Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 30.06.2016

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 9

Aufgabe 33. (Fouriertransformation auf L^2)

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen quadratintegrabel sind, d.h. in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegen:

$$e^{-|x|} \quad , \quad \frac{\sin(x)}{x} \quad , \quad \frac{1}{1+|x|}$$

b) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \pi & , |x| \leq 1, \\ 0 & , |x| > 1. \end{cases}$$

Der Umkehrsatz gilt auch für L^2-Funktionen. Verwenden Sie ihn, um die Fouriertransformierte von $\frac{\sin(x)}{x}$ zu bestimmen.

Lösung:

a) i.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-|x|}|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x|} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-2x} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{-2}\left[e^{-2x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{-\infty}^{0} + 1 = \frac{1}{-2}(0-1) + \frac{1}{2}(1-0) \end{aligned}$$

ii. Die Funktion $\sin(x)/x$ ist auch an der Stelle $x = 0$ problematisch, da x im Nenner steht. Um das Verhalten im Punkt $x = 0$ zu untersuchen, betrachten wir die Ableitung des Sinus im Punkt $x = 0$. Nach Definition der Ableitung ist:

$$\sin'(0) \quad = \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Also gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad = \quad \cos(0) = 1.$$

Somit ist $\sin(x)/x$ eine stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$. Es folgt, dass

$$\int_{-1}^{1} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^2 dx \quad < \infty,$$

und es reicht, noch

$$\int_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{1} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^2 dx$$

zu untersuchen.

Es ist aber:

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|^2 dx \;=\; \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|^2}{x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \big[-1/x\big]_1^{+\infty} = 0+1.$$

iii.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{1+x^2}\right|^2 dx &= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+|x|)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^2} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(1+|x|)^2} \\
&\leq \int_{-1}^{1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} \\
&= 2 + \big[-1/x\big]_1^{+\infty} + \big[-1/x\big]_{-\infty}^{-1} \\
&= 2 + (0+1) + (1+0) = 4
\end{aligned}$$

b) Die Fouriertransformierte von f ist:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \pi \int_{-1}^{1} e^{-iwx}dx = \frac{\pi}{-iw}\big[e^{-iwx}\big]_{-1}^{1} \\
&= \frac{\pi}{iw}(e^{iw} - e^{-iw}) = 2\pi\frac{\sin(w)}{w}
\end{aligned}$$

Gesucht ist nun die Fouriertransformierte von

$$g(w) \;=\; \frac{\sin(w)}{w}.$$

Sowohl f als auch $\widehat{f}$ liegen in L^2. Da der Umkehrsatz gilt, ist:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(w)e^{iwx}dw = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(w)}{w} e^{-iw(-x)}dw = \widehat{g}(-x).$$

Da f eine gerade Funktion ist, ist f die Fouriertransformierte von g. Es ist aufwendiger, diese direkt zu berechnen.

Aufgabe 34. (Das Abtasttheorem)

a) Es sei $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, fest gewählt. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ gilt:

$$\frac{1}{n^k} \;\leq\; \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^k}dx.$$

Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \;\leq\; 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}dx.$$

Schließen Sie nun mit Aufgabe 25, Teil b), dass die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert.

b) Wir haben in Aufgabe 32 gesehen, dass (für $T > 0$) die Funktion

$$F(x) \;=\; \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{\sin(Tx)}{Tx}\right)$$

bandbegrenzt ist, d.h. ihre Fouriertransformation $\widehat{F}$ außerhalb des beschränkten Intervalls $[-T, T]$ verschwindet. Damit das Abtasttheorem auf F angewendet werden kann, ist zu zeigen, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F(2\pi na)|$$

für $0 < a < 1/T$ konvergiert. Zeigen Sie unter Verwendung von Teil a), dass dies der Fall ist.

Lösung:

a) Für $x \leq n$ ist $x^k \leq n^k$ und somit $\frac{1}{x^k} \geq \frac{1}{n^k}$. Damit folgt:

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^k} dx \quad \geq \quad \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^k} dx = \frac{1}{n^k} \int_{n-1}^{n} dx = \frac{1}{n^k}.$$

Unter Verwendung dieser Aussage für alle $n \geq 2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} &\leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^k} dx = 1 + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx \\ &= 1 + \frac{1}{1-k} \left[x^{1-k}\right]_1^{+\infty} = 1 + \frac{1}{1-k}(0-1) = 1 + \frac{1}{k-1} \leq 2\end{aligned}$$

d.h. die Summe konvergiert.

b) Unter Verwendung der Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$ ist:

$$\begin{aligned}|F(x)| &= \left|\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{\sin(Tx)}{Tx}\right)\right| = \frac{1}{x^2}\left|1 + \left(-\frac{\sin(Tx)}{Tx}\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{x^2}\left(1 + \left|\frac{\sin(Tx)}{Tx}\right|\right) \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{T|x|^3}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Abschätzung sehen wir:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F(2\pi na)| &= F(0) + 2\sum_{n\geq 1} |F(2\pi na)| \\ &= F(0) + 2\sum_{k\geq 1} \frac{1}{|2\pi na|^2} + \frac{2}{T}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|2\pi na|^3} \\ &= F(0) + \frac{1}{2\pi^2 a^2}\sum_{k\geq 1} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{T4\pi^3 a^3}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} \\ &\leq F(0) + \frac{1}{\pi^2 a^2} + \frac{1}{T2\pi^3 a^3},\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Teil a) verwendet haben. Nach der Taylorreihe des Sinus ist:

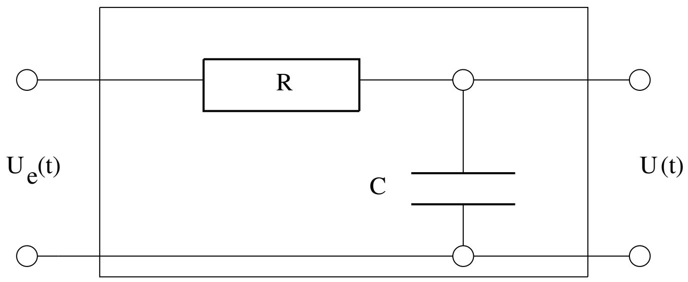
$$\sin(t) \quad = \quad t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\ ,$$

also

$$F(x) \quad = \quad \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}(Tx)^2 - \frac{1}{7!}(Tx)^7 + \dots\ ,$$

so dass $F(0) = 1/6$. Damit konvergiert die Reihe für alle $a > 0$.

Aufgabe 35. (Tiefpassfilter und Fouriertransformation)
Wir betrachten wieder den Tiefpassfilter aus Aufgabe 28:



Wir nehmen an, es würde eine stückweise stetige absolut integrable Eingangsspannung $U_e : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ angelegt. Wir nehmen an, die Ausgangsspannung $U : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei wieder stückweise stetig und absolut integrabel. Wie in der Vorlesung gesehen gilt die Differentialgleichung:

$$RC \cdot U'(t) + U(t) = U_e(t). \tag{1}$$

a) Wenden Sie die Fouriertransformation auf die DGL (1) an, um zu zeigen, dass

$$\widehat{U}(w) = \frac{1}{1 + jwRC}\widehat{U_e}(w).$$

b) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{RC} e^{-t/RC} & , t \geq 0, \\ 0 & , t < 0, \end{cases}$$

und verwenden Sie den Faltungssatz und den Umkehrsatz, um zu zeigen, dass:

$$U(t) = h * U_e(t).$$

Vergleichen Sie diese Aussage mit dem Ergebnis von Aufgabe 28.

Lösung:

a) Wir wenden die Fouriertransformation in der Variablen t auf die DGL (1) an. Nach der Linearität der Fouriertransformation und dem Differentiationssatz gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{U_e}(w) &= RC \cdot \widehat{U'}(w) + \widehat{U}(w) = RCjw\widehat{U}(w) + \widehat{U}(w) \\ &= (RCjw + 1)\widehat{U}(w), \end{aligned}$$

was wir zur gewünschten Gleichung umstellen:

$$\widehat{U}(w) = \frac{1}{1 + jwRC}\widehat{U_e}(w).$$

b) Wegen $RC > 0$ ist die Fouriertransformation von h:

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(w) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{RC} e^{-t/RC} e^{-jwt} dt = \frac{1}{RC} \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{1}{RC}+jw)t} dt \\
&= \frac{1}{RC} \cdot \frac{-1}{\frac{1}{RC}+jw} \left[e^{-(\frac{1}{RC}+jw)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{-1}{\frac{1}{RC}+jw}(0-1) \\
&= \frac{1}{1+jwRC}.
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in Teil a) ein, so folgt mit dem Faltungssatz für die Fouriertransformation:

$$\widehat{U}(w) = \widehat{h}(w)\widehat{U_e}(w) = \widehat{h * U_e}(w)$$

Nach dem Umkehrsatz ist damit aber:

$$U(t) = (h * U_e)(t) = \frac{1}{RC} \int_0^{+\infty} U_e(t-s) e^{-t/RC} ds.$$

Auch in Aufgabe 28 war $U = h * U_e$, wobei dort aber die Faltung zweier T-periodischer Funktionen, d.h.

$$h * U_e(t) = \frac{1}{T} \int_0^T U_e(h-s) h(t) dt$$

gemeint war, und es war

$$h(t) = \frac{1}{RC} \frac{T}{1-e^{-T/RC}} e^{-t/RC},$$

also:

$$\begin{aligned}
h * U_e(t) &= \frac{1}{T} \frac{1}{RC} \frac{T}{1-e^{-T/RC}} \int_0^T U_e(h-s) e^{-t/RC} dt \\
&= \frac{1}{RC} \frac{1}{1-e^{-T/RC}} \int_0^T U_e(h-s) e^{-t/RC} dt
\end{aligned}$$

Lassen wir hier jetzt $T \to +\infty$ streben, so ergibt sich auch hier:

$$U(t) = (h * U_e)(t) = \frac{1}{RC} \int_0^{+\infty} U_e(t-s) e^{-t/RC} ds,$$

d.h. geht die Länge der Periode gegen $+\infty$, so liefert die Herleitung über Fourierreihen dieselbe Lösung für das Problem (Ausgangsspannung U), wie die Herleitung über Fouriertransformation.

Aufgabe 36. (Laplacetransformation I)
a) Berechnen Sie für $\omega > 0$ das Integral

$$\mathfrak{L}f(s) \;:=\; \int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-st}dt$$

in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{C}$. Für welche s existiert das Integral? Sie haben damit die Laplacetransformierte $\mathfrak{L}f$ von $f(t) = \sin(\omega t)$ bestimmt.
b) Berechnen Sie für $\omega > 0$ durch

$$\mathfrak{L}g(s) \;:=\; \int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-st}dt$$

auch die Laplacetransformierte von $g(t) = \cos(\omega t)$. Für welche s existiert dieses Integral?

Lösung:
a) Unter Verwendung der Exponentialdarstellung für den Sinus ist:

$$\begin{aligned}
\int_0^R \sin(\omega t)e^{-st}dt &= \frac{1}{2i}\int_0^R e^{i\omega t}e^{-st}dt - \frac{1}{2i}\int_0^R e^{-i\omega t}e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2i}\left(\int_0^R e^{(i\omega - s)t}dt - \int_0^R e^{-(i\omega+s)t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i\omega - s}\left[e^{(i\omega-s)t}\right]_0^R - \frac{1}{-i\omega - s}\left[e^{-(i\omega+s)t}\right]_0^R\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(i\omega-s)R} - 1}{i\omega - s} + \frac{e^{-(i\omega+s)R} - 1}{i\omega + s}\right)
\end{aligned}$$

Nun existiert

$$\lim_{R\to\infty} e^{(i\omega-s)R} \;=\; \lim_{R\to\infty} e^{i\omega R}e^{-sR}$$

wegen $|e^{i\omega R}| = 1$ und

$$|e^{-sR}| \;=\; |e^{-(\mathrm{Re}\ s)R - i(\mathrm{Im}\ s)R}| = |e^{-(\mathrm{Re}\ s)R}||e^{-i(\mathrm{Im}\ s)R}| = e^{-(\mathrm{Re}\ s)R}$$

genau dann, wenn $\mathrm{Re}\ s > 0$, und dann ist

$$\lim_{R\to\infty} e^{(i\omega-s)R} = 0.$$

Das Gleiche gilt für $\lim_{R\to\infty} e^{(-i\omega-s)R}$. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
\int_0^R \sin(\omega t)e^{-st}dt &= \frac{1}{2i}\left(\frac{-1}{i\omega - s} + \frac{-1}{i\omega + s}\right) = \frac{-1}{2i}\cdot\frac{(i\omega+s)+(i\omega-s)}{(i\omega-s)(i\omega+s)} \\
&= \frac{-1}{2i}\cdot\frac{2i\omega}{i^2\omega^2 - s^2} = \frac{\omega}{\omega^2+s^2}.
\end{aligned}$$

b) Analog ist unter Verwendung der Exponentialdarstellung für den Kosinus:

$$\begin{aligned}
\int_0^R \cos(\omega t) e^{-st} dt &= \frac{1}{2}\int_0^R e^{i\omega t} e^{-st} dt + \frac{1}{2}\int_0^R e^{-i\omega t} e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{(i\omega - s)t} dt + \int_0^\infty e^{-(i\omega + s)t} dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i\omega - s}\left[e^{(i\omega - s)t}\right]_0^\infty + \frac{1}{-i\omega - s}\left[e^{-(i\omega + s)t}\right]_0^\infty\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{i\omega - s} - \frac{-1}{i\omega + s}\right) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{(i\omega + s) - (i\omega - s)}{(i\omega - s)(i\omega + s)} \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \frac{2s}{i^2\omega^2 - s^2} = \frac{s}{\omega^2 + s^2},
\end{aligned}$$

falls Re $s > 0$.