Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 30.06.2016

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 9

Aufgabe 33. (Fouriertransformation auf L^2)

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen quadratintegrabel sind, d.h. in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegen:

$$e^{-|x|} \quad , \quad \frac{\sin(x)}{x} \quad , \quad \frac{1}{1+|x|}$$

b) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \pi & , |x| \leq 1, \\ 0 & , |x| > 1. \end{cases}$$

Der Umkehrsatz gilt auch für L^2-Funktionen. Verwenden Sie ihn, um die Fouriertransformierte von $\frac{\sin(x)}{x}$ zu bestimmen.

Aufgabe 34. (Das Abtasttheorem)

a) Es sei $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, fest gewählt. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ gilt:

$$\frac{1}{n^k} \quad \leq \quad \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^k} dx.$$

Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \quad \leq \quad 1 + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx.$$

Schließen Sie nun mit Aufgabe 25, Teil b), dass die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert.

b) Wir haben in Aufgabe 32 gesehen, dass (für $T > 0$) die Funktion

$$F(x) \quad = \quad \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{\sin(Tx)}{Tx} \right)$$

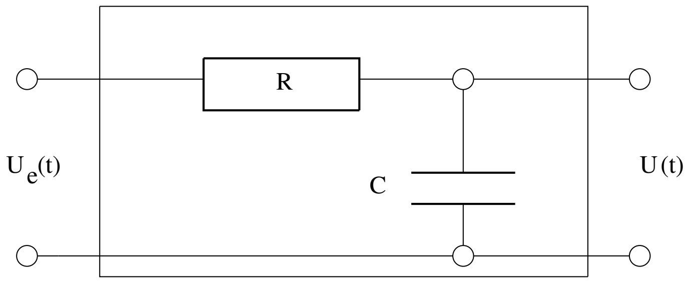
bandbegrenzt ist, d.h. ihre Fouriertransformation $\widehat{F}$ außerhalb des beschränkten Intervalls $[-T, T]$ verschwindet. Damit das Abtasttheorem auf F angewendet werden kann, ist zu zeigen, dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |F(2\pi n a)|$$

für $0 < a < T$ konvergiert. Zeigen Sie unter Verwendung von Teil a), dass dies der Fall ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 35. (Tiefpassfilter und Fouriertransformation)
Wir betrachten wieder den Tiefpassfilter aus Aufgabe 28:



Wir nehmen an, es würde eine stückweise stetige absolut integrable Eingangsspannung $U_e : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ angelegt. Wir nehmen an, die Ausgangsspannung $U : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei wieder stückweise stetig und absolut integrabel. Wie in der Vorlesung gesehen gilt die Differentialgleichung:

$$RC \cdot U'(t) + U(t) = U_e(t). \tag{1}$$

a) Wenden Sie die Fouriertransformation auf die DGL (1) an, um zu zeigen, dass

$$\widehat{U}(w) = \frac{1}{1 + iwRC}\widehat{U_e}(w).$$

b) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{RC}e^{-t/RC} & , t \geq 0, \\ 0 & , t < 0, \end{cases}$$

und verwenden Sie den Faltungssatz und den Umkehrsatz, um zu zeigen, dass:

$$U(t) = h * U_e(t).$$

Vergleichen Sie diese Aussage mit dem Ergebnis von Aufgabe 28.

Aufgabe 36. (Laplacetransformation I)
a) Berechnen Sie für $\omega > 0$ das Integral

$$\mathfrak{L}f(s) := \int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-st}dt$$

in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{C}$. Für welche s existiert das Integral? Sie haben damit die Laplacetransformierte $\mathfrak{L}f$ von $f(t) = \sin(\omega t)$ bestimmt.
b) Berechnen Sie für $\omega > 0$ durch

$$\mathfrak{L}g(s) := \int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-st}dt$$

auch die Laplacetransformierte von $g(t) = \cos(\omega t)$. Für welche s existiert dieses Integral?