Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal — Wuppertal, 09.06.2016

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 6

Aufgabe 21. (Konvergenzbegriffe)

Wir betrachten für $k = 1, 2, 3, ...$ die Folge von Funktionen

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto x^k,$$

und die Funktion

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \begin{cases} 0 & , \ 0 \le x < 1, \\ 1 & , \ x = 1. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{f_k\}_k$ punktweise gegen g konvergiert, d.h. für alle $x \in [0,1]$ gilt $f_k(x) \to g(x)$ für $k \to \infty$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{f_k\}_k$ auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen g konvergiert, d.h. es existiert ein Wert $\epsilon > 0$, so dass

$$\max_{0 \le x \le 1} \big| f_k(x) - g(x) \big| \ge \epsilon$$

für unendlich viele Werte von k.

c) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{f_k\}_k$ auf $[0,1]$ im quadratischen Mittel gegen g konvergiert, d.h. $\int_0^1 |f_k(x) - g(x)|^2 dx \to 0$ für $k \to \infty$.

d) Wir betrachten nun noch die Folge von Funktionen

$$h_k : (0,1) \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \frac{k}{1 + k^2 x^2}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{h_k\}_k$ auf $(0,1)$ punktweise gegen die Funktion 0 konvergiert, nicht aber im quadratischen Mittel.

Aufgabe 22. (Konvergenz von Fourierreihen)

Der Sinus Hyperbolicus ist die Funktion

$$\sinh(x) \quad = \quad \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right).$$

Es sei $a > 0$ fest gewählt und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die auf $(-\pi, \pi]$ durch $f(t) = \sinh(at)$ gegeben ist und 2π-periodisch nach ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f. Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe punktweise? Verwenden Sie dazu den Konvergenzsatz 2.3.6 für Fourierreihen aus der Vorlesung. Beweisen Sie, dass keine gleichmäßige Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$ vorliegt.

Bitte wenden.

Aufgabe 23. (Konvergenz von Fourierreihen)

Zeigen Sie, dass auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ die Gleichung

$$x^2 \quad = \quad \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\big(nx\big)$$

gilt, indem Sie $x^2 : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ geeignet nach $\mathbb{R}$ fortsetzen, die reelle Fourierreihe bestimmen und ihre Konvergenz untersuchen.

Aufgabe 24. (Parsevalidentität)

a) Verwenden Sie die Fourierkoeffizienten des gleichgerichteten Sinus $f(t) = |\sin(t)|$ und die Parsevalidentität, um

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

zu berechnen.

b) Kann es eine stückweise stetige Funktion f mit den Fourierkoeffizienten

$$c_k^*(f) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{k}}$$

für $k \neq 0$ geben? (Hinweis: Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.)

c) Gegeben sei eine stückweise stetige 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren erste und zweite Ableitung auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen $c_k^*(f'')$ und $c_k^*(f)$ (Hinweis: gliedweise Differentiation). Verwenden Sie die Parsevalidentität, um zu zeigen, dass:

$$\left|c_k^*(f'')\right| \quad \leq \quad C := \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f''(t)|^2 dt}.$$

Schließen Sie daraus

$$c_k^*(f) \quad \leq \quad \frac{1}{k^2} C,$$

und folgern Sie die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe von f. Verwenden Sie dazu das Kriterium aus Satz 2.3.1 und die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.