Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Dipl. Math. S. Stahn

Topologie I (SS 2016) Übungsblatt 6

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie die Homologie der folgenden Kettenkomplexe:

a) ...
$$\xrightarrow{0} C_{i+2} \xrightarrow{0} C_{i+1} \xrightarrow{0} C_i \xrightarrow{0} C_{i-1} \xrightarrow{0} C_{i+2} \xrightarrow{0} ...$$

b) ...
$$M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} ...$$

c) ...
$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/6 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}/6 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \dots$$

d) ...
$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \stackrel{\cdot 2}{\longrightarrow} \mathbb{Z} \stackrel{\mu}{\longrightarrow} \mathbb{Z}/4 \stackrel{p}{\longrightarrow} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \dots$$

Dabei sei p die Projektion modulo 2 und $\mu = i \circ \pi$, wobei $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$ die Projektion modulo 2 und $i : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/4$ die Inklusion ist.

Aufgabe 2. (Schlangendiagramm I)

Wir betrachten das folgende kommutative exakte Schlangendiagramm von R-Moduln:

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

$$\downarrow d' \downarrow \qquad \downarrow d' \downarrow \qquad \downarrow d'' \downarrow$$

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$$

Zeigen Sie, dass

$$\delta : \ker(d'') \to \operatorname{coker}(d')$$

$$m \mapsto \left[f^{-1} \circ d \circ g^{-1}(m) \right]$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

Aufgabe 3. (Schlangendiagramm II)

Man betrachte das Schlangendiagramm und die Abbildung δ aus Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$\ker(d') \stackrel{f}{\longrightarrow} \ker(d) \stackrel{g}{\longrightarrow} \ker(d'') \stackrel{\delta}{\longrightarrow} \operatorname{coker}(d') \stackrel{f}{\longrightarrow} \operatorname{coker}(d) \stackrel{g}{\longrightarrow} \operatorname{coker}(d'')$$

Bitte wenden.

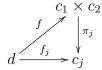
Aufgabe 4. (Additive Kategorien)

Ein Objekt c in einer Kategorie C heißt initial (bzw. final), wenn es zu jedem anderen Objekt d aus C genau einen Morphismus von c nach d (bzw. von d nach c) gibt. Es heißt Nullobjekt, falls es sowohl initial als auch final ist.

a) Geben Sie, soweit vorhanden, initiale, finale und Nullobjekte in der Kategorie der topologischen Räume **Top** und in der Kategorie der abelschen Gruppen **Ab** an.

Eine Kategorie C heißt additiv, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i. Es gibt ein Nullobjekt.
- ii. Zu je zwei Objekten $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ gibt es ein Produkt $c_1 \times c_2$, d.h. es existiert ein Objekt $c_1 \times c_2 \in \mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $\pi_j : c_1 \times c_2 \to c_j$, j = 1, 2, Projektionen genannt, so dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Für jedes Objekt $d \in \mathcal{C}$ und Morphismen $f_1 : d \to c_1$ und $f_2 : d \to c_2$ gibt es genau einen Morphismus $f : d \to c_1 \times c_2$ so dass $f_j = \pi_j \circ f$, j = 1, 2, i.e. das Diagramm



ist kommutativ.

- iii. Die Hom-Mengen sind abelsche Gruppen, d.h. für alle $c, d \in \mathcal{C}$ ist $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ eine abelsche Gruppe.
- iv. Die Komposition von Morphismen ist bilinear, d.h. für alle $c, d, e \in \mathcal{C}$ und alle $f, f_1, f_2 \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ und $g, g_1, g_2 \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(d, e)$ ist:

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2,$$

 $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f.$

b) Zeigen Sie, dass R-Mod eine additive Kategorie ist. Machen Sie sich klar, dass damit insbesondere Ab eine additive Kategorie ist, da $Ab = \mathbb{Z}$ -Mod.