Prof. Dr. J. Ruppenthal
Sean Tilson, Ph.D.

Wuppertal, 29.10.2018

Einführung in die Topologie (WS 2018/19)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1.
Seien (X, d_X), (Y, d_Y) und für jedes $j \in J$ aus einer beliebigen Indexmenge J jeweils (X_j, d_j) metrische Räume.

(a) Ist jede Untermenge $U \subset X$ mit der induzierten Metrik

$$d_U : U \times U \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto d_X(x, y),$$

wieder ein metrischer Raum?

(b) Ist das Produkt $X \times Y$ versehen mit der Abbildung $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ ein metrischer Raum, wobei

(i) $d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$ ist?

(ii) $d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$ ist?

(c) Ist das unendliche kartesische Produkt $\prod_{j \in J} X_j$ versehen mit

$$d\big((x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J}\big) \;=\; \sup_{j \in J} \big\{d_j(x_j, y_j)\big\}$$

ein metrischer Raum? Spielt es dabei eine Rolle, ob J abzählbar ist?

Aufgabe 2.
Für jede Menge X ist die Klumpentopologie gegeben als $\tau_{Kl} := \{\emptyset, X\}$. Überprüfen Sie, ob die Zuordnung $X \mapsto (X, \tau_{Kl})$ sich auf sinnvolle Weise zu einem Funktor $Kl : \underline{Set} \longrightarrow \underline{Top}$ fortsetzen lässt.

Aufgabe 3.
Seien M_1 und M_2 Mengen. Zeigen Sie die universelle Eigenschaft für das kartesische Produkt $M_1 \times M_2$: Für jede Menge T und alle Abbildungen $f_1 : T \longrightarrow M_1$ und $f_2 : T \longrightarrow M_2$ gibt es genau eine Abbildung $f : T \longrightarrow M_1 \times M_2$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & & M_1 \\
T \arrow[urr, "f_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "f_2"'] & M_1 \times M_2 \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
 & & M_2
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnen $p_i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$, $i = 1, 2$, die Projektionen.

Bitte wenden.

Aufgabe 4.

(a) Wir betrachten den topologischen Raum $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie und die Teilmenge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit der induzierten Teilraumtopologie. Zeigen Sie, dass die Menge $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ offen ist, aber nicht in $\mathbb{R}$.

(b) Es sei $X = A \cup B$ ein topologischer Raum, wobei A und B abgeschlossen sind, und $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Die Einschränkungen $f|_A : A \longrightarrow Y$ und $f|_B : B \longrightarrow Y$ seien stetig bzgl. der induzierten Teilraumtopologien auf A, B. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Abgabe in der Vorlesung am 05.11.2018.