Prof. Dr. J. Ruppenthal
S. Tilson, Ph.D.

Wuppertal, 07.01.2019

Einführung in die Topologie (WS 2018/19)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1.
Es sei G eine kompakte Gruppe, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe und X ein topologischer G-Raum. Zeigen Sie, dass $\underline{\mathrm{Hom}}_G(G/H, X)$ zum H-Fixpunktraum X^H homöomorph ist.

Aufgabe 2.
Es sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ die obere komplexe Halbebene. Die Gruppe $G = SL_2(\mathbb{R})$ operiert auf $\mathbb{H}$ durch

$$\nu\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Zeigen Sie:

(a) ν ist eine G-Operation, also stetig.

(b) ν ist eigentlich.

(c) ν ist transitiv.

(d) $\mathbb{H} \cong SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$

Aufgabe 3.
Sei $f : S^1 \to X$ stetig. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) f ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

(b) f lässt sich zu einer stetigen Abbildung $F : D^2 \to X$ auf die Kreisscheibe D^2 fortsetzen mit $F|_{S^1} = f$.

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie die Gleichheit $\pi_0(-) = [\star, -]$ als Funktoren $\underline{Top} \longrightarrow \underline{Sets}$, wobei $\star$ den Einpunktraum bezeichnet.

(b) Sind $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop, so ist

$$\pi_0(f) = \pi_0(g) : \ \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y).$$

Abgabe in der Vorlesung am 14.01.2019.