

## Einführung in die Topologie (WS 2018/19)

### Übungsblatt 4

#### Aufgabe 1.

Seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  und für jedes  $j \in J$  aus einer beliebigen Indexmenge  $J$  jeweils  $(X_j, d_j)$  metrische Räume.

- (a) Ist jede Untermenge  $U \subset X$  mit der induzierten Metrik

$$d_U : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d_X(x, y),$$

wieder ein metrischer Raum?

- (b) Ist das Produkt  $X \times Y$  versehen mit der Abbildung  $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$  ein metrischer Raum, wobei

(i)  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$  ist?

(ii)  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$  ist?

- (c) Ist das unendliche kartesische Produkt  $\prod_{j \in J} X_j$  versehen mit

$$d((x_j)_{j \in J}, (y_j)_{j \in J}) = \sup_{j \in J} \{d_j(x_j, y_j)\}$$

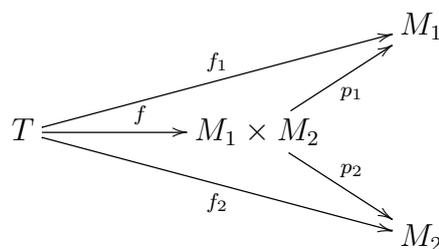
ein metrischer Raum? Spielt es dabei eine Rolle, ob  $J$  abzählbar ist?

#### Aufgabe 2.

Für jede Menge  $X$  ist die Klumpentopologie gegeben als  $\tau_{Kl} := \{\emptyset, X\}$ . Überprüfen Sie, ob die Zuordnung  $X \mapsto (X, \tau_{Kl})$  sich auf sinnvolle Weise zu einem Funktor  $Kl : \underline{Set} \rightarrow \underline{Top}$  fortsetzen lässt.

#### Aufgabe 3.

Seien  $M_1$  und  $M_2$  Mengen. Zeigen Sie die universelle Eigenschaft für das kartesische Produkt  $M_1 \times M_2$ : Für jede Menge  $T$  und alle Abbildungen  $f_1 : T \rightarrow M_1$  und  $f_2 : T \rightarrow M_2$  gibt es genau eine Abbildung  $f : T \rightarrow M_1 \times M_2$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:



Dabei bezeichnen  $p_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ ,  $i = 1, 2$ , die Projektionen.

*Bitte wenden.*

#### Aufgabe 4.

- (a) Wir betrachten den topologischen Raum  $\mathbb{R}$  mit der Standardtopologie und die Teilmenge  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  mit der induzierten Teilraumtopologie. Zeigen Sie, dass die Menge  $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{Q}$  offen ist, aber nicht in  $\mathbb{R}$ .
- (b) Es sei  $X = A \cup B$  ein topologischer Raum, wobei  $A$  und  $B$  abgeschlossen sind, und  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion. Die Einschränkungen  $f|_A : A \rightarrow Y$  und  $f|_B : B \rightarrow Y$  seien stetig bzgl. der induzierten Teilraumtopologien auf  $A, B$ . Zeigen Sie, dass  $f$  stetig ist.