Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 16.06.2016

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)
Übungsblatt 7

Aufgabe 25. (Uneigentliche Integrale I)

a) Es sei $s \geq 0$. Bestimmen Sie, für welche Werte von s das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^s}$$

existiert und geben Sie ggf. den Grenzwert an.

b) Es sei $s \geq 0$. Bestimmen Sie, für welche Werte von s das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$$

existiert und geben Sie ggf. den Grenzwert an.

c) Verwenden Sie das Majorantenkriterium, Satz 3.1.1 aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1} dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx$$

existieren. Der Grenzwert muss nicht berechnet werden.

Aufgabe 26. (Fouriertransformation I)

a) Es sei $L > 0$. Wir betrachten das *parameterabhängige* Integral

$$g(w) \quad := \quad \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) e^{-iwt} dt$$

für $w \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie die Exponentialdarstellung des Kosinus, um $g(w)$ für beliebiges $w \in \mathbb{R}$ zu berechnen.

b) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} -e^{-|x-x_0|} & , \ x \geq x_0, \\ e^{-|x-x_0|} & , \ x < x_0. \end{cases}$$

Berechnen Sie das parameterabhängige Integral

$$h(w) \quad := \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

in Abhängigkeit von $w \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden.

Aufgabe 27. (Uneigentliche Integrale II)

a) Verwenden Sie die Rechenregel für Ableitungen $(\ln \circ f)' = \frac{f'}{f}$, um zu zeigen, dass das folgende uneigentliche Integral nicht existiert:

$$\int_0^{\pi/2} \tan(x) dx$$

b) Zeigen Sie, dass $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ gilt, und verwenden Sie dies zusammen mit der Substitution $y = \tan(x)$, um das folgende uneigentliche Integral zu berechnen:

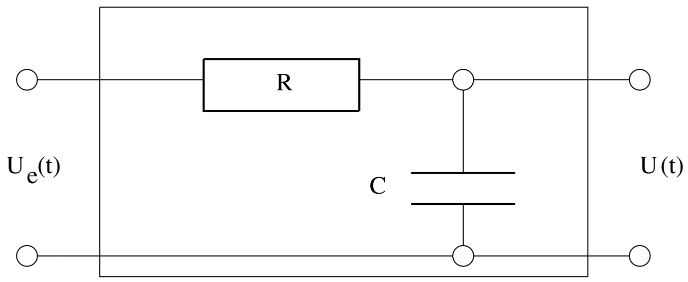
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy \quad = \quad \pi.$$

c) Verwenden Sie die Substitution $x = \sin(t)$ und die Formel $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ (siehe Aufgabe 9, Teil d)), um das folgende uneigentliche Integral zu berechnen:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad = \quad \pi.$$

Aufgabe 28. (Tiefpassfilter)

Wir betrachten den Tiefpassfilter mit Schaltbild:



Es wird eine stückweise stetige T-periodische Eingangsspannung $U_e(t)$ angelegt, die durch ihre Fourierreihe $U_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \cdot e^{j\omega kt}$ gegeben ist. Als Ausgangsspannung ergibt sich (wie in der Vorlesung gesehen):

$$U(t) \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k}{1+j\omega kRC} \cdot e^{j\omega kt}.$$

a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der T-periodischen Fortsetzung von

$$h(t) \quad = \quad \frac{T}{RC} \cdot \frac{1}{1-e^{-T/RC}} e^{-t/RC} \qquad , \; 0 \leq t < T.$$

b) Berechnen Sie die Fourierreihe der Faltung $U_e * h$.

c) Sei $U_e(t)$ die 2-periodische Fortsetzung der Funktion $U_e^0(t) = t$, $-1 < t \leq 1$. Berechnen Sie die Ausgangsspannung $U(t)$.