Prof. Dr. J. Ruppenthal
S. Tilson, Ph.D.

Wuppertal, 14.01.2019

Einführung in die Topologie (WS 2018/19)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie: der Unterraum $X := S^1 \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\}$ von $\mathbb{R}^2$ ist homotopieäquivalent zu S^1.

(b) Bezeichnet $[x_0 : x_1 : ... : x_n]$ die Äquivalenzklasse von $(x_0, x_1, ..., x_n) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ im reell projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$, so definiert

$$i([x_0 : x_1 : ... : x_n]) := [x_0 : x_1 : ... : x_n : 0]$$

eine kanonische Inklusion von $\mathbb{RP}^n$ in $\mathbb{RP}^{n+1}$. Zeigen Sie: $\mathbb{RP}^{n+1} \setminus \{z\}$ ist homotopieäquivalent zu $i(\mathbb{RP}^n)$ für jeden Punkt $z \in \mathbb{RP}^{n+1}$. (Bedenken Sie dabei, dass es reicht, die Aussage für einen günstig gewählten Punkt z zu zeigen.)

Aufgabe 2.
Für jeden topologischen Raum X und $I = [0,1]$ ist

$$ZX \ := \ X \times I$$

der *Zylinder über* X und

$$CX \ := \ ZX/X \times \{1\}$$

der *Kegel über* X. Zeigen Sie, dass X ein starker Deformationsretrakt von ZX ist (also insbesondere $ZX \simeq X$) und dass CX zusammenziehbar ist.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass $O(n)$ ein starker Deformationsretrakt von $GL_n(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4.
Sei $I^2 = I \times I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ und $f : \partial I^2 \to X$ eine stetige Abbildung. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist zu einer stetigen Abbildung $I^2 \to X$ fortsetzbar.

(b) f ist nullhomotop.

(c) Es gibt eine punktierte Homotopie von punktierten Abbildungen $(I, \partial I) \to \big(X, f(0,0), f(1,1)\big)$ zwischen den Abbildungen

$$s \mapsto \begin{cases} f(2s, 0) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ f(1, 2s-1) & , \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} \quad \text{und} \quad s \mapsto \begin{cases} f(0, 2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ f(2s-1, 1) & , \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Abgabe in der Vorlesung am 21.01.2019.