Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl. Math. S. Stahn

Wuppertal, 28.04.2016

Topologie I (SS 2016)

Übungsblatt 3

Es sei eine Familie $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von beliebigen Gruppen gegeben. Dann besteht das *freie Produkt* $*_\alpha G_\alpha$ aus der Menge aller endlichen Wörter $g_1 \cdots g_k$, $k \geq 0$, wobei folgende Konventionen gelten sollen:

i. Jedes g_j gehört zu einer Gruppe G_{α_j} und ist darin nicht das Einheitselement.

ii. Aufeinanderfolgende g_j und g_{j+1} gehören zu unterschiedlichen Gruppen, d.h. $\alpha_j \neq \alpha_{j+1}$.

Wörter, die diese Bedingungen erfüllen, heißen *reduziert*. Nicht-reduzierte Wörter können zu reduzierten vereinfacht werden, indem wir triviale Buchstaben entfernen und benachbarte Buchstaben aus der selben Gruppe durch die entsprechende Gruppenregel verknüpfen. Das leere Wort ist erlaubt und definiert das Einheitselement in $*_\alpha G_\alpha$. Als Gruppenoperation in $*_\alpha G_\alpha$ definieren wir die Hintereinanderschaltung $(g_1 \cdots g_k)(h_1 \cdots h_m) := g_1 \cdots g_k h_1 \cdots h_m$, gefolgt von der Vereinfachung zu einem reduzierten Wort. Damit ist $*_\alpha G_\alpha$ wieder eine Gruppe.

Aufgabe 1.

Unter dem Wedge-Produkt $X \vee Y$ zweier punktierter topologischer Räume X und Y verstehen wir ihre disjunkte Vereinigung, die an einem Punkt, dem Basispunkt, verklebt ist.

a) Sei $x_0 \in S^1 \vee S^1$ der Basispunkt, in dem die beiden Kopien von S^1 verklebt sind. Zeigen Sie: $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

b) Finden Sie eine zweifache und eine dreifache zusammenhängende Überlagerung $p : (E, e) \to (S^1 \vee S^1, x_0)$, und geben Sie jeweils $p_* \pi_1(E, e)$ an.

c) Seien a und b die Generatoren von $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$, die den beiden Komponenten entsprechen. Finden Sie eine Überlagerungen $p : (E, e) \to (S^1 \vee S^1, x_0)$, so dass $p_* \pi_1(E, e)$ die Untergruppe von $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ist, die von a^2, b^2 und $(ab)^4$ erzeugt wird.

Aufgabe 2.

Die reelle projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ entsteht als Quotientenraum aus S^2, in dem wir gegenüberliegende Punkte identifizieren, d.h. $\mathbb{RP}^2 := S^2/\sim$ mit der Äquivalenzrelation $x \sim y$ falls $y = -x$. Zeigen Sie:

a) Die Quotientenabbildung $\pi : S^2 \to \mathbb{RP}^2$ ist eine zweifache Überlagerung.

b) Die Fundamentalgruppe von $\mathbb{RP}^2$ ist $\mathbb{Z}_2$.

c) Die Fundamentalgruppe von $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$ ist $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

d) Finden Sie alle zusammenhängenden Überlagerungen von $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$.

Aufgabe 3.

Es sei $p : E \to B$ eine Überlagerung, $A \subset B$ ein Unterraum, $\tilde{A} := p^{-1}(A)$ und $q := p|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \to A$ die Einschränkung von p auf $\tilde{A}$. Zeigen Sie, dass $q : \tilde{A} \to A$ wieder eine Überlagerung ist.

Aufgabe 4.

Es sei $p : E \to B$ eine einfach zusammenhängende Überlagerung von B, $A \subset B$ wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und $\tilde{A}$ eine Wegzusammenhangskomponente von $p^{-1}(A)$. Zeigen Sie, dass $p|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \to A$ eine Überlagerung ist, die als Untergruppe von $\pi_1(A)$ dem Kern von $\pi_1(A) \to \pi_1(B)$ entspricht.

Abgabe in der Übung am 06.05.2016.