Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 4

Aufgabe 13.

a) Es sei

$$P(t) \;=\; \alpha_0 + \sum_{k=1}^{r} \big(\alpha_k \sin(k\omega t) + \beta_k \cos(k\omega t)\big)$$

ein reelles trigonometrisches Polynom, d.h. mit Koeffizienten $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$. Dabei ist $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, eine nicht-negative ganze Zahl und $\omega > 0$ die Kreisfrequenz von P. Verwenden Sie Aufgabe 9, Teil b), um P als komplexes trigonometrisches Polynom darzustellen, d.h. finden Sie Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, so dass:

$$P(t) \;=\; \sum_{k=-r}^{r} a_k e^{ik\omega t}$$

b) Für nicht-negative ganze Zahlen $s, r \in \mathbb{Z}$ und komplexe Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ sei nun umgekehrt

$$Q(t) \;=\; \sum_{k=-s}^{r} a_k e^{ik\omega t}$$

ein komplexes trigonometrisches Polynom, das nur reelle Werte annimmt, d.h. es sei $\overline{Q(t)} = Q(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$a_{-k} \;=\; \overline{a_k}\ , \tag{1}$$

indem Sie zunächst $Q(t) - \overline{Q(t)}$ als komplexes trigonometrisches Polynom darstellen und dann Hilfssatz 1.2.5, Teil c), aus der Vorlesung verwenden. Folgern Sie aus (1), dass sich Q auch als reelles trigonometrisches Polynom darstellen läßt und geben Sie die Darstellung an.

c) Begründen Sie, dass ein komplexes trigonometrisches Polynom wie $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aus Teil b) stückweise stetig ist mit Periode $T = 2\pi/\omega$, und berechnen Sie die Fourierreihe zu Q. Verwenden Sie dazu Aufgabe 11 bzw. Hilfssatz 1.2.4, Teil a), aus der Vorlesung.

Aufgabe 14.

Berechnen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe des Zweiweg-gleichgerichteten Kosinus, d.h. von

$$f(t) = |\cos(t)|.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 15.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige T-periodische Funktion, d.h. mit Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$. Zeigen Sie:

a) Ist f gerade, d.h. $f(-t) = f(t)$, so gilt für die Fourierkoeffizienten:

$$c_k^*(f) \quad = \quad \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(\omega k t) dt.$$

b) Ist f ungerade, d.h. $f(-t) = -f(t)$, so gilt für die Fourierkoeffizienten:

$$c_k^*(f) \quad = \quad \frac{-2i}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(\omega k t) dt.$$

Aufgabe 16.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige T-periodische Funktion, d.h. eine Funktion mit Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$.

a) Sei $[\alpha, \beta]$ ein Intervall mit $\beta - \alpha = T$. Zeigen Sie, dass dann

$$c_k^*(f) \quad = \quad \frac{1}{T} \int_\alpha^\beta f(t) e^{-ik\omega t} dt$$

gilt, d.h. wir können frei auswählen, über welches Intervall der Länge T wir integrieren, um die Fourierkoeffizienten zu bestimmen.

b) Zeigen Sie: Nimmt f nur reelle Werte an, d.h. ist $\overline{f(t)} = f(t)$, so gilt:

$$c_{-k}^*(f) \quad = \quad \overline{c_k^*(f)}$$

Damit folgt dann für $k \neq 0$:

$$c_k^*(f) e^{ik\omega t} + c_{-k}^*(f) e^{-ik\omega t} \quad = \quad 2\mathrm{Re}\, c_k^*(f) \cos(k\omega t) - 2\mathrm{Im}\, c_k^*(f) \sin(k\omega t).$$

Verwenden Sie diese Aussage, um in Aufgabe 13 Teil b) aus Teil c) ohne Rechnungen herzuleiten.