Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 23.06.2016

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 8

Aufgabe 29. (Fouriertransformation und Differentiationssatz)

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} 1 - x^2 & , \ |x| \leq 1, \\ 0 & , \ |x| \geq 1, \end{cases}$$

und verwenden Sie den 2.Differentiationssatz, um daraus die Fourierreihe der Funktion $g(x) := x \cdot f(x)$ abzuleiten.

b) Berechnen Sie die Fourierreihe von

$$h(x) \quad := \quad \begin{cases} 1 - (2x-1)^2 & , \ 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachten Sie dabei, dass $h(x) = f(2x-1)$ für die Funktion f aus Teil a). Damit können Sie sich die Berechnungen aus Teil a) nach einer Substitution $t = 2x - 1$ zu Nutze machen.

Aufgabe 30. (Faltung und Umkehrformel)

Für $a > 0$ sei

$$g_a(x) \quad := \quad \frac{1}{a} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von g_a, und nutzen Sie den Faltungssatz und die Umkehrformel für die Fouriertransformation, um $g_a * g_b$ für $b > 0$ zu bestimmen.

Aufgabe 31. (Umkehrformel)

Berechnen Sie für $a > 0$ die Fouriertransformierte $\widehat{g}$ von

$$g(x) \quad := \quad e^{-a|x|} \ ,$$

und verwenden Sie $\widehat{g}$ zusammen mit der Exponentialdarstellung des Kosinus und der Umkehrformel für die Fouriertransfromation, um das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2 + a^2} dx$$

für $a, b > 0$ zu berechnen.

Bitte wenden.

Aufgabe 32. (Umkehrformel)

a) Es sei $T > 0$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte von

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} (|x| - T)^2 & , \ |x| \leq T, \\ 0 & , \ |x| \geq T. \end{cases}$$

b) Ausserdem sei

$$F(w) \quad := \quad \frac{1}{w^2}\left(1 - \frac{\sin(wT)}{wT}\right).$$

Verwenden Sie Teil a) und die Umkehrformel für die Fouriertransformation, um zu zeigen, dass F ein bandbegrenztes Signal ist, d.h. dass $\widehat{F}$ außerhalb eines beschränkten Intervalls verschwindet.