Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn

Wuppertal, 16.06.2016

Topologie I (SS 2016)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1.

Der Unterraum $A \subset X$ sei ein Retrakt von X. Zeigen Sie, dass die von der Inklusion $A \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung $H_k(A) \to H_k(X)$ für alle k injektiv ist.

Aufgabe 2.

a) Wir betrachten eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} E$$

Zeigen Sie, dass $C = 0$ genau dann gilt, wenn α surjektiv und δ injektiv ist.

b) Betrachten Sie nun die relative Homologie eines Paares (X, A) und folgern Sie, dass $H_k(A) \cong H_k(X)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $H_n(X, A) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

c) Sei $\emptyset \neq A \subset X$ ein azyklischer Unterraum. Zeigen Sie, dass $H_*(X, A) \cong \tilde{H}_*(X)$.

Aufgabe 3.

Wir betrachten wieder ein Paar topologischer Räume $A \subset X$.

a) Zeigen Sie, dass $H_0(X, A) = 0$ genau dann gilt, wenn A alle Wegzusammenhangskomponenten von X schneidet.

b) Zeigen Sie, dass $H_1(X, A) = 0$ genau dann gilt, wenn die von der Inklusion $A \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung $H_1(A) \to H_1(X)$ surjektiv ist und jede Wegzusammenhangskomponente von X höchstens eine Wegzusammenhangskomponente von A enthält.

Aufgabe 4.

Die Multiplikation mit einer Primzahl p liefert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p \to 0.$$

Verwenden Sie diese, um die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \frac{H_n(X)}{pH_n(X)} \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow \ker\left\{p : H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X)\right\} \to 0$$

abzuleiten, und zeigen Sie, dass diese Sequenz spaltet.

Abgabe in der Vorlesung am 23.06.2016.