Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 09.06.2016

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 6

Aufgabe 21. (Konvergenzbegriffe)

Wir betrachten für $k = 1, 2, 3, ...$ die Folge von Funktionen

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto x^k,$$

und die Funktion

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \begin{cases} 0 & , \ 0 \le x < 1, \\ 1 & , \ x = 1. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{f_k\}_k$ punktweise gegen g konvergiert, d.h. für alle $x \in [0,1]$ gilt $f_k(x) \to g(x)$ für $k \to \infty$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{f_k\}_k$ auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen g konvergiert, d.h. es existiert ein Wert $\epsilon > 0$, so dass

$$\max_{0 \le x \le 1} \big| f_k(x) - g(x) \big| \ge \epsilon \tag{1}$$

für unendlich viele Werte von k.

c) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{f_k\}_k$ auf $[0,1]$ im quadratischen Mittel gegen g konvergiert, d.h. $\int_0^1 |f_k(x) - g(x)|^2 dx \to 0$ für $k \to \infty$.

d) Wir betrachten nun noch die Folge von Funktionen

$$h_k : (0,1) \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \frac{k}{1 + k^2 x^2}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{h_k\}_k$ auf $(0,1)$ punktweise gegen die Funktion 0 konvergiert, nicht aber im quadratischen Mittel.

Lösung:

a) Natürlich ist $f_k(1) = 1$ für alle $k \ge 1$, also

$$f_k(1) \to 1$$

für $k \to \infty$. Ausserdem gilt für x mit $|x| < 1$:

$$\lim_{k\to\infty} x^k \ = \ 0.$$

Das kann so aus den elementaren Mathematik-Vorlesungen (auch ohne exakte Quellenangabe) zitiert werden.

b) Wir zeigen die Aussage für $\epsilon = 1/3$. Wir suchen dafür Punkte $x \in [0,1)$, so dass

$$|x^k - g(x)| = |x^k - 0| = x^k \ > \ \frac{1}{3} \tag{2}$$

wird. Da Wurzeln monoton wachsend sind, ist (2) erfüllt, falls $x > \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$.
Sei dazu p_k die k-te positive Wurzel von $1/2$,

$$p_k \;=\; \sqrt[k]{\frac{1}{2}}.$$

Wir behaupten, dass $p_k < 1$ ist, also $p_k \in [0, 1)$. Angenommen, das wäre nicht der Fall, i.e.,

$$p_k \geq 1.$$

Da $x \mapsto x^k$ monoton wachsend ist wäre dann

$$p_k^k \geq 1^k = 1,$$

also

$$1 \leq p_k^k = (\sqrt[k]{1/2})^k = 1/2,$$

was offensichtlich nicht stimmt. Also ist tatsächlich $p_k \in [0, 1)$. Diese Aussage würden wir in der Klausur aber auch ohne expliziten Beweis glauben.

Jetzt sehen wir:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f_k(x) - g(x)| \;=\; \max_{0 \leq x \leq 1} x^k \geq p_k^k = \frac{1}{2} > \epsilon = \frac{1}{3}.$$

Damit ist (1) für alle $k \geq 1$ erfüllt.

c) Da der Punkt $\{1\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist, können wir $g = 0$ annehmen und berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_k(x) - g(x)|^2 dx \;&=\; \int_0^1 |f_k(x)|^2 dx = \int_0^1 x^{2k} dx = \frac{1}{2k+1} \left[x^{2k+1}\right]_0^1 \\ &=\; \frac{1}{2k+1} \to 0 \end{aligned}$$

für $k \to \infty$.

d) Es ist klar, dass $h_k(x) \geq 0$ ist. Ausserdem gilt

$$0 \;\leq\; h_k(x) \;=\; \frac{k}{1 + k^2 x^2} \;\leq\; \frac{k}{k^2 x^2} \;=\; \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{x^2} \to 0$$

für $k \to \infty$. Daher gilt für alle $x \in (0, 1)$:

$$h_k(x) \to 0$$

für $k \to \infty$ nach dem Sandwich-Theorem/Kriterium für Folgen.

Andererseits ist mit der Substitution $y = kx$ (und $dy = kdx$) im zweiten Schritt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |h_k^2(x) - 0|^2 dx \;&=\; k^2 \int_0^1 \frac{1}{(1 + k^2 x^2)^2} dx = k \int_0^k \frac{1}{(1 + y^2)^2} dy \\ &\geq\; k \int_0^1 \frac{1}{(1 + y^2)^2} dy \geq k \int_0^1 \frac{1}{(1 + 1)^2} dy = k \cdot \frac{1}{4} \to \infty \end{aligned}$$

für $k \to \infty$. Dabei konnten wir im dritten Schritt das Integral verkleinern, in dem wir den Integrationsbereich verkleinern, da der Integrand positiv ist. Im vierten Schritt haben wir

$$(1 + y^2)^2 \leq (1 + 1)^2$$

für $y \leq 1$ ausgenutzt.

Aufgabe 22. (Konvergenz von Fourierreihen)

Der Sinus Hyperbolicus ist die Funktion

$$\sinh(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right).$$

Es sei $a>0$ fest gewählt und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die auf $(-\pi,\pi]$ durch $f(t)=\sinh(at)$ gegeben ist und 2π-periodisch nach ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f. Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe punktweise? Verwenden Sie dazu den Konvergenzsatz 2.3.6 für Fourierreihen aus der Vorlesung. Beweisen Sie, dass keine gleichmäßige Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$ vorliegt.

Lösung:

Die Funktion f hat die Periode $T=2\pi$ und die Kreisfrequenz $\omega=2\pi/T=1$. Wir berechnen daher:

$$\begin{aligned}
2\pi c_k^*(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i\omega kt}dt = \int_{-\pi}^{\pi}\sinh(at)e^{-ikt}dt\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{at-ikt}-e^{-at-ikt}\right)dt\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a-ik}e^{(a-ik)t}\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-a-ik}e^{(-a-ik)t}\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-ik}\left(e^{a\pi}(e^{-i\pi})^k-e^{-a\pi}(e^{i\pi})^k\right)\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+ik}\left(e^{a\pi}(e^{i\pi})^k-e^{-a\pi}(e^{-i\pi})^k\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-ik}\left(e^{a\pi}(-1)^k-e^{-a\pi}(-1)^k\right)\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+ik}\left(e^{a\pi}(-1)^k-e^{-a\pi}(-1)^k\right)\right)\\
&= (-1)^k\left(\frac{1}{a-ik}-\frac{1}{a+ik}\right)\frac{1}{2}\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)\\
&= (-1)^k\frac{(a+ik)-(a-ik)}{(a-ik)(a+ik)}\sinh(a\pi) = (-1)^k\sinh(a\pi)\frac{2ik}{a^2-i^2k^2}\\
&= 2i(-1)^k\sinh(a\pi)\frac{k}{a^2+k^2}.
\end{aligned}$$

Da die Fourierkoeffizienten rein imaginär sind, ist die reelle Fourierreihe:

$$\begin{aligned}
f &\sim c_0^*(f)-\sum_{k=1}^{\infty}2\mathrm{Im}\,\left(c_k^*(f)\right)\sin(k\omega t)\\
&= -\frac{2\sinh(a\pi)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{a^2+k^2}\sin(kt).
\end{aligned}$$

Um das Konvergenzverhalten der Fourierreihe zu bestimmen, untersuchen wir die Regularität der Funktion f. Da e^t unendlich oft stetig differenzierbar ist, gilt dies auch für die Funktion $t \mapsto \sinh(at)$. Damit ist f auf $(-\pi, \pi)$ und somit auf allen Intervallen $(-\pi+2\pi k, \pi+2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, unendlich oft stetig differenzierbar. Es bleibt das Verhalten in den Punkten $2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, zu untersuchen.

Dazu bemerken wir, dass

$$\sinh(at) \begin{cases} > 0 & , \text{ falls } t > 0, \\ = 0 & , \text{ falls } t = 0, \\ < 0 & , \text{ falls } t < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Es ist klar, dass

$$\sinh(a \cdot 0) = \sinh(0) = \frac{1}{2}(e^0 - e^0) = 0.$$

Für die anderen beiden Aussagen sei $t > 0$. Dann ist $at > 0$ und somit $e^{at} > 1$ und $e^{-at} = (e^{at})^{-1} < 1$, so dass folglich

$$e^{at} - e^{-at} > 0$$

und

$$e^{-at} - e^{at} < 0.$$

Wegen (3) ist dann aber auch

$$\sinh(a\pi) > 0$$

und

$$\sinh(-a\pi) = -\sinh(a\pi) < 0.$$

Folglich springt die Funktion f an allen Stellen $2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, von $\sinh(a\pi) > 0$ nach $-\sinh(a\pi)$. Wir wollen Satz 2.3.6 aus der Vorlesung/ dem Skript anwenden. Dazu untersuchen wir den Punkt $t_0 = \pi$ genauer. Da $\sinh(at)$ stetig differenzierbar ist, ist f auf den Intervallen $(t_0 - 1, t_0)$ und $(t_0, t_0 + 1)$ stetig differenzierbar und es gilt

$$f'_-(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f'(t) = \sinh'(a\pi) = \frac{a}{2}\left(e^{a\pi} + e^{-a\pi}\right)$$

und

$$f'_+(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f'(t) = \sinh'(-a\pi) = \frac{a}{2}\left(e^{a\pi} + e^{-a\pi}\right).$$

Damit ist Satz 2.3.6 anwendbar und wir sehen, dass die Fourierreihe von f in den Punkten $2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (also in den Sprungstellen) gegen

$$\begin{aligned} \underline{f}(t_0) &= \frac{1}{2}\big(f_+(t_0) + f_-(t_0)\big) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{t \to \pi \\ t > \pi}} f(t) + \lim_{\substack{t \to \pi \\ t < \pi}} f(t)\right) \\ &\ \frac{1}{2}\big(\sinh(-a\pi) + \sinh(a\pi)\big) = \frac{1}{2}\big(-\sinh(a\pi) + \sinh(a\pi)\big) = 0 \end{aligned}$$

konvergiert. In allen anderen Punkten konvergiert die Fourierreihe gegen f selbst.

Die Fourierreihe konvergiert also gegen die Grenzfunktion

$$\underline{f}(t) \;=\; \begin{cases} f(t) & ,t \neq 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & ,t = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

die in den Punkten $2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht stetig ist, da

$$f_-(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f'(t) = \sinh(a\pi) > 0$$

und

$$f_+(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f'(t) = \sinh(-a\pi) = -\sinh(a\pi) < 0.$$

Würde die Fourierreihe gleichmäßig konvergieren, so müsste die Grenzfunktion $\underline{f}$ nach Satz 2.3.1 aus der Vorlesung aber stetig sein.

Aufgabe 23. (Konvergenz von Fourierreihen)

Zeigen Sie, dass auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ die Gleichung

$$x^2 \;=\; \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\big(nx\big)$$

gilt, indem Sie $x^2 : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ geeignet nach $\mathbb{R}$ fortsetzen, die reelle Fourierreihe bestimmen und ihre Konvergenz untersuchen.

Lösung:

Wir setzen die Funktion

$$f_0 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto x^2$$

2π-periodisch zu einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fort, d.h. es ist

$$f(x) \;=\; f_0\left(x - 2\pi\left[\frac{x}{2\pi}\right]\right),$$

wobei $[\cdot]$ die Gauß-Klammer bezeichnet. Wegen $f_0(\pi) = f_0(-\pi) = \pi^2$ ist f stetig. Ausserdem ist f außerhalb der Punkte $2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, stetig differenzierbar, also stückweise stetig differenzierbar.

Für die Fourierreihe von f berechnen wir:

$$c_0^*(f) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\left[x^3/3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{1}{3}\pi^2.$$

Für $k \neq 0$ ist ausserdem:

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot c_k^*(f) \;&=\; \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-ikx} dx = \big[g_1 h\big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g_1'(x)h(x)dx \\ &=\; \frac{1}{-ik}\left[x^2 e^{-ikx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx \;, \end{aligned}$$

wobei wir die partielle Integration mit $g_1(x) = x^2$, $g_1'(x) = 2x$, $h(x) = \frac{1}{-ik}e^{-ikx}$ und $h'(x) = e^{-ikx}$ verwendet haben.

Hier nun verwenden wir eine weitere partielle Integration mit $g_2(x) = x$, $g_2'(x) = 1$, $h(x) = \frac{1}{-ik}e^{-ikx}$ und $h'(x) = e^{-ikx}$ und erhalten weiter:

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{1}{-ik}\left[x^2 e^{-ikx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{ik}\left[g_2 h\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} g_2'(x)h(x)dx \\
&= \frac{\pi^2}{-ik}\left(\left(e^{-i\pi}\right)^k - \left(e^{i\pi}\right)^k\right) + \frac{2}{ik}\cdot\frac{1}{-ik}\left[xe^{-ikx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{ik}\cdot\frac{1}{-ik}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}dx \\
&= \frac{\pi^2}{-ik}\left((-1)^k - (-1)^k\right) + \frac{2\pi}{k^2}\left(e^{-ik\pi} + e^{ik\pi}\right) - \frac{2}{k^2}\cdot\frac{1}{-ik}\left[e^{-ikx}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0 + \frac{2\pi}{k^2}\left((-1)^k + (-1)^k\right) - \frac{2}{k^2}\cdot\frac{1}{-ik}\left((e^{-i\pi})^k - (e^{i\pi})^k\right) \\
&= \frac{4\pi}{k^2}(-1)^k - \frac{2}{k^2}\cdot\frac{1}{-ik}\left((e^{-i\pi})^k - (e^{i\pi})^k\right) \\
&= \frac{4\pi}{k^2}(-1)^k - \frac{2}{k^2}\cdot\frac{1}{-ik}\left((-1)^k - (-1)^k\right) = 4\pi\frac{(-1)^k}{k^2},
\end{aligned}$$

also

$$c_k^*(f) = 2\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Die komplexe Fourierreihe von f ist damit:

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{(-1)^k}{k^2}e^{ikx}$$

Da die Fourierkoeffizienten alle rein reellwertig sind, ist die reelle Fourierreihe:

$$\begin{aligned}
f &\sim c_0^*(f) + \sum_{k\geq 1} 2\mathrm{Re}\ c_k^*(f)\cos(kx) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx).
\end{aligned}$$

Wir wollen nun Satz 2.3.6, Teil c), aus der Vorlesung bzw. dem Skript anwenden. Wir wissen schon, dass f stetig und ausserhalb der Punkte $2k\pi + \pi$ stetig differenzierbar ist. Nun gilt für $x \in (-\pi, \pi)$:

$$|f'(x)| = |2x| \leq 2\pi.$$

Somit gilt $|f'| \leq 2\pi$ in allen Punkten, in denen f differenzierbar ist und wir können Satz 2.3.6 anwenden. Es folgt, dass die Fourierreihe von f gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert. Somit ist wie gewünscht:

$$x^2 = f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$$

für alle $x \in (-\pi, \pi)$.

Aufgabe 24. (Parsevalidentität)

a) Verwenden Sie die Fourierkoeffizienten des zweiweg-gleichgerichteten Sinus $f(t) = |\sin(t)|$ und die Parsevalidentität, um

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

zu berechnen.

b) Kann es eine stückweise stetige Funktion f mit den Fourierkoeffizienten

$$c_k^*(f) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{|k|}}$$

für $k \neq 0$ geben? (Hinweis: Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.)

c) Gegeben sei eine stückweise stetige 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren erste und zweite Ableitung auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen $c_k^*(f'')$ und $c_k^*(f)$ (Hinweis: gliedweise Differentiation). Verwenden Sie die Parsevalidentität, um zu zeigen, dass:

$$\left|c_k^*(f'')\right| \quad \leq \quad C := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)|^2 dt}.$$

Schließen Sie daraus

$$|c_k^*(f)| \quad \leq \quad \frac{1}{k^2} C,$$

für $k \neq 0$, und folgern Sie die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe von f. Verwenden Sie dazu das Kriterium aus Satz 2.3.1 und die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Lösung:

a) Es sei $f(t) = |\sin(t)|$ der zweiweg-gleichgerichtete Sinus, eine reelle Funktion mit Periode π und Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 2$. In Aufgabe 18, Teil c), haben wir die komplexe Fourierreihe berechnet als

$$f \quad \sim \quad \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1-4k^2} e^{2ikt}.$$

Die Fourierkoeffizienten sind

$$c_k^*(f) \quad = \quad \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1-4k^2}.$$

Nach der Parsevalidentität (Satz 2.3.5) gilt nun:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^*(f)|^2 \quad = \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(t)|^2 dt$$

Da $|sin(t)|$ π-periodisch ist, gilt:

$$\int_0^{\pi} |\sin(t)|^2 dt \quad = \quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2}\pi,$$

wobei wir das letzte Integral in Aufgabe 9, Teil e), berechnet hatten.

Setzen wir dies und die Fourierkoeffizienten in die Parsevalidentität ein, so erhalten wir:

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1-4k^2)^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k^*(f)|^2 \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(t)|^2 dt = \frac{1}{2},$$

also

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1-4k^2)^2} \quad = \quad \frac{\pi^2}{8}.$$

Wir müssen nun noch die Summe "zurechtstutzen". Dazu betrachten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1-4k^2)^2} &= \sum_{k\leq 1}\frac{1}{(1-4k^2)^2}+1+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(1-4k^2)^2}\\ &= 1+2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(1-4k^2)^2},\end{aligned}$$

was wir umformen können zu

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(1-4k^2)^2} \quad = \quad -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1-4k^2)^2} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right).$$

b) Nach der Parsevalidentität gilt:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k^*(f)|^2 = c_0^*(f)^2 + 2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k},$$

was nicht sein kann, da die linke Seite der Gleichung endlich ist, während die harmonische Reihe $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$ aber divergiert.

c) Mit der Periode $T = 2\pi$ hat f die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 1$. Da beide Ableitungen existieren und stetig sind, dürfen wir den Satz über gliedweise Differentiation (Hilfssatz 2.2.4) anwenden und erhalten:

$$c_k^*(f') \quad = \quad i\omega k\cdot c_k^*(f) = ik\cdot c_k^*(f), \tag{4}$$

$$c_k^*(f'') \quad = \quad i\omega k\cdot c_k^*(f') = i^2k^2\cdot c_k^*(f) = -k^2\cdot c_k^*(f). \tag{5}$$

Nach der Parsevalidentität ist für alle $k\in\mathbb{Z}$:

$$|c_k^*(f'')|^2 \quad \leq \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n^*(f'')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f''(t)|^2 dt,$$

also wie gewünscht

$$\left|c_k^*(f'')\right| \quad \leq \quad C := \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f''(t)|^2 dt},$$

wobei das Integral existiert da f'' stetig ist. Mit (5) folgt für $k\neq 0$:

$$|c_k^*(f)| \quad = \quad \frac{1}{k^2}|c_k^*(f'')| \leq \frac{1}{k^2}C. \tag{6}$$

Betrachten wir nun also die Fourierreihe (mit $\omega = 1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^*(f)e^{ikt} &= c_0^*(f) + \sum_{k\geq 1} c_k^*(f)e^{ikt} + \sum_{k\geq 1} c_{-k}^*(f)e^{-ikt} \\
&= c_0^*(f) + \sum_{k\geq 1} f_k(t) + \sum_{k\geq 1} f_{-k}(t),
\end{aligned}$$

wobei wir über die Funktionen

$$f_k(t) = c_k^*(f)e^{ikt}$$

aufsummieren. Unter Verwendung von

$$\begin{aligned}
|e^{ikt}|^2 &= |\cos(kt) + i\sin(kt)|^2 \\
&= \big(\mathrm{Re}\ (\cos(kt) + i\sin(kt))\big)^2 + \big(\mathrm{Im}\ (\cos(kt) + i\sin(kt))\big)^2 \\
&= \cos^2(kt) + \sin^2(kt) = 1.
\end{aligned}$$

(siehe Aufgabe 9, Teil d)) ist

$$|f_k(t)| = |c_k^*(f)| \cdot |e^{ikt}| = |c_k^*(f)| =: c_k.$$

Ausserdem ist mit (6):

$$\sum_{k\geq 1} c_k = \sum_{k\geq 1} |c_k^*(f)| \leq C\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Also ist das Konvergenzkriterium Satz 2.3.1, Teil b), anwendbar und wir erhalten die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe von f.