Prof. Dr. J. Ruppenthal
Sean Tilson, Ph.D.

Wuppertal, 05.11.2018

Einführung in die Topologie (WS 2018/19)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1.

(a) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Vergleichen Sie auf $X \times Y$ die von der Metrik d_{max} (aus Blatt 4, Aufgabe 1) induzierte Topologie mit der Produkttopologie der beiden topologischen Räume X und Y.

(b) Zeigen Sie, dass die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Topologie übereinstimmt.

(*Hinweis: Diese Aussage lässt sich zwar direkt beweisen, für eine kurze Lösung kombiniere man aber Teil (a) mit Aufgabe 3 von Blatt 1.*)

Aufgabe 2.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $\emptyset \neq A \subset X$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt genau dann $x \in \overline{A}$, wenn es eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ gibt, die gegen x konvergiert.

(b) $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ ist genau dann in $x \in X$ stetig, wenn für jede gegen x konvergierende Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge $\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

(c) Gelten obige Aussagen auch in topologischen Räumen? Dabei heißt eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum konvergent gegen x, falls für jede Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

Aufgabe 3.

Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. $R_X \subset X \times X$ und $R_Y \subset Y \times Y$ seien Äquivalenzrelationen auf X und Y, so dass

$$\big(x, x'\big) \in R_X \quad \Longrightarrow \quad \big(f(x), f(x')\big) \in R_Y.$$

Zeigen Sie: Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\overline{f} : X/R_X \longrightarrow Y/R_Y$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X/R_X \arrow[r, "\overline{f}"] & Y/R_Y \end{tikzcd}$$

Bitte wenden.

Aufgabe 4.
Gegeben seien topologische Räume X, Y und eine Abbildung $f : X \to Y$. Das Produkt $X \times Y$ sei mit der Produkttopologie versehen. Der Graph von f,

$$\Gamma_f \quad = \quad \big\{\big(x, f(x)\big) \in X \times Y : x \in X\big\},$$

trage die Unterraumtopologie in $X \times Y$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn die Abbildung $x \mapsto \big(x, f(x)\big)$ eine Einbettung ist.

Abgabe in der Vorlesung am 12.11.2018.