Prof. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 10.10.2018

Einführung in die Topologie (WS 2018/19)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.

(a) Wie viele Topologien gibt es auf einer Menge $X = \{a, b\}$ mit zwei Punkten?

(b) Auf einer nichtleeren beliebigen Menge Y seien zwei Topologien τ_1 und τ_2 gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie:

i. $\tau_1 \cap \tau_2$ ist immer eine Topologie auf Y.

ii. $\tau_1 \cup \tau_2$ ist immer eine Topologie auf Y.

Aufgabe 2. Beweisen Sie Lemma 1.8 aus der Vorlesung: Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $U \subset X$ heiße offen, falls für jeden Punkt $p \in U$ ein Radius $r > 0$ existiert, so dass:

$$B_r(p) := \{x \in X : d(x,p) < r\} \quad \subset \quad U.$$

(a) Das System der so definierten offenen Mengen ist eine Topologie auf X.

(b) Eine Menge $V \subset X$ ist Umgebung von $p \in X$ genau dann, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass:

$$B_\epsilon(p) \quad \subset \quad V.$$

Aufgabe 3. Wir betrachten auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ die Normen

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= |x_1| + |x_2|, \\ \|x\|_2 &:= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \|x\|_\infty &:= \max\{|x_1|, |x_2|\} \end{aligned}$$

und die induzierten Metriken

$$d_p(x,y) \ := \ \|x - y\|_p.$$

(a) Zeigen Sie, dass Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty \ &\leq \ \|x\|_1 \ \leq \ C_1 \cdot \|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty \ &\leq \ \|x\|_2 \ \leq \ C_2 \cdot \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

(b) Verwenden Sie Teil (a) um zu beweisen, dass die Metriken d_1, d_2 und d_∞ auf $\mathbb{R}^2$ die selbe Topologie induzieren, d.h. dass eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ genau dann d_1-offen ist, wenn sie d_2-offen ist, wenn sie d_∞-offen ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 4.

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Dann heißt eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subset R$ ein *Ideal*, falls $(\mathfrak{a}, +)$ eine Untergruppe von $(R, +)$ ist und für alle $r \in R$ und $a \in \mathfrak{a}$ stets $r \cdot a \in \mathfrak{a}$ gilt. Ein Ideal $\mathfrak{p}$ heißt Primideal, falls $\mathfrak{p} \neq R$ ist und für alle weiteren Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von R gilt:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \implies \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}.$$

Dabei meint $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ das kleinste Ideal, dass die Menge $\{ab : a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$ enthält. *Spec*(R) sei das Spektrum von R, d.h. die Menge aller Primideale von R. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ sei

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}.$$

Zeigen Sie, dass die sogenannte *Zariski-Topologie*

$$\tau := \{M \subset Spec(R) : \exists \mathfrak{a} \subset R : \; M = Spec(R) \setminus V(\mathfrak{a})\} \tag{1}$$

tatsächlich eine Topologie auf *Spec*(R) ist.

Bemerkung: Definition (1) besagt, dass eine Menge $A \subset Spec(R)$ genau dann abgeschlossen ist, wenn sie die Form $A = V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ hat.

Abgabe in der Vorlesung am 17.10.2018.