

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 7

Aufgabe 25. (Uneigentliche Integrale I)

a) Es sei $s \geq 0$. Bestimmen Sie, für welche Werte von s das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^s}$$

existiert und geben Sie ggf. den Grenzwert an.

b) Es sei $s \geq 0$. Bestimmen Sie, für welche Werte von s das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$$

existiert und geben Sie ggf. den Grenzwert an.

c) Verwenden Sie das Majorantenkriterium, Satz 3.1.1 aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 + 1} dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx$$

existieren. Der Grenzwert muss nicht berechnet werden.

Lösung:

a) Wir behandeln zunächst den Fall $s \neq 1$. Zu betrachten ist für $\delta > 0$ das Integral

$$\int_{\delta}^1 \frac{dt}{t^s} = \int_{\delta}^1 t^{-s} dt = \left[\frac{1}{1-s} t^{1-s} \right]_{\delta}^1 = \frac{1}{1-s} (1 - \delta^{1-s}).$$

Bilden wir nun also den Grenzwert $\delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{dt}{t^s} &= \frac{1}{1-s} \lim_{\delta \rightarrow 0} (1 - \delta^{1-s}) = \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{1-s} \\ &= \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s} \cdot \begin{cases} 0 & , \text{ falls } 0 \leq s < 1, \\ +\infty & , \text{ falls } s > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert also für $0 \leq s < 1$ und dann ist

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{1-s},$$

aber das uneigentliche Integral existiert nicht falls $s > 1$. Es bleibt der "Grenzfall" $s = 1$ zu betrachten. Man beachte, dass die Stammfunktion von $1/x$ der Logarithmus $\ln(x)$ ist, und dass $\ln(1) = 0$. Damit folgt:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln(x)]_{\delta}^1 = \ln 1 - \lim_{\delta \rightarrow 0} \ln(\delta) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \ln(\delta),$$

und dieser Grenzwert existiert nicht, da $\ln(\delta) \rightarrow -\infty$ für $\delta \rightarrow 0$. D.h. das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ existiert nicht.

b) Analog zu Teil a) ist für $s \neq 1$:

$$\int_1^R \frac{dt}{t^s} = \left[\frac{1}{1-s} t^{1-s} \right]_1^R = \frac{1}{1-s} (R^{1-s} - 1).$$

Bilden wir nun also den Grenzwert $R \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{dt}{t^s} &= \frac{1}{1-s} \lim_{R \rightarrow +\infty} (R^{1-s} - 1) = -\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1-s} \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{1-s} \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{1-s} \cdot \begin{cases} +\infty & , \text{ falls } 0 \leq s < 1, \\ 0 & , \text{ falls } s > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert also für $s > 1$ und dann ist

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1},$$

aber das uneigentliche Integral existiert nicht falls $0 \leq s < 1$. Es bleibt wieder der "Grenzfall" $s = 1$ zu betrachten. Hier gilt

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} [\ln(x)]_1^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln(R) - \ln(1) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln(R),$$

und dieser Grenzwert existiert nicht, da $\ln(R) \rightarrow +\infty$ für $R \rightarrow +\infty$. D.h. das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ existiert nicht.

c) Da wir Satz 3.1.1 verwenden wollen und

$$(1) \quad \left| \frac{\sin(x)}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1} \quad , \quad \left| \frac{\cos(x)}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1},$$

untersuchen wir das uneigentliche Integral:

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Da nach Teil b):

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1,$$

und außerdem

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

natürlich existiert, existiert das uneigentliche Integral (2). Unter Verwendung von (1) existieren damit nach Satz 3.1.1 auch die uneigentlichen Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1} dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx.$$

Aufgabe 26. (Fouriertransformation I)

a) Es sei $L > 0$. Wir betrachten das *parameterabhängige* Integral

$$g(w) := \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) e^{-iwt} dt$$

für $w \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie die Exponentialdarstellung des Kosinus, um $g(w)$ für beliebiges $w \in \mathbb{R}$ zu berechnen.

b) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) := \begin{cases} -e^{-|x-x_0|} & , x \geq x_0, \\ e^{-|x-x_0|} & , x < x_0. \end{cases}$$

Berechnen Sie das parameterabhängige Integral

$$h(w) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

in Abhängigkeit von $w \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) Unter Verwendung von

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

berechnen wir hier die Fouriertransformierte der Funktion

$$\phi(t) := \begin{cases} \cos(\pi t/L) & , |t| \leq L/2, \\ 0 & , |t| \geq L/2. \end{cases}$$

Für $w \neq \pm \frac{\pi}{L}$ ist:

$$\begin{aligned} g(w) &= \widehat{\phi}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-iwt} dt = \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) e^{-iwt} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} (e^{i\pi t/L} + e^{-i\pi t/L}) e^{-iwt} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} e^{(i\pi/L - iw)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-(i\pi/L + iw)t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i\pi/L - iw} [e^{(i\pi/L - iw)t}]_{-L/2}^{L/2} - \frac{1}{i\pi/L + iw} [e^{-(i\pi/L + iw)t}]_{-L/2}^{L/2} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\pi/L - w} (e^{i\pi/2} e^{-iLw/2} - e^{-i\pi/2} e^{iLw/2}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi/L + w} (e^{-i\pi/2} e^{-iLw/2} - e^{i\pi/2} e^{-iLw/2}) \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\pi/L - w} (ie^{-iLw/2} + ie^{iLw/2}) - \frac{1}{\pi/L + w} (-ie^{-iLw/2} - ie^{-iLw/2}) \right) = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi/L - w} (e^{-iLw/2} + e^{iLw/2}) + \frac{1}{\pi/L + w} (e^{-iLw/2} + e^{iLw/2}) \right) \\
&= \frac{1}{\pi/L - w} \cos(Lw/2) + \frac{1}{\pi/L + w} \cos(Lw/2) \\
&= \frac{(\pi/L + w) + (\pi/L - w)}{(\pi/L - w)(\pi/L + w)} \cdot \cos\left(\frac{Lw}{2}\right) \\
&= \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{1}{\pi^2/L^2 - w^2} \cdot \cos\left(\frac{Lw}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ausserdem ist

$$\begin{aligned}
g(\pm\pi/L) &= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} (e^{i\pi t/L} + e^{-i\pi t/L}) e^{\mp i\pi t/L} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} (1 + e^{\mp 2i\pi t/L}) dt = \frac{L}{2} \mp \frac{1}{2\pi i/L} [e^{\mp 2\pi i t/L}]_{-L/2}^{L/2} \\
&= \frac{L}{2} \mp \frac{1}{2\pi i/L} (e^{\mp \pi i} - e^{\pm \pi i}) = \frac{L}{2} \mp \frac{1}{2\pi i/L} ((-1) - (-1)) = \frac{L}{2}.
\end{aligned}$$

b) Wir berechnen hier die Fouriertransformierte von f , nämlich:

$$\begin{aligned}
h(w) &= \widehat{f}(w) = \int_{-\infty}^{x_0} e^{-|x-x_0|} e^{-iwx} dx - \int_{x_0}^{+\infty} e^{-|x-x_0|} e^{-iwx} dx \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{x-x_0} e^{-iwx} dx - \int_0^{+\infty} e^{-x+x_0} e^{-iwx} dx \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{x(1-iw)} e^{-x_0} dx - \int_0^{+\infty} e^{x_0} e^{x(-1-iw)} dx \\
&= e^{-x_0} \left[\frac{1}{1-iw} e^{x(1-iw)} \right]_{-\infty}^{x_0} + e^{x_0} \left[\frac{1}{1+iw} e^{x(-1-iw)} \right]_{x_0}^{+\infty} \\
&= e^{-x_0} \frac{1}{1-iw} e^{x_0(1-iw)} - e^{x_0} \frac{1}{1+iw} e^{x_0(-1-iw)} \\
&= \frac{1}{1-iw} e^{-iwx_0} - \frac{1}{1+iw} e^{-iwx_0} \\
&= \left(\frac{1}{1-iw} - \frac{1}{1+iw} \right) e^{-iwx_0} = \frac{(1+iw) - (1-iw)}{(1-iw)(1+iw)} e^{-iwx_0} \\
&= \frac{2iw}{1-i^2w^2} e^{-iwx_0} = \frac{2iw}{1+w^2} e^{-iwx_0}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 27. (Uneigentliche Integrale II)

a) Verwenden Sie die Rechenregel für Ableitungen $(\ln \circ f)' = \frac{f'}{f}$, um zu zeigen, dass das folgende uneigentliche Integral nicht existiert:

$$\int_0^{\pi/2} \tan(x) dx$$

b) Zeigen Sie, dass $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ gilt, und verwenden Sie dies zusammen mit der Substitution $y = \tan(x)$, um das folgende uneigentliche Integral zu berechnen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \pi.$$

c) Verwenden Sie die Substitution $x = \sin(t)$ und die Formel $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ (siehe Aufgabe 9, Teil d)), um das folgende uneigentliche Integral zu berechnen:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi.$$

Lösung:

a) Die Rechenregel für Ableitungen

$$(\ln \circ f)' = \ln'(f) \cdot f' = \frac{f'}{f}$$

kommt immer dann zum Einsatz, wenn wir die Stammfunktion eines Quotienten $\frac{g}{h}$ suchen, wobei $g = h'$ ist. Das ist hier anwendbar, denn

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$$

und $\cos'(x) = -\sin(x)$. Wir können also verwenden, dass

$$-(\ln \circ \cos)'(x) = -\ln'(\cos(x)) \cdot \cos'(x) = -\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Also ergibt sich für $\delta > 0$ bzw. $\eta = \pi/2 - \delta < \pi/2$ und unter Verwendung von $\cos(0) = 1$ und $\ln(1) = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2-\delta} \tan(x) dx &= \lim_{\eta \rightarrow \pi/2} \int_0^{\eta} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \lim_{\eta \rightarrow \pi/2} [-\ln(\cos(x))]_0^{\eta} \\ &= -\lim_{\eta \rightarrow \pi/2} \ln(\cos(\eta)) + \ln(\cos(0)) = -\lim_{\eta \rightarrow \pi/2} \ln(\cos(\eta)) \end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, da $\cos(\eta) \rightarrow 0$ für $\eta \rightarrow \pi/2$ und $\ln(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow 0$. Damit existiert das uneigentliche Integral $\int_0^{\pi/2} \tan(x) dx$ tatsächlich nicht.

b) Wir berechnen mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos(x)\sin'(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).\end{aligned}$$

Mit der Substitution $y = \tan(x)$ und

$$dy = \tan'(x)dx = (1 + \tan^2(x))dx$$

berechnen wir:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{dy}{y^2 + 1} = \lim_{\eta \rightarrow \pi/2} \int_0^\eta \frac{1 + \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)} dx = \lim_{\eta \rightarrow \pi/2} [x]_0^\eta = \pi/2,$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \rightarrow +\infty \quad \text{falls } x \rightarrow \pi/2,$$

so dass unter $y = \tan(x)$ der Grenzwert $y \rightarrow +\infty$ dem Grenzwert $x \rightarrow \pi/2$ entspricht. Damit existiert das uneigentliche Integral und es ist:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = \pi/2.$$

Folglich existiert auch $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1}$ und es ist tatsächlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = \int_{-\infty}^0 \frac{dy}{y^2 + 1} + \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = 2 \cdot \pi/2 = \pi.$$

c) Wir verwenden die Substitution $x = \sin(t)$ mit $dx = \cos(t)dt$. Wenn t das Intervall $[0, \pi/2]$ durchläuft, so durchläuft $x = \sin(t)$ das Intervall $[0, 1]$. Unter Verwendung von $\delta > 0$ bzw. $\eta < \pi/2$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2-\delta} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} dt \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \pi/2} \int_0^\eta \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} dt \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \pi/2} \int_0^\eta \frac{\cos(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}} dt \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \pi/2} \int_0^\eta dt = \lim_{\eta \rightarrow \pi/2} [t]_0^\eta = \pi/2.\end{aligned}$$

Damit existiert das uneigentliche Integral und es ist:

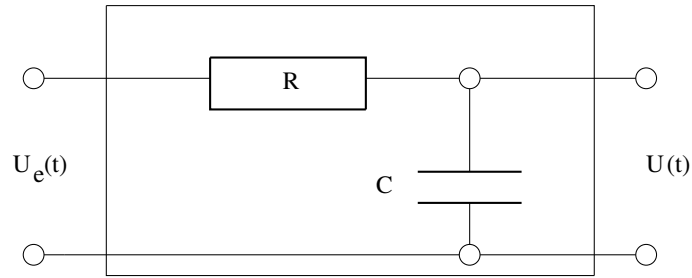
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi/2.$$

Folglich existiert auch das gesuchte uneigentliche Integral und es ist:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Aufgabe 28. (Tiefpassfilter)

Wir betrachten den Tiefpassfilter mit Schaltbild:



Es wird eine stückweise stetig differenzierbare T -periodische Eingangsspannung $U_e(t)$ angelegt, die durch ihre Fourierreihe $U_e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{jk\omega t}$ gegeben ist. Als Ausgangsspannung ergibt sich mit $\omega = 2\pi/T$ (wie in der Vorlesung gesehen):

$$U(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{c_k}{1 + jk\omega RC} \cdot e^{jk\omega t}.$$

a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der T -periodischen Fortsetzung von

$$h(t) = \frac{T}{RC} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T/RC}} e^{-t/RC}, \quad 0 \leq t < T.$$

b) Berechnen Sie die Fourierreihe der Faltung $U_e * h$.

c) Sei $U_e(t)$ die 2-periodische Fortsetzung der Funktion $U_e^0(t) = t$, $-1 < t \leq 1$. Berechnen Sie die Ausgangsspannung $U(t)$ unter Verwendung von Teil b).

Lösung:

a) Der Einfachheit halber schreiben wir

$$h(t) = h_0 \cdot e^{-t/RC}, \quad 0 \leq t < T.$$

mit der Konstante

$$(3) \quad h_0 := \frac{T}{RC} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T/RC}}.$$

Mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ und daher auch $\omega T = 2\pi$ berechnen wir jetzt für die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} c_k^*(h) &= \frac{1}{T} \int_0^T h(t) e^{-jk\omega t} dt = \frac{h_0}{T} \int_0^T e^{-(\frac{1}{RC} + jk\omega)t} dt \\ &= \frac{h_0}{T} \cdot \frac{1}{-(\frac{1}{RC} + jk\omega)} \left[e^{-(\frac{1}{RC} + jk\omega)t} \right]_0^T = \frac{h_0}{T} \cdot \frac{1}{-(\frac{1}{RC} + jk\omega)} \left(e^{-\frac{T}{RC} - jk2\pi} - 1 \right) \\ &= \frac{h_0}{T} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T}{RC}}}{\frac{1}{RC} + jk\omega} = \frac{1}{1 + jk\omega RC}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt h_0 aus (3) eingesetzt haben.

Es ist also

$$h(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + jk\omega RC} e^{jk\omega t}.$$

b) Nach dem Faltungssatz für Fourierreihen, Satz 2.2.7 aus der Vorlesung bzw. dem Skript, ist:

$$U_e * h \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot c_k^*(h) e^{jk\omega t} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{c_k}{1 + jk\omega RC} e^{jk\omega t} = U(t).$$

c) Hier ist $T = 2$, also $\omega = 2\pi/T = \pi$. Nach Teil b) und Satz 2.3.6 können wir die Ausgangsspannung U (zumindest für $|t| \neq 2\pi l + \pi$, $l \in \mathbb{Z}$) als $U_e * h$ darstellen. Allgemein gilt für $\alpha \neq 0$:

$$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$$

ist eine Stammfunktion zu $e^{\alpha x}$, und

$$(4) \quad \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x}$$

ist eine Stammfunktion zu $x e^{\alpha x}$ (einfach Nachrechnen durch Differenzieren, man findet das durch partielle Integration). Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir $\alpha := -1/RC$ und

$$h_0 := \alpha T \cdot \frac{1}{e^{T\alpha} - 1} = 2\alpha \cdot \frac{1}{e^{2\alpha} - 1} = \frac{2\alpha}{e^\alpha} \cdot \frac{1}{e^\alpha - e^{-\alpha}},$$

so dass wieder $h(t) = h_0 e^{-t/RC}$. Mit (4) ist also:

$$\begin{aligned} U(t) &= (U_e * h)(t) = \frac{h_0}{T} \int_{-1}^1 (t-s) e^{-s/RC} ds = \frac{h_0}{2} \int_{-1}^1 (t-s) e^{\alpha s} ds \\ &= \frac{h_0}{2} \frac{1}{\alpha} \left[t e^{\alpha s} - s e^{\alpha s} + \frac{1}{\alpha} e^{\alpha s} \right]_{-1}^1 = \frac{h_0}{2} \frac{1}{\alpha} \left(\left(t + \frac{1}{\alpha}\right) (e^\alpha - e^{-\alpha}) - e^\alpha + e^{-\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{e^\alpha} \left(t + \frac{1}{\alpha} - \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \right) = e^{-\alpha} \left(t - RC + \frac{1 + e^{2\alpha}}{1 - e^{2\alpha}} \right) \\ &= e^{RC} \left(t - RC + \frac{1 + e^{-2/RC}}{1 - e^{-2/RC}} \right) \end{aligned}$$

für $|t| \neq 2\pi l + \pi$, $l \in \mathbb{Z}$. An den Sprungstellen $2\pi l + \pi$, $l \in \mathbb{Z}$, ist Vorsicht geboten. Im vorletzten Schritt haben wir den Bruch mit e^α erweitert.