dann:*
(i) Es existiert ein stetiger linearer Operator T vom Banachraum $L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$ in den Banachraum $\Lambda_\alpha(D \cap R)$ mit $T(L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)) \subset F_\alpha(D \cap R)$ und $\overline{\partial} \circ T = id + K$, wobei K ein kompakter Operator ist.
(ii) $B_\alpha(D \cap R)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$ endlicher Kodimension.

Beweis. Wie bei der Konstruktion der Normen wählen wir einen regulären Atlas $\{U_\beta, \varphi_\beta\}$ und einen regulären Unteratlas $\{V_\beta, \psi_\beta\}$, $V_\beta \subset\subset U_\beta$, zu $\overline{D}$, wobei wir darauf achten, dass die offenen Mengen $\{U_\beta\}$ und $\{V_\beta\}$ den Anforderungen aus dem Beweis von Satz 2.6.2 gerecht werden.

Dann finden wir also für alle offenen Mengen V_β einen stetigen Lösungsoperator

$$T_\beta : L^\infty_{(0,1)}(R \cap V_\beta) \to \Lambda_\alpha(V_\beta)$$

mit $\overline{\partial} T_\beta \omega = \omega$ für alle $\omega \in L^\infty_{(0,1)}(V_\beta)$. Wählen wir nun eine Zerlegung der Eins $\{\lambda_\beta\}$ bezüglich $\{V_\beta\}$ und definieren:

$$T\omega := \sum_\beta \lambda_\beta T_\beta \omega \text{ für } \omega \in L^\infty_{(0,1)}(D \cap R).$$

Hierzu muss ω auf eine Umgebung von $\overline{D}$ mit 0 fortgesetzt werden. Für alle $\omega \in L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$ ist jetzt $T\omega \in F_\alpha(D \cap R)$ und

$$\overline{\partial} T\omega = \omega + \sum_\beta \overline{\partial}\lambda_\beta \wedge T_\beta \omega.$$

Nun ist der Operator $K := \sum_\beta \overline{\partial}\lambda_\beta \wedge T_\beta\omega$ ein beschränkter linearer Operator von $L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$ in sich. Wir wollen zeigen, dass K kompakt ist.
Sei also $\{\omega_\mu\}_\mu$ eine Folge in $\overline{K(B_1(0))}$. Dann ist $\{\omega_\mu\}$ eine Folge von Differentialformen in $L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$ mit Koeffizienten in $\Lambda_\alpha(D \cap R) = \Lambda_\alpha(\overline{D})$, deren α-Höldernorm gleichmäßig durch eine Konstante M beschränkt ist. M ist durch die T_β und λ_β bestimmt.
Damit sind die Koeffizientenfolgen in $C^0(\overline{D})$ beschränkt und gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli existiert also eine gleichmäßig konvergente Teilfolge von $\{\omega_\mu\}$ in $L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$ und genau das war zu zeigen.
Um Teil (ii) zu beweisen, bemerken wir, dass $id + K$ nun ein Fredholmoperator vom Index 0 ist, da dies für kompakte Störungen der Identität gilt [Al]. Somit wird $(id + K)(L^\infty_{(0,1)}(D \cap R))$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$ endlicher Kodimension. Es ist aber

$$\overline{\partial} \circ T = id + K$$

und $B_\alpha(D \cap R)$ enthält diesen Unterraum, so dass $B_\alpha(D \cap R)$ selbst auch endliche Kodimension in $L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$ hat. Weiterhin ist nun $B_\alpha(D \cap R)$ das Bild von $F_\alpha(D \cap R)$ unter dem abgeschlossenen Operator $\overline{\partial}$, so dass $B_\alpha(D \cap R)$ auch abgeschlossen ist. Das folgt aus dem nächsten Lemma 2.7.3.
Wir zeigen noch, dass $\overline{\partial}$ tatsächlich abgeschlossen ist. Sei dazu $\{f_k\} \subset \Lambda_\alpha(D)$ eine Cauchy-Folge mit Grenzwert f, so dass $\overline{\partial} f_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert. Dann gilt

$$\left| \int f_k \overline{\partial}\chi - \int f \overline{\partial}\chi \right| = \left| \int (f_k - f)\overline{\partial}\chi \right| \leq \|f_k - f\|_{L^\infty} \|\overline{\partial}\chi\|_{L^1},$$

für eine beliebige Testfunktion $\chi \in C^\infty_0(D)$. $\square$

Die beiden folgenden Aussagen wollen wir nur zitieren, sie finden sich zum Beispiel in dem Buch von Henkin und Leiterer über komplexe Mannigfaltigkeiten [HeLe], S.211.

Lemma 2.7.3. *Sei A ein abgeschlossener Operator zwischen Banachräumen E und F mit Definitionsbereich $D(A) \subset E$. Falls $A(D(A))$ in F endliche Kodimension besitzt, so ist $A(D(A))$ ein topologisch abgeschlossener Unterraum von F.*

Lemma 2.7.4. *Sei A ein abgeschlossener linearer Operator zwischen Banachräumen E und F mit Definitionsbereich $D(A)$. Wir nehmen an, die folgenden Bedingungen seien erfüllt:*
(i) A(D(A))=F.
(ii) Es existiert ein beschränkter linearer Operator $B : F \to E$ mit $B(F) \subset D(A)$, so dass $id - AB$ kompakt ist.
Dann existiert ein beschränkter linearer Operator $A^{-1} : F \to E$, so dass $A^{-1} \subset D(A)$ ist und $AA^{-1} = id$ gilt.

Um den Beweis von Theorem 2.7.1 abzuschließen, bleibt also nach Lemma 2.7.4 nur noch $\overline{\partial} F_\alpha(D \cap R) = L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$ zu zeigen. Dazu werden wir die Kohomologie von Garben verwenden. Wir lehnen uns hier an Wells Buch über Komplexe Mannigfaltigkeiten an [We]. Dort findet sich eine schöne Einführung zum Thema im Hinblick auf die Anwendung in der komplexen Analysis.
Dann werden wir auf die kohomologische Charakterisierung steinscher Räume zurückgreifen und ausnutzen, dass eben X steinsch ist.

Satz 2.7.5. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.7.1 gilt $\overline{\partial} F_\alpha(D \cap R) = L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$ für alle $0 < \alpha < 1$.*

Beweis. Wir erinnern daran, dass die Konstruktion der Supremumsnorm für Differentialformen diese auf der Mannigfaltigkeit $U \cap R$ mit

$$\overline{D} \subset U = \bigcup U'_\alpha \subset\subset X$$

geliefert hat (vgl. Abschnitt 2.3), während die α-Höldernorm für Funktionen sogar auf ganz U definiert ist. Weiterhin kann angenommen werden, dass $\overline{U} \setminus D$ keine Singularitäten enthält, wenn man U gegebenenfalls etwas verkleinert, da bD keine Singularitäten enthält.
Bezeichnen wir nun mit $\mathcal{O}$ die Garbe der Keime der holomorphen Funktionen auf U, mit $\mathcal{F}^\alpha$ die Garbe der Keime der lokal α-hölderstetigen Funktionen auf U, für die $\overline{\partial}$ im Distributionssinne definiert und lokal beschränkt ist, und letztlich mit $\mathcal{L}^\infty$ die Garbe der Keime der lokal beschränkten $(0,1)$-Formen auf $U \cap R$, die für alle Punkte $p \in U$, also auch in Nähe der Singularitäten, lokal beschränkt sind. Nun betrachten wir die Einbettung $\iota : U \cap R \hookrightarrow U$ und setzen $\mathcal{L}^\infty$ fort zur Bildgarbe $\iota_* \mathcal{L}^\infty$ auf ganz U:

$$\iota_* \mathcal{L}^\infty(V) = \mathcal{L}^\infty(\iota^{-1}(V)) = \mathcal{L}^\infty(V \cap R).$$

Damit erhalten wir eine kurze Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^\alpha \xrightarrow{\overline{\partial}} \iota_*\mathcal{L}^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} 0,$$

die nach Satz 2.6.2 exakt ist. Nun existiert auf U aber eine Zerlegung der Eins, so dass die Garben $\mathcal{F}^\alpha$ und $\iota_*\mathcal{L}^\infty$ weiche Garben sind, und die kurze exakte Sequenz stellt eine azyklische Auflösung dar. Damit gilt nach dem abstrakten Theorem von de Rham:

$$0 = H^1(U, \mathcal{O}) = \frac{\iota_*\mathcal{L}^\infty(U)}{\overline{\partial}\mathcal{F}^\alpha(U)} = \frac{\mathcal{L}^\infty(U \cap R)}{\overline{\partial}\mathcal{F}^\alpha(U)}, \tag{23}$$

da $U \subset\subset X$ als offene Teilmenge eines eindimensionalen steinschen Raumes ohne Singularitäten im Rand selbst wieder steinsch ist.
Das sehen wir folgendermaßen: Sei $p \in bU$ ein Punkt im topologischen Rand von U. Dann ist p ein regulärer Punkt und es existiert in einer kleinen Umgebung U_1 von p die holomorphe Funktion $f_1(z) := \frac{1}{z-p}$. Sei weiterhin U_2 eine Umgebung von $\overline{X \setminus U_1}$, $f_2 \equiv 0$ eine holomorphe Funktion auf U_2. Wir haben also eine Cousin-I-Verteilung erhalten, die für Steinsche Räume lösbar ist, so dass also eine Funktion $h \in \mathcal{O}(X \setminus \{p\})$ existiert mit einem Pol bei p. Damit ist U holomorph konvex und somit auch wieder Steinsch, da etwa Ausbreitungsaxiom und Endlichkeitsaxiom für offene Teilmengen Steinscher Räume wieder erfüllt sind. Für die kohärente analytische Garbe $\mathcal{O}$ auf U ergibt sich nach Theorem B also $H^1(U, \mathcal{O}) = 0$.
Sei also $\omega \in L^\infty_{(0,1)}(D \cap R)$. Dann existiert eine Fortsetzung (beispielsweise durch 0) zu einer Form $\Omega \in L^\infty_{(0,1)}(U \cap R)$ mit $\|\Omega\|_\infty = \|\omega\|_\infty$, da $U \setminus D$ keine Singularitäten enthält.
Dazu finden wir wegen (23) eine lokal α-hölderstetige Funktion $f \in \mathcal{F}^\alpha(U)$ mit $\overline{\partial} f = \Omega$ auf $U \cap R$, sowie $\overline{\partial} f|_{D\cap R} = \Omega|_{D\cap R} = \omega$ auf $D \cap R$.
Da aber D in U relativ kompakt liegt, ist $f|_D$ auf D α-hölderstetig, also $f|_{D\cap R} \in F_\alpha(D \cap R)$ wie gewünscht. $\square$

Literatur

[Al] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Ca] H. Cartan, Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, *Bull. Soc. Math. Fr.* **85** (1957), 77–99.

[Ch] E. M. Chirca, *Complex Analytic Sets*, (Mathematics and Its Applications, Soviet Series), Kluwer Academic Publishers, 1989.

[FoGa] J. E. Fornæss, E. A. Gavosto, The Cauchy Riemann Equation on Singular Spaces, *Duke Math. J.* **93** (1998), 453–477.

[Gr1] H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, *Math. Ann.* **146** (1962), 331–368.

[Gr2] H. Grauert, Deformationen von Singularitäten komplexer Räume, *Math. Ann.* **153** (1964), 236–260.

[GrRe] H. Grauert, R. Remmert, *Coherent Analytic Sheaves*, (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 265), Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1984.

[Gro] A. Grothendieck, *Eléments de Géométrie Algébrique* **4**.

[GuRo] R. C. Gunning, H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, (Prentice-Hall Series in Modern Analysis), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[HeLe] G. M. Henkin, J. Leiterer, *Theory of Functions on Complex Manifolds*, Monogr. Math **79**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[HePo] G. M. Henkin, P. Polyakov, The Grothendieck-Dolbeault lemma for complete intersections, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **308** (1989), 405–409.

[Ka] J.-M. Kantor, Le complexe de Dolbeault-Grothendieck sur les espaces analytiques, *Séminaire Pierre Lelong* **474** (1973/74), Springer-Verlag, Heidelberg/Berlin, 1975.

[Ma1] B. Malgrange, Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques, *Bull. Soc. Math. Fr.* **91** (1963), 113–127.

[Ma2] B. Malgrange, *Ideals of Differentiable Functions*, Oxford University Press, 1966.

[Mi] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, (Annals of Mathematics Studies 61), Princeton Univ. Press, 1968.

[Na] R. Narasimhan, *Introduction to the Theory of Analytic Spaces*, (Lecture Notes in Mathematics 25), Springer-Verlag, Heidelberg/Berlin, 1966.

[Ra] R. M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, (Graduate Texts in Mathematics, Bd. 108), Springer-Verlag, New York, 1986.

[Rei] H.-J. Reiffen, Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen, *Math. Zeitschriften* **101** (1967), 269–284.

[St1] J. Stutz, Analytic sets as branched coverings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **166** (1972), 241–259.

[St2] J. Stutz, Equisingularity and local analytic geometry, *Proc. Symp. Pure Math.* **30** (1979), Amer. Math. Soc., 77–84.

[We] R. O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, (Graduate Texts in Mathematics, Bd. 65), Springer-Verlag, New York, 1980.

[Wh] H. Whitney, Local Properties of analytic varieties, *Diff. and Combinator. Topology*, Princeton Univ. Press, 1965, 205–244.