Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 02.06.2016

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 5

Aufgabe 17. (Pulsfunktion)

Wir betrachten die Pulsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die sich als periodische Fortsetzung von

$$f_0(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & , \ 0 \le x < 1 \ , \\ -1 & , \ 1 \le x < 2 \ , \end{cases}$$

nach ganz $\mathbb{R}$ ergibt, d.h. $f(x) = f_0\big(x - 2[x/2]\big)$. Berechnen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe von f.

Lösung:

f hat die Periode $T = 2$ und die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = \pi$. Zunächst ist

$$c_0^*(f) \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 dt - \int_1^2 dt\right) = 0.$$

Für $k \neq 0$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} c_k^*(f) \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ik\pi t}dt - \frac{1}{2}\int_1^2 e^{-ik\pi t}dt \\ &= \quad \frac{1}{2}\left(\big[\frac{i}{k\pi}e^{-ik\pi t}\big]_0^1 - \big[\frac{i}{k\pi}e^{-ik\pi t}\big]_1^2\right) \\ &= \quad \frac{i}{2k\pi}\big((e^{-i\pi})^k - 1 - 1 + (e^{-i\pi})^k\big) = \frac{i}{k\pi}\big((-1)^k - 1\big) \end{aligned}$$

Damit ist also

$$c_k^*(f) \quad = \quad \begin{cases} 0 & , \ k \text{ gerade,} \\ -\frac{2i}{\pi k} & , \ k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und somit die komplexe Fourierreihe:

$$f \quad \sim \quad -\frac{2i}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k} e^{i\pi k t}$$

Wegen

$$\text{Re}\left(-\frac{2i}{k\pi}\right) = 0 \quad , \quad \text{Im}\left(-\frac{2i}{\pi k}\right) = -\frac{2}{\pi k} \ ,$$

berechnen wir für die reelle Fourierreihe:

$$\begin{aligned} f \quad &\sim \quad c_0^*(f) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re } c_k^*(f)\cos(k\omega t) - 2\text{Im } c_k^*(f)\sin(k\omega t) \\ &= \quad \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k \ge 1 \\ k \text{ ungerade}}} \frac{\sin(k\pi t)}{k} = \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin\big(\pi(2l-1)t\big)}{2l-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 18. (Dilatation und Translation)

a) Beweisen Sie Hilfssatz 2.2.3 aus der Vorlesung. D.h. es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, T-periodische Funktion und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann definieren wir die beiden neuen Funktionen f_a und $\tau_a f$:

$$f_a(t) := f(at) \qquad , \qquad (\tau_a f)(t) := f(t+a).$$

Zeigen Sie: Mit $\omega = 2\pi/T$ ist

$$\begin{aligned} f_a &\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^*(f) e^{i\omega akt} \\ \tau_a f &\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(e^{i\omega ak} c_k^*(f)\big) e^{i\omega kt} \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 17) die komplexe und die reelle Fourierreihe der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die sich als periodische Fortsetzung von

$$g_0(x) = \begin{cases} -3 & , \ 0 \le x < 2 \ , \\ 3 & , \ 2 \le x < 4 \ , \end{cases}$$

nach ganz $\mathbb{R}$ ergibt.

c) Berechnen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 14) die komplexe und die reelle Fourierreihe des zweiweg-gleichgerichteten Sinus

$$h(t) = |\sin(t)|.$$

Lösung:

a) f_a hat die Periode $\tilde{T} = T/a$ und die Kreisfrequenz $\tilde{\omega} = 2\pi/\tilde{T} = 2\pi a/T = a\omega$. Unter Verwendung der Substitution $s = at$ (mit $ds = adt$), d.h. $t = s/a$ und $dt = ds/a$, berechnen wir:

$$\begin{aligned} c_k^*(f_a) &= \frac{1}{\tilde{T}} \int_0^{\tilde{T}} f_a(t) e^{-i\tilde{\omega}kt} dt = \frac{a}{T} \int_0^{T/a} f(at) e^{-ia\omega kt} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(s) e^{-i\omega ks} ds = c_k^*(f) \end{aligned}$$

Daher ist:

$$f_a \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^*(f_a) e^{i\tilde{\omega}kt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^*(f) e^{ia\omega kt}$$

Die Funktion $\tau_a f$ ist natürlich wieder T-periodisch. Zur Berechnung der Fourierreihe dürfen wir nach Aufgabe 16, Teil a), über ein beliebiges Intervall der Länge T integrieren. Daher berechnen wir mit der Substitution $s = t + a$ (mit $ds = dt$):

$$\begin{aligned} c_k^*(\tau_a f) &= \frac{1}{T} \int_{-a}^{T-a} (\tau_a f)(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_a^{T+a} f(t+a) e^{-ik\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(s) e^{-ik\omega(s-a)} ds = e^{ik\omega a} \frac{1}{T} \int_0^T f(s) e^{-ik\omega s} ds = e^{ik\omega a} c_k^*(f), \end{aligned}$$

und das liefert die gesuchte Fourierreihe von $\tau_a f$.

b) Sei f die Funktion aus Aufgabe 17 mit Periode $T = 2$ und Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = \pi$. Dann ist:

$$g = 3\tau_b(f_a)$$

mit $a = 1/2$ und $b = 2$, denn

$$3\tau_b(f_a)(t) = 3\tau_b\big(t \mapsto f(at)\big) = 3f\big(a(t+b)\big) = 3f\big(\frac{t}{2}+1\big) = \begin{cases} -3 & , \ 0 \le t < 2, \\ 3 & , \ 2 \le t < 4. \end{cases}$$

Damit hat g die Periode $\tilde{T} = T/a = 4$ und die Kreisfrequenz $\tilde{\omega} = 2\pi/\tilde{T} = a\omega = \pi/2$. Nach Teil a) ist $c_k^*(f_a) = c_k^*(f)$ und dann

$$c_k^*(g) = 3e^{i\tilde{\omega}bk}c_k^*(f_a) = 3e^{i\tilde{\omega}bk}c_k^*(f) = 3(e^{i\pi})^k c_k^*(f) = 3(-1)^k c_k^*(f)$$

Setzen wir also $c_k^*(f)$ aus Aufgabe 17 ein, so ergibt sich:

$$c_k^*(g) = 3(-1)^k c_k^*(f) = 3(-1)^k \frac{i}{k\pi}\big((-1)^k - 1\big) = \frac{6i}{k\pi}\begin{cases} 0 & , \ k \text{ gerade }, \\ 1 & , \ k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die komplexe Fourierreihe ist also

$$g \sim \frac{6i}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k} e^{ik\pi t/2}.$$

Wegen $c_k^*(g) = i\mathrm{Im}\ c_k^*(g)$ und $\mathrm{Re}\ c_k^*(g) = 0$ ergibt sich die reelle Fourierreihe als:

$$\begin{aligned} g &\sim c_0^*(g) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\ c_k^*(g)\cos(k\tilde{\omega}t) - 2\mathrm{Im}\ c_k^*(g)\sin(k\tilde{\omega}t) \\ &= -\frac{12}{\pi} \sum_{\substack{k \text{ ungerade} \\ k \ge 1}} \frac{\sin\big((k\tilde{\omega}t\big)}{k} \\ &= -\frac{12}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin\big((2l+1)\pi t/2\big)}{2l+1} \end{aligned}$$

c) Wir betrachten hier Funktionen mit der Periode $T = \pi$ und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 2$. Wegen $\sin(t) = \cos(t - \pi/2)$ ist $|\sin| = \tau_{-\pi/2}|\cos|$. Mit dem Ergebnis aus Aufgabe 14 ist also nach Teil a):

$$\begin{aligned} c_k^*\big(|\sin|\big) &= e^{i\omega(-\frac{\pi}{2})k}c_k^*\big(|\cos|\big) = (e^{-i\pi})^k = (-1)^k c_k^*\big(|\cos|\big) \\ &= (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{1-4k^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1-4k^2}. \end{aligned}$$

Damit ist die komplexe Fourierreihe:

$$|\sin| \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1-4k^2} e^{i2kt}$$

Da die Koeffizienten alle reell sind, d.h. $\mathrm{Re}\ c_k^* = c_k^*$ und $\mathrm{Im}\ c_k^* = 0$, erhalten wir die reelle Fourierreihe:

$$|\sin| \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kt)}{1-4k^2}$$

Aufgabe 19. (Differentiation und Integration)

a) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die π-periodische Fortsetzung von

$$h_0 : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}\ ,\ \ h_0(t) = -\sin(t)$$

nach ganz $\mathbb{R}$. Berechnen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe von h unter Verwendung von Aufgabe 14. Durch welche Rechenregel erhält man die reelle Fourierreihe von h direkt aus der reellen Fourierreihe des zweiweg-gleichgerichteten Kosinus aus Aufgabe 14?

b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Ableitung der Sägezahnfunktion aus der Vorlesung (wo sie existiert). Folgern Sie, dass der Satz über gliedweise Differentiation, Hilfssatz 2.2.4 aus der Vorlesung, nur auf stetige Funktionen anwendbar ist.

c) Wir betrachten die Zackenfunktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die sich durch periodische Fortsetzung von

$$z_0(t) \quad = \quad \begin{cases} t & ,\ 0 \le t \le 1\ , \\ 2-t & ,\ 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

nach ganz $\mathbb{R}$ ergibt. Verwenden Sie die Pulsfunktion aus Aufgabe 17, um die komplexe und die reelle Fourierreihe von z mit Hilfssatz 2.2.5 zu bestimmen.

Lösung:

a) Der zweiweg-gleichgerichtete Kosinus $f(t) = |\cos(t)|$ ist die periodische Fortsetzung der π-periodischen Funktion

$$f_0 : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C} \quad , \quad t \mapsto \cos(t)\ ,$$

nach ganz $\mathbb{R}$. Damit ist f außerhalb der Punkte $k\pi + \pi/2$ stetig differenzierbar und f' ist auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ die π-periodische Fortsetzung von

$$f_0' = h_0 : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C} \quad , \quad t \mapsto -\sin(t).$$

Da f stetig ist können wir den Satz über gliedweise Differentiation, Hilfssatz 2.2.4, anwenden und erhalten (mit $\omega = 2\pi/T = 2$) die komplexe Fourierreihe:

$$\begin{aligned} h = f' \quad &\sim \quad i\omega \sum_{k\in\mathbb{Z}} k c_k^*(f) e^{i\omega kt} = 2i \sum_{k\in\mathbb{Z}} k c_k^*(f) e^{i2kt} \\ &= \quad \frac{4i}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k(-1)^k}{1-4k^2} e^{i2kt} \end{aligned}$$

Da

$$c_k^*(h) \quad = \quad \frac{4i}{\pi} \cdot \frac{k(-1)^k}{1-4k^2}$$

rein imaginär ist, erhalten wir für die reelle Fourierreihe:

$$h \sim -\frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{1-4k^2} \sin(2kt)$$

Die reelle Fourierreihe von h entsteht aus der reellen Fourierreihe von $f(t) = |\cos(t)|$ durch Differenzieren der einzelnen Summanden.

b) In der Vorlesung haben wir die 2π-periodische Sägezahnfunktion f betrachtet, die sich als periodische Fortsetzung aus

$$f_0 : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}\ ,\ t \mapsto f_0(t) = t\ ,$$

ergibt. Als Fourierreihe haben wir

$$f \quad \sim \quad \pi + i \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{1}{k} e^{ikt}$$

ermittelt. Die Ableitung der stückweise stetig differenzierbaren Funktion f ist (wo sie existiert) die konstante Funktion 1 und somit

$$f' = 1 \quad \sim \quad c_0^*(f') = 1$$

die Fourierreihe der Ableitung. Würden wir Hilfssatz 2.2.4 auf f anwenden, was aber nicht erlaubt ist, da f nicht stetig ist, so erhielten wir stattdessen hingegen:

$$f' \quad \sim \quad -\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} e^{ikt}.$$

Dies zeigt, dass die Stetigkeit von f in Hilfssatz 2.2.4 tatsächlich eine notwendige Voraussetzung ist.

c) Dort wo die Ableitung der Zackenfunktion existiert, d.h. auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, ist sie gleich der Pulsfunktion f aus Aufgabe 17: $z' = f$. Beide Funktionen haben die Periode $T = 2$ und die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = \pi$. Wir erhalten z aus f durch die Integration

$$z(t) \quad = \quad \int_0^t f(x)dx,$$

und es gilt:

$$z(T) \quad = \quad \int_0^T f(x)dx = \int_0^1 dx - \int_1^2 dx = 0.$$

Damit können wir den Satz über gliedweise Integration, Hilfssatz 2.2.5, aus der Vorlesung anwenden und finden:

$$z \quad \sim \quad c_0(z) + \frac{1}{i\pi} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{1}{k} c_k^*(f) e^{i\pi kt} = c_0(z) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k \text{ ungerade}}} \frac{1}{k^2} e^{i\pi kt}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} c_0(z) \quad &= \quad -\frac{1}{2}\int_0^2 sf(s)ds = -\frac{1}{2}\int_0^1 sds + \frac{1}{2}\int_1^2 sds = \frac{1}{2}\left(-[s^2/2]_0^1 + [s^2/2]_1^2\right) \\ &= \quad \frac{1}{2}\big(-1/2 + 2 - 1/2\big) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Da die Fourierkoeffizienten von f alle reellwertig sind, erhalten wir als reelle Fourierreihe:

$$z \quad \sim \quad \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{k\geq 1\\ k \text{ ungerade}}} \frac{\cos(\pi kt)}{k^2}.$$

Aufgabe 20. (Faltung)

a) Verwenden Sie Aufgabe 13, Teil c), und Aufgabe 9, Teil b), um die komplexe Fourierreihe von $\sin(t)$ und $\cos(t)$ zu bestimmen.

b) Sei f die Pulsfunktion aus Aufgabe 17 und $g(x) = \sin(\pi t)$. Bestimmen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe von $f * g$.

c) Bestimmen Sie die komplexen und reellen Fourierreihen der Faltungen:

$$\sin * \sin \quad , \quad \sin * \cos \quad , \quad \sin^2 * \sin\,.$$

Lösung:

a) Nach Aufgabe 13, Teil c), stimmt die komplexe Fourierreihe eines komplexen trigonometrischen Polynoms mit dem Polynom selbst überein. Die selbe Aussage gilt auch für reelle trigonometrische Polynome und ihre reelle Fourierreihe. Das läßt sich analog zeigen oder aus dem Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Fourierreihen und dem analogen Zusammenhang zwischen reellen und komplexen trigonometrischen Polynomen direkt ablesen.

Aus Aufgabe 9, Teil b), wissen wir, dass

$$\sin(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \ , \tag{1}$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{it}\right) \ , \tag{2}$$

wobei beide Funktionen 2π-periodisch sind, also mit Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 1$. Da die Darstellung von sin und cos als komplexe trigonometrische Polynome mit der komplexen Fourierreihe übereinstimmt stellen die rechten Seiten in (1), (2) schon die komplexen Fourierreihen dar. Für die Fourierkoeffizienten gilt:

$c_1^*(\sin) = 1/2i$, $c_{-1}^*(\sin) = -1/2i$ und alle anderen Fourierkoeffizienten verschwinden.

$c_1^*(\cos) = 1/2$, $c_{-1}^*(\cos) = 1/2$ und alle anderen Fourierkoeffizienten verschwinden.

b) Sowohl die Pulsfunktion f aus Aufgabe 17 als auch $g(t) = \sin(\pi t)$ haben die Periode $T = 2$ und die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = \pi$. Nach Aufgabe 17 ist

$$c_k^*(f) = \begin{cases} 0 & , \ k \text{ gerade,} \\ -\frac{2i}{\pi k} & , \ k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Ausserdem ist nach Aufgabe 18, Teil a):

$$c_k^*\big(\sin(\pi t)\big) = c_k^*\big(\sin(t)\big),$$

so dass $c_1^*(g) = 1/2i$, $c_{-1}^*(g) = -1/2i$ und alle anderen Fourierkoeffizienten von g verschwinden.

Nach dem Satz über die Fourierkoeffizienten der Faltung, Hilfssatz 2.2.7 gilt:

$$c_k^*(f * g) = c_k^*(f) \cdot c_k^*(g).$$

Wegen $c_k^*(g) = 0$ für $k \neq 1, -1$ folgt:

$$c_k^*(f * g) \;=\; \begin{cases} 0 & , \; k \neq 1, -1 \; , \\ -\frac{1}{\pi} & , \; k = 1, -1 \; . \end{cases}$$

Die komplexe Fourierreihe ist also:

$$f * g \;\sim\; -\frac{1}{\pi}\left(e^{i\pi t} + e^{-i\pi t}\right)$$

Da beide Fourierkoeffizienten reell sind, ist die reelle Fourierreihe:

$$f * g \;\sim\; -\frac{2}{\pi}\cos\left(\pi t\right).$$

c) Alle zu faltenden Funktionen haben die Periode 2π mit Kreisfrequenz $\omega = 1$. Wir kennen schon die komplexen Fourierreihen von sin und cos und berechnen noch sie noch für $\sin^2$:

$$\begin{aligned} \sin^2(t) &= \left(\frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2it} - 2e^{it-it} + e^{-2it}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{2it} - 2 + e^{-2it}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2it} - \frac{1}{4}e^{-2it}, \end{aligned}$$

d.h. es gilt:

$$c_0^*(\sin^2) = \frac{1}{2} \;\;,\;\; c_2^*(\sin^2) = -\frac{1}{4} \;\;,\;\; c_{-2}^*(\sin^2) = -\frac{1}{4},$$

und alle anderen Fourierkoeffizienten verschwinden.

Analog zu Teil b) berechnen wir die komplexen und reellen Fourierreihen mit

$$c_k^*(f * g) \;=\; c_k^*(f) \cdot c_k^*(g).$$

als:

$$\begin{aligned} \sin * \sin &\sim \left(\frac{1}{2i}\right)^2 e^{it} + \left(-\frac{1}{2i}\right)^2 e^{-it} = -\frac{1}{4}e^{it} + \frac{1}{4}e^{-it} \\ &= -\frac{1}{2}\cos(t) \\ \sin * \cos &\sim \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{2}e^{it} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{2}e^{-it} = \frac{1}{4i}e^{it} - \frac{1}{4i}e^{-it} \\ &= \frac{1}{2}\sin(t) \\ \sin^2 * \sin &\sim -\frac{1}{4} \cdot 0e^{-2it} - 0 \cdot \frac{1}{2i}e^{-it} + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2i}e^{it} - \frac{1}{4} \cdot 0e^{i2t} = 0 \end{aligned}$$