Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 02.06.2016

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 5

Aufgabe 17. (Pulsfunktion)

Wir betrachten die Pulsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die sich als periodische Fortsetzung von

$$f_0(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & , \ 0 \leq x < 1 \ , \\ -1 & , \ 1 \leq x < 2 \ , \end{cases}$$

nach ganz $\mathbb{R}$ ergibt, d.h. $f(x) = f_0\big(x - 2[x/2]\big)$. Berechnen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe von f.

Aufgabe 18. (Dilatation und Translation)

a) Beweisen Sie Hilfssatz 2.2.3 aus der Vorlesung. D.h. es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, T-periodische Funktion und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann definieren wir die beiden neuen Funktionen f_a und $\tau_a f$:

$$f_a(t) := f(at) \qquad , \qquad (\tau_a f)(t) := f(t + a).$$

Zeigen Sie: Mit $\omega = 2\pi/T$ ist

$$\begin{aligned} f_a \quad &\sim \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^*(f) e^{i\omega a k t} \\ \tau_a f \quad &\sim \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \big(e^{i\omega a k} c_k^*(f)\big) e^{i\omega k t} \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 17) die komplexe und die reelle Fourierreihe der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die sich als periodische Fortsetzung von

$$g_0(x) \quad = \quad \begin{cases} -3 & , \ 0 \leq x < 2 \ , \\ 3 & , \ 2 \leq x < 4 \ , \end{cases}$$

nach ganz $\mathbb{R}$ ergibt.

c) Berechnen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 14) die komplexe und die reelle Fourierreihe des zweiweg-gleichgerichteten Sinus

$$h(t) \quad = \quad |\sin(t)|.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 19. (Differentiation und Integration)

a) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die π-periodische Fortsetzung von

$$h_0 : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C} \ , \ \ h_0(t) = -\sin(t)$$

nach ganz $\mathbb{R}$. Berechnen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe von h unter Verwendung von Aufgabe 14. Durch welche Rechenregel erhält man die reelle Fourierreihe von h direkt aus der reellen Fourierreihe des zweiweg-gleichgerichteten Kosinus aus Aufgabe 14?

b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Ableitung der Sägezahnfunktion aus der Vorlesung (wo sie existiert). Folgern Sie, dass der Satz über gliedweise Differentiation, Hilfssatz 2.2.4 aus der Vorlesung, nur auf stetige Funktionen anwendbar ist.

c) Wir betrachten die Zackenfunktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die sich durch periodische Fortsetzung von

$$z_0(t) \quad = \quad \begin{cases} t & , \ 0 \le t \le 1 \ , \\ 2 - t & , \ 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

nach ganz $\mathbb{R}$ ergibt. Verwenden Sie die Pulsfunktion aus Aufgabe 17, um die komplexe und die reelle Fourierreihe von z mit Hilfssatz 2.2.5 zu bestimmen.

Aufgabe 20. (Faltung)

a) Verwenden Sie Aufgabe 13, Teil c), und Aufgabe 9, Teil b), um die komplexe Fourierreihe von $\sin(t)$ und $\cos(t)$ zu bestimmen.

b) Sei f die Pulsfunktion aus Aufgabe 17 und $g(x) = \sin(\pi t)$. Bestimmen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe von $f * g$.

c) Bestimmen Sie die komplexen und reellen Fourierreihen der Faltungen:

$$\sin * \sin \quad , \quad \sin * \cos \quad , \quad \sin^2 * \sin \, .$$