Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 23.06.2016

Mathematatik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 8

Aufgabe 29. (Fouriertransformation und Differentiationssatz)

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} 1 - x^2 & , \ |x| \leq 1, \\ 0 & , \ |x| \geq 1, \end{cases}$$

und verwenden Sie den 2.Differentiationssatz, um daraus die Fourierreihe der Funktion $g(x) := x \cdot f(x)$ abzuleiten.

b) Berechnen Sie die Fourierreihe von

$$h(x) \quad := \quad \begin{cases} 1 - (2x-1)^2 & , \ 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachten Sie dabei, dass $h(x) = f(2x-1)$ für die Funktion f aus Teil a). Damit können Sie sich die Berechnungen aus Teil a) nach einer Substitution $t = 2x - 1$ zu Nutze machen.

Lösung:

a) Nach Definition ist:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) e^{-iwx} dx \\ &= \int_{-1}^{1} e^{-iwx} dx - \int_{-1}^{1} x^2 e^{-iwx} dx. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Exponentialdarstellung für den Sinus ergibt sich für das erste Integral:

$$\int_{-1}^{1} e^{-iwx} dx \quad = \quad \frac{-1}{iw} \left[e^{-iwx} \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{2iw} \left(e^{iw} - e^{-iw} \right) = \frac{2}{w} \sin(w).$$

Das zweite Integral läßt sich durch wiederholte partielle Integration bestimmen. Um den Prozess zu vereinfachen, betrachte man (für eine beliebige komplexe Zahl $\alpha \neq 0$):

$$\left(\frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} \right)' = x^2 e^{\alpha x} + \frac{2x}{\alpha} e^{\alpha x},$$

d.h. $\frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x}$ ist eine Stammfunktion für $x^2 e^{\alpha x}$ bis auf den Fehlerterm $\frac{2x}{\alpha} e^{\alpha x}$. Um den Fehlerterm zu eliminieren wiederholen, wir das Verfahren:

$$\left(\frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2x}{\alpha^2} e^{\alpha x} \right)' \quad = \quad x^2 e^{\alpha x} + \frac{2x}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{2x}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2} e^{\alpha x} = x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2} e^{\alpha x}.$$

Der neue Fehlerterm $-\frac{2}{\alpha^2}e^{\alpha x}$ enthält jetzt keinen Faktor x mehr und kann nun leicht komplett eliminiert werden:

$$\left(\frac{1}{\alpha}x^2 e^{\alpha x} - \frac{2x}{\alpha^2}e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3}e^{\alpha x}\right)' = x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2}e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^2}e^{\alpha x} = x^2 e^{\alpha x}.$$

Damit ist

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}x^2 e^{\alpha x} - \frac{2x}{\alpha^2}e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3}e^{\alpha x}$$

eine Stammfunktion von $x^2 e^{\alpha x}$. Allgemeiner läßt sich mit diesem Verfahren eine Stammfunktion für beliebige Funktionen der Art $P(x)e^{\alpha x}$ bestimmen, wenn P ein Polynom in x ist.

Mit der Wahl $\alpha = -iw$ (und $\alpha^2 = -w^2$, $\alpha^3 = iw^3$) können wir nun das 2.Integral einfach bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^2 e^{-iwx}dx &= \left[F_{-iw}(x)\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{-1}{iw}x^2 e^{-iwx} + \frac{2x}{w^2}e^{-iwx} + \frac{2}{iw^3}e^{-iwx}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{2iw}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right) + \frac{4}{2w^2}\left(e^{iw} + e^{-iw}\right) - \frac{4}{2iw^3}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right) \\
&= \frac{2}{w}\sin(w) + \frac{4}{w^2}\cos(w) - \frac{4}{w^3}\sin(w),
\end{aligned}$$

wobei wir hier auch die Exponentialdarstellung des Kosinus eingesetzt haben.

Setzen wir die beiden Integrale in die Definition von $\widehat{f}$ ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \frac{2}{w}\sin(w) - \left(\frac{2}{w}\sin(w) + \frac{4}{w^2}\cos(w) - \frac{4}{w^3}\sin(w)\right) \\
&= \frac{4}{w^3}\sin(w) - \frac{4}{w^2}\cos(w).
\end{aligned}$$

Der 2.Differentiationssatz, Satz 3.2.4 aus der Vorlesung bzw. dem Skript, liefert nun ausserdem:

$$\begin{aligned}
\widehat{(x\cdot f)}(w) &= \frac{1}{-i}(\widehat{f})'(w) \\
&= i\left(-\frac{12}{w^4}\sin(w) + \frac{4}{w^3}\cos(w) + \frac{8}{w^3}\cos(w) + \frac{4}{w^2}\sin(w)\right) \\
&= -\frac{4i}{w^2}\left(\frac{3}{w^2}\sin(w) - \frac{1}{w}\cos(w) - \sin(w)\right)
\end{aligned}$$

Der Satz ist anwendbar, da f beschränkt ist und außerhalb von $[-1,1]$ verschwindet, so dass $(1+|x|)f$ absolut integrabel ist.

b) Wegen $h(x) = f(2x-1)$, erhalten wir mit der Substitution $y = 2x-1$, d.h. $dy = 2dx$ und $x = y/2 + 1/2$:

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-iwx}dx = \int_0^1 f(2x-1)e^{-iwx}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(y)e^{-iwy/2}e^{-iw/2}dy = \frac{1}{2}e^{-iw/2}\widehat{f}\left(\frac{w}{2}\right)
\end{aligned}$$

Alternativ kann man die Rechenregeln für die Fouriertransformation, Satz 3.2.1, verwenden, die auf analogen Substitutionen beruhen.

Aufgabe 30. (Faltung und Umkehrformel)

Für $a > 0$ sei

$$g_a(x) \quad := \quad \frac{1}{a} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von g_a, und nutzen Sie den Faltungssatz und die Umkehrformel für die Fouriertransformation, um $g_a * g_b$ für $b > 0$ zu bestimmen.

Lösung:

a) Für $\alpha > 0$ ist wie in der Vorlesung gesehen ist die Fouriertransformierte von $f_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$ gegeben als:

$$\widehat{f_\alpha}(w) \quad = \quad \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-w^2/4\alpha}.$$

Nun ist

$$g_a(x) \quad = \quad \frac{1}{a} f_\alpha(x)$$

mit $\alpha := 1/2a^2$, also

$$\widehat{g_a}(w) \quad = \quad \frac{1}{a}\sqrt{\pi 2a^2} e^{-a^2w^2/2} = \sqrt{2\pi} e^{-a^2w^2/2}.$$

Nach dem Faltungssatz (Satz 3.2.5) folgt:

$$\begin{aligned} \widehat{g_a * g_b}(w) &= \widehat{g_a}(w)\widehat{g_b}(w) = 2\pi e^{-a^2w^2/2} e^{-b^2w^2/2} = 2\pi e^{-(a^2+b^2)w^2/2} \\ &= \sqrt{2\pi}\,\widehat{g_c}(w) \end{aligned}$$

mit $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Alle Funktionen der Form $e^{-\alpha x^2}$ sind für $\alpha > 0$ absolut integrabel. Somit sind g_a, g_b, g_c und auch $g_a * g_b$ (mit dem Haltungssatz) absolut integrabel.

Unter zweifacher Verwendung des Umkehrsatzes (Satz 3.2.7) folgt:

$$\begin{aligned} g_a * g_b(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g_a * g_b}(w) e^{iwx} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\widehat{\sqrt{2\pi} g_c})(w) e^{iwx} dw = \sqrt{2\pi} g_c(x) \end{aligned}$$

Dabei haben wir den Umkehrsatz im ersten Schritt auf $g_a * g_b$ angewendet, und im letzten Schritt auf $\sqrt{2\pi} g_c$. Es ist also:

$$g_a * g_b \quad = \quad \sqrt{2\pi} g_c$$

mit $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

Aufgabe 31. (Umkehrformel)

Berechnen Sie für $a > 0$ die Fouriertransformierte $\widehat{g}$ von

$$g(x) \quad := \quad e^{-a|x|} \ ,$$

und verwenden Sie $\widehat{g}$ zusammen mit der Exponentialdarstellung des Kosinus und der Umkehrformel für die Fouriertransformation, um das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2} dx$$

für $a, b > 0$ zu berechnen.

Lösung:

Wegen $a > 0$ ist:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-iwx} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{-iwx} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-iwx} dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+iw)x} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(a-iw)x} dx \\
&= \frac{1}{-(a+iw)} \left[e^{-(a+iw)x} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{a-iw} \left[e^{(a-iw)x} \right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{-(a+iw)} \big(-1 \big) + \frac{1}{a-iw} = \frac{(a-iw)+(a+iw)}{(a+iw)(a-iw)} = \frac{2a}{a^2+w^2}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass

$$|e^{-ax} e^{-iwx}| \quad = \quad |e^{-ax}| \cdot |e^{-iwx}| = |e^{-ax}| = e^{-ax} \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

und

$$|e^{ax} e^{-iwx}| \quad = \quad |e^{ax}| \cdot |e^{-iwx}| = |e^{ax}| = e^{ax} \overset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0,$$

so dass auch

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-(a+iw)x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} e^{(a-iw)x} = 0.$$

Unter Verwendung der Exponentialdarstellung des Kosinus erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2} \left(e^{ibx} + e^{-ibx} \right) dx \\
&= \frac{1}{4a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2+x^2} e^{ibx} dx + \frac{1}{4a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2+x^2} e^{-ibx} dx \\
&= \frac{2\pi}{4a} e^{-a|b|} + \frac{2\pi}{4a} e^{-a|-b|} = \frac{\pi}{a} e^{-ab},
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt den Umkehrsatz (Satz 3.2.7) verwendet haben, nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(x) e^{iyx} dx \quad = \quad 2\pi \cdot g(y).$$

Aufgabe 32. (Umkehrformel)

a) Es sei $T > 0$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte von

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} (|x| - T)^2 & , \ |x| \leq T, \\ 0 & , \ |x| \geq T. \end{cases}$$

b) Ausserdem sei

$$F(w) \quad := \quad \frac{1}{w^2}\left(1 - \frac{\sin(wT)}{wT}\right).$$

Verwenden Sie Teil a) und die Umkehrformel für die Fouriertransformation, um zu zeigen, dass F ein bandbegrenztes Signal ist, d.h. dass $\widehat{F}$ außerhalb eines beschränkten Intervalls verschwindet.

Lösung:

a) Da f eine gerade Funktion ist, d.h. $f(-x) = f(x)$, gilt allgemein (mit der Substitution $z = -x$):

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx + \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{-iwx}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx - \int_{+\infty}^{0} f(-z)e^{iwz}dz \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx + \int_{0}^{+\infty} f(-x)e^{iwx}dx \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\frac{1}{2}\left(e^{iwx} + e^{-iwx}\right)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos(wx)dx.
\end{aligned}$$

Diese Identität gilt allgemein für gerade Funktionen. Hier gilt nun konkret:

$$\widehat{f}(w) \quad = \quad 2\int_{0}^{T} (x - T)^2 \cos(wx)dx = 2\int_{0}^{T} \left(x^2 - 2Tx + T^2\right)\cos(wx)dx$$

Um dieses Integral zu bestimmen kann mehrfach partielle Integration angewendet werden. Wir können aber analog zu Aufgabe 29, Teil a), eine Stammfunktion zu $(x^2 - 2Tx + T^2)\cos(wx)$ direkt bestimmen. Dazu betrachten wir:

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{w}\left(x^2 - 2Tx + T^2\right)\sin(wx)\right)'$$

$$(2) \qquad = \left(x^2 - 2Tx + T^2\right)\cos(wx) + \frac{1}{w}\left(2x - 2T\right)\sin(wx)$$

Hier ist also der Fehler $\frac{1}{w}\left(2x - 2T\right)\sin(wx)$, den wir mit

$$(3) \qquad \left(\frac{1}{w^2}\left(2x - 2T\right)\cos(wx)\right)' \quad = \quad -\frac{1}{w}\left(2x - 2T\right)\sin(wx) + \frac{2}{w^2}\cos(wx)$$

ausgleichen.

Den erneuten Fehler $\frac{2}{w^2}\cos(wx)$ korrigieren wir mit

$$(4) \qquad \Big(-\frac{2}{w^3}\sin(wx)\Big)' \quad = \quad -\frac{2}{w^2}\cos(wx).$$

Addieren wir (1), (2), (3) und (4), so bleibt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{w}\big(x-T\big)^2\sin(wx)+\frac{1}{w^2}\big(2x-2T\big)\cos(wx)-\frac{2}{w^3}\sin(wx)\right)' \\ = \quad & \big(x-T\big)^2\cos(wx). \end{aligned}$$

Damit ist also

$$G(x) \quad := \quad \frac{1}{w^3}\Big(w^2\big(x-T\big)^2\sin(wx)+w\big(2x-2T\big)\cos(wx)-2\sin(wx)\Big)$$

die Stammfunktion von $\big(x-T\big)^2\cos(wx)$. Allgemein kann man auf diese Weise Stammfunktionen zu Produkten der Art $P(x)\cdot\cos(\alpha x)$ und $P(x)\cdot\sin(\alpha x)$ bestimmen, wobei P ein beliebiges Polynom ist.

Unter Verwendung der Stammfunktion G ist:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(w) &= 2\int_0^T (x-T)^2\cos(wx)dx = 2\big[G(x)\big]_0^T \\ &= \frac{2}{w^3}\left(-2\sin(Tw)+2Tw\right) = \frac{4}{w^3}\big(Tw-\sin(Tw)\big) \end{aligned}$$

b) Nach Teil a) ist

$$4T\cdot F(w) \quad = \quad \frac{4T}{w^2}\left(1-\frac{\sin(wT)}{wT}\right) = \frac{4}{w^3}\big(Tw-\sin(Tw)\big) = \widehat{f}(w),$$

also

$$F(w) \quad = \quad \frac{1}{4T}\widehat{f}(w).$$

Die Fouriertransformation von F ist also:

$$\begin{aligned} \widehat{F}(x) &= \widehat{\big(\frac{1}{4T}\widehat{f}\big)}(x) = \frac{1}{4T}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(w)e^{-iwx}dw \\ &= \frac{1}{4T}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(w)e^{iw(-x)}dw = \frac{\pi}{2T}f(-x). \end{aligned}$$

Nun ist f nach Definition gleich Null außerhalb des Intervalls $[-T,T]$, was dann aber auch für F gilt.