Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn

Wuppertal, 12.05.2016

Topologie I (SS 2016)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1.

Eine Gruppenoperation $\rho : G \to X$ auf einem topologischen Raum X heißt *frei*, falls die Operation keine Fixpunkte besitzt. Dabei verstehen wir unter einem Fixpunkt einen Punkt $x \in X$, so dass $g(x) = x$ für ein nichttriviales Element $g \in G$.

Es sei $\rho : G \to X$ eine freie Gruppenoperation auf einem Hausdorff-Raum X, so dass für alle $x \in X$ eine Umgebung $U_x \subset X$ existiert, so dass $\{g \in G : g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset\}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass dann G schon eigentlich diskontinuierlich im Sinne der Vorlesung auf X operiert, d.h. für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung $U_x \subset X$, so dass $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ nur für die Identität $g = e \in G$.

Aufgabe 2.

Die Gruppe G operiere eigentlich diskontinuierlich auf einem wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängendem Raum X. Jede Untergruppe $H \subset G$ liefert dann eine Komposition von Überlagerungen $X \to X/H \to X/G$. Zeigen Sie:

a) Jede wegzusammenhängende Überlagerung zwischen X und X/G ist isomorph zu X/H für eine Untergruppe $H \subset G$.

b) Zwei solcher Überlagerungen X/H_1 und X/H_2 von X/G sind genau dann isomorph, wenn H_1 und H_2 konjugierte Untergruppen von G sind.

c) Die Überlagerung $X/H \to X/G$ ist genau dann normal, wenn H eine normale Untergruppe von G ist. In diesem Fall ist G/H isomorph zur Gruppe der Decktransformationen dieser Überlagerung.

Aufgabe 3.

a) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ die Vereinigung konvexer offener Mengen $X_1, ..., X_m \subset \mathbb{R}^n$, so dass $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$ für alle i, j, k. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist.

b) Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ die Vereinigung von n Geraden durch den Ursprung. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$.

Aufgabe 4.

Sei X der Raum, den man aus zwei Kopien des Torus $S^1 \times S^1$ erhält, indem man einen Kreis $S^1 \times \{x_0\}$ in einem Torus mit dem entsprechenden Kreis $S^1 \times \{x_0\}$ in dem anderen Torus identifiziert. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von X.

Abgabe in der Vorlesung am 24.05.2016.