Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn

Wuppertal, 30.06.2016

Topologie I (SS 2016)

Übungsblatt 11

Wie definieren die **lokale Homologie** eines topologischen Raumes X in einem Punkt $x \in X$ als die Homologiegruppen $H_n(X, X \setminus \{x\})$. Nach dem Ausschneidungsaxiom ist

$$H_n(X, X \setminus \{x\}) \;\cong\; H_n(U, U \setminus \{x\})$$

für jede offene Umgebung U von x (siehe Blatt 10, Aufgabe 4). Damit hängt die lokale Homologie in einem Punkt x tatsächlich nur von der Topologie von X in der Nähe von x ab.

Aufgabe 1.

Wir betrachten die Inklusion

$$f : (D^n, S^{n-1}) \;\hookrightarrow\; (D^n, D^n \setminus \{0\}).$$

Zeigen Sie, dass f keine Homotopieäquivalenz von Paaren ist, d.h. es existiert keine Abbildung

$$g : (D^n, D^n \setminus \{0\}) \;\to\; (D^n, S^{n-1}),$$

so dass $f \circ g$ und $g \circ f$ durch Abbildungen von Paaren homotopieäquivalent zur Identität sind.

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, dass die baryzentrische Unterteilung des Standard-n-Simplex durch n Ungleichungen $t_{i_0} \leq t_{i_1} \leq \cdots \leq t_{i_n}$ in baryzentrischen Koordinaten gegeben ist. Dabei ist $(i_0, ..., i_n)$ eine Permutation von $(0, ..., n)$.

Aufgabe 3.

X sei der Kegel über dem 1-Skelett von Δ^3, d.h. X ist die Vereinigung aller Liniensegmente, die Punkte in den 6 Kanten von Δ^3 mit dem Baryzentrum von Δ^3 verbinden. Berechnen Sie die lokalen Homologiegruppen $H_n(X, X \setminus \{x\})$ für alle $x \in X$. ∂X sei der Unterraum der Punkte x aus X, für die $H_n(X, X \setminus \{x\}) = 0$ für alle n ist. Berechnen Sie auch die lokalen Homologiegruppen $H_n(\partial X, \partial X \setminus \{x\})$. Verwenden Sie diese Berechnungen, um zu bestimmen, welche Teilmengen $A \subset X$ die Eigenschaft haben, dass $f(A) \subset A$ für alle Homöomorphismen $f : X \to X$ gilt.

Bitte wenden.

Aufgabe 4.

Für ein Paar von topologischen Räumen (X, A) sei CA der Kegel über A und $X \cup CA$ die Vereinigung von X mit dem Kegel CA, der an A angeheftet wird.

a) Zeigen Sie, dass X genau dann ein Retrakt von $X \cup CA$ ist, falls A in X kontrahierbar ist, d.h. falls eine Homotopie $f_t : A \to X$ existiert, so dass f_0 die Inklusion $A \hookrightarrow X$ ist und f_1 eine konstante Abbildung.

b) Zeigen Sie: Ist A in X kontrahierbar, so gilt:

$$H_n(X, A) \quad \cong \quad \widetilde{H}_n(X) \oplus \widetilde{H}_{n-1}(A).$$

Verwenden Sie dazu, dass $(X \cup CA)/X$ die Suspension SA von A ergibt.

Abgabe in der Vorlesung am 07.07.2016.