Prof. Dr. J. Ruppenthal
S. Tilson, Ph.D.

Wuppertal, 26.11.2018

Einführung in die Topologie (WS 2018/19)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1.
Für einen topologischen Hausdorff-Raum X und einen weiteren Punkt $\infty \notin X$ sei $X^+ := X \cup \{\infty\}$. Eine Teilmenge $U \subset X^+$ sei offen, wenn $U \subset X$ offen in X ist, oder falls $\infty \in U$ und $X^+ \setminus U$ kompakter abgeschlossener Unterraum von X ist. Zeigen Sie, dass dies eine Topologie auf X^+ definiert, der topologische Raum X^+ kompakt ist, und $X \hookrightarrow X^+$ eine stetige Einbettung ist.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass keine der folgenden vier Räume homöomorph sind:

$$S^1 \quad , \quad [-1,1]^2 \quad , \quad \mathbb{R} \quad , \quad \mathbb{R}^2$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

(a) $U \times V$ ist offen in $X \times Y \Leftrightarrow U$ ist offen in X und V ist offen in Y.

(b) $U \times V$ ist abgeschlossen in $X \times Y \Leftrightarrow U$ ist abgeschlossen in X und V ist abgeschlossen in Y.

(c) $U \times V$ ist kompakt in $X \times Y \Leftrightarrow U$ ist kompakt in X und V ist kompakt in Y.

Aufgabe 4. Sei X topologischer Raum und $K, L \subset X$ kompakte Teilmengen.

(a) Zeigen Sie, dass $K \cup L$ wieder kompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass $K \cap L$ wieder kompakt ist, wenn X zusätzlich Hausdorff ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Bedingung "Hausdorff" in (b) notwendig ist, indem Sie folgendes Beispiel betrachten:

Es sei $X = [-1, 1]$ und $\sim$ folgende Äquivalenzrelation:

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \pm x & , \text{ für } x \neq \pm 1, \\ y = x & , \text{ für } x = \pm 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) Der Quotientenraum $X/_\sim$ erfüllt (T1) aber nicht (T2) und ist kompakt.

(ii) Die kanonische Projektion $\pi : X \to X/_\sim$ ist offen.

(iii) $\pi(1)$ und $\pi(-1)$ besitzen kompakte Umgebungen, die in $X/_\sim$ nicht abgeschlossen sind. Der Durchschnitt einer kompakten Umgebung von $\pi(1)$ und einer kompakten Umgebung von $\pi(-1)$ ist nicht kompakt.

Abgabe in der Vorlesung am 03.12.2018.