Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 26.05.2016

Mathematatik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 4

Aufgabe 13.

a) Es sei

$$P(t) \quad = \quad \alpha_0 + \sum_{k=1}^{r} \big(\alpha_k \sin(k\omega t) + \beta_k \cos(k\omega t)\big)$$

ein reelles trigonometrisches Polynom, d.h. mit Koeffizienten $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$. Dabei ist $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, eine nicht-negative ganze Zahl und $\omega > 0$ die Kreisfrequenz von P. Verwenden Sie Aufgabe 9, Teil b), um P als komplexes trigonometrisches Polynom darzustellen, d.h. finden Sie Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, so dass:

$$P(t) \quad = \quad \sum_{k=-r}^{r} a_k e^{ik\omega t}$$

b) Für nicht-negative ganze Zahlen $s, r \in \mathbb{Z}$ und komplexe Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ sei nun umgekehrt

$$Q(t) \quad = \quad \sum_{k=-s}^{r} a_k e^{ik\omega t}$$

ein komplexes trigonometrisches Polynom, das nur reelle Werte annimmt, d.h. es sei $\overline{Q(t)} = Q(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$a_{-k} \quad = \quad \overline{a_k}\ , \tag{1}$$

indem Sie zunächst $Q(t) - \overline{Q(t)}$ als komplexes trigonometrisches Polynom darstellen und dann Hilfssatz 1.2.5, Teil c), aus der Vorlesung verwenden. Folgern Sie aus (1), dass sich Q auch als reelles trigonometrisches Polynom darstellen läßt und geben Sie die Darstellung an.

c) Begründen Sie, dass ein komplexes trigonometrisches Polynom wie $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aus Teil b) stückweise stetig ist mit Periode $T = 2\pi/\omega$, und berechnen Sie die Fourierreihe zu Q. Verwenden Sie dazu Aufgabe 11 bzw. Hilfssatz 1.2.4, Teil a), aus der Vorlesung.

Lösung:

a) Wir setzen

$$\cos(k\omega t) = \frac{1}{2}\big(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\big) \quad , \quad \sin(k\omega t) = \frac{1}{2i}\big(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\big)$$

in P ein und erhalten:

$$\begin{aligned} P(t) &= \alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\Big(\frac{\alpha_k}{i}\big(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\big) + \beta_k\big(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\big)\Big) \\ &= \alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\big(-i\alpha_k + \beta_k\big)e^{ik\omega t} + \frac{1}{2}\sum_{k=-r}^{-1}\big(i\alpha_{-k} + \beta_{-k}\big)e^{ik\omega t} \end{aligned}$$

Damit ist dann also

$$P(t) = \sum_{k=-r}^{r} a_k e^{ik\omega t}$$

mit

$$a_k = \begin{cases} \alpha_0 & ,k = 0, \\ \frac{1}{2}\big(\beta_k - i\alpha_k\big) & ,k > 0, \\ \frac{1}{2}\big(\beta_{-k} + i\alpha_{-k}\big) & ,k < 0. \end{cases}$$

b) Sei $m := \max\{r, s\}$. Um die Notation zu vereinfachen definieren wir $a_k = 0$ für $k < -s$ oder $k > r$. Wegen der Voraussetzung $\overline{Q(t)} = Q(t)$ ist

$$\begin{aligned} 0 &= Q(t) - \overline{Q(t)} = \sum_{k=-s}^{r} a_k e^{ik\omega t} - \sum_{k=-s}^{r} \overline{a_k}\overline{e^{ik\omega t}} = \sum_{k=-s}^{r} a_k e^{ik\omega t} - \sum_{k=-s}^{r} \overline{a_k} e^{-ik\omega t} \\ &= \sum_{k=-s}^{r} a_k e^{ik\omega t} - \sum_{k=-r}^{s} \overline{a_{-k}} e^{ik\omega t} = \sum_{-m}^{m}\big(a_k - \overline{a_{-k}}\big)e^{ik\omega t} =: R(t) \end{aligned}$$

Damit is $R(t)$ ein komplexes trigonometrisches Polynom mit $R(t) = 0$ für alle t. Somit verschwinden alle Koeffizienten von R nach Hilfssatz 1.2.5, Teil c). Also haben wir

$$a_k - \overline{a_{-k}} = 0$$

für $k = -m, ..., m$. Das bedeutet nichts anderes als

$$a_{-k} = \overline{a_k}$$

und dass wir in der Summendarstellung von Q $s = r$ setzen können.

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \sum_{k=-r}^{r} a_k e^{ik\omega t} = a_0 + \sum_{k=1}^{r} a_k e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{r} \overline{a_k} e^{-ik\omega t} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{r} a_k\big(\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)\big) + \overline{a_k}\big(\cos(-k\omega t) + i\sin(-k\omega t)\big) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{r} a_k\big(\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)\big) + \overline{a_k}\big(\cos(k\omega t) - i\sin(k\omega t)\big) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{r}(a_k + \overline{a_k})\cos(k\omega t) + i(a_k - \overline{a_k})\sin(k\omega t) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{r} 2\mathrm{Re}\ a_k \cos(k\omega t) - 2\mathrm{Im}\ a_k \sin(k\omega t) \end{aligned}$$

c) Jeder Summand

$$a_k e^{ik\omega t} \quad = \quad a_k e^{2\pi it/T}$$

ist eine stetige Funktion und für alle $l \in \mathbb{Z}$ gilt (wegen $e^{2\pi il} = 1$):

$$\begin{aligned} g(t) := e^{2\pi it/T} \quad &= \quad e^{2\pi it/T}e^{-2\pi il} = e^{2\pi it/T}e^{-2\pi ilT/T} = e^{2\pi it/T - 2\pi ilT/T} \\ &= \quad e^{\frac{2\pi i}{T}(t-lT)} = g(t-lT). \end{aligned}$$

Somit sind die Summanden stetige T-periodische Funktionen. Q ist als endliche Summe solcher Funktionen wieder stetig und T-periodisch.

Für die Fourierreihe berechnen wir die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} c_k^*(Q) \quad &= \quad \frac{1}{T}\int_0^T Q(t)e^{-ik\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{l=-s}^{r} a_l e^{il\omega t}e^{-ik\omega t}dt \\ &= \quad \frac{1}{T}\sum_{l=-s}^{r}\int_0^T a_l e^{i(l-k)\omega t}dt \end{aligned}$$

Hier substituieren wir $x = \omega t$, also $dx = \omega dt$ bzw. $dt = dx/\omega = T/2\pi$. Damit ergibt sich nach Hilfssatz 1.2.4, Teil a):

$$c_k^*(Q) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-s}^{r}\int_0^{2\pi} a_l e^{i(l-k)x}dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-s}^{r} a_l \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ,k \neq l, \\ 2\pi & ,k = l \end{array} \right\} = a_k,$$

wobei wir $a_k = 0$ für $k < -s$ oder $k > r$ verwenden. Folglich ist die Fourierreihe von Q die Summe

$$\sum_{k=-s}^{r} a_k e^{ik\omega t},$$

stimmt also mit Q selbst überein.

Aufgabe 14.

Berechnen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe des Zweiweg-gleichgerichteten Kosinus, d.h. von

$$f(t) = |\cos(t)|.$$

Lösung:

f hat die Periode $T = \pi$, also die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 2$. Nach Aufgabe 16, Teil a), können wir statt über $[0, \pi]$ auch über $[-\pi/2, \pi/2]$ integrieren. Dort ist $f(t) = \cos(t)$.

Damit berechnen wir unter Verwendung von $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$:

$$\begin{aligned}
c_k^*(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) e^{-ik2t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{it} e^{-ik2t} dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-it} e^{-ik2t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{(1-2k)it} dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-(1+2k)it} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i(1-2k)}\left[e^{(1-2k)it}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{2\pi i(1+2k)}\left[e^{-(1+2k)it}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2\pi i(1-2k)}\left(e^{i\pi/2}e^{-k\pi i} - e^{-i\pi/2}e^{k\pi i}\right) - \frac{1}{2\pi i(1+2k)}\left(e^{-i\pi/2}e^{-k\pi i} - e^{i\pi/2}e^{k\pi i}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i(1-2k)}\left(i(-1)^k + i(-1)^k\right) - \frac{1}{2\pi i(1+2k)}\left(-i(-1)^k - i(-1)^k\right) \\
&= \frac{(-1)^k}{\pi}\left(\frac{1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k}\right) \\
&= \frac{(-1)^k}{\pi} \cdot \frac{(1+2k)+(1-2k)}{(1-2k)(1+2k)} = \frac{2(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}
\end{aligned}$$

Also ist

$$f \sim \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} e^{ik2t}$$

die komplexe Fourierreihe. Da f reellwertig ist, erhalten wir ausserdem die reelle Fourierreihe als:

$$\begin{aligned}
f &\sim c_0^*(f) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\, c_k^*(f)\cos(k\omega t) - 2\mathrm{Im}\, c_k^*(f)\sin(k\omega t) \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}\cos(2kt).
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige T-periodische Funktion, d.h. mit Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$. Zeigen Sie:

a) Ist f gerade, d.h. $f(-t) = f(t)$, so gilt für die Fourierkoeffizienten:

$$c_k^*(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(\omega k t) dt.$$

b) Ist f ungerade, d.h. $f(-t) = -f(t)$, so gilt für die Fourierkoeffizienten:

$$c_k^*(f) = \frac{-2i}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(\omega k t) dt.$$

Lösung:

a) Wir unterteilen das Integrationsintervall $[0, T]$ in die beiden Teile $[0, T/2]$ und $[T/2, T]$. Das Intgeral über $[T/2, T]$ modifizieren wir mit der Voraussetzung $f(t) = f(-t)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} f(t)e^{-ik\omega t}dt &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(s+T)e^{-ik\omega(s+T)}ds \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(s)e^{-ik\omega s}ds = -\frac{1}{T}\int_{T/2}^{0} f(-x)e^{ik\omega x}dx \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(-x)e^{ik\omega x}dx = \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)e^{ik\omega x}dx
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im ersten Schritt die Substitution $s = t - T$ (mit $ds = dt$) durchgeführt, im zweiten Schritt die T-Periodizität von f genutzt, im dritten Schritt die Substitution $x = -s$ (mit $dx = -ds$) durchgeführt, und im letzten Schritt ausgenutzt, dass f gerade ist. Man bedenke auch $\int_a^b = -\int_b^a$. Damit erhalten wir jetzt:

$$\begin{aligned}
c_k^*(f) &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega t}dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} f(t)e^{-ik\omega t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega t}dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)e^{ik\omega t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\big(e^{-ik\omega t} + e^{ik\omega t}\big)dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)dt
\end{aligned}$$

b) Wir verfahren genau wie in Teil a), nur dass in der Umformung des Integrals über $[T/2, T]$ im letzten Schritt $f(x) = -f(-x)$ verwendet wird statt $f(x) = f(-x)$. Das führt zu einem Vorzeichenwechsel:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} f(t)e^{-ik\omega t}dt &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(s+T)e^{-ik\omega(s+T)}ds \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(s)e^{-ik\omega s}ds = -\frac{1}{T}\int_{T/2}^{0} f(-x)e^{ik\omega x}dx \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(-x)e^{ik\omega x}dx = -\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)e^{ik\omega x}dx
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir hier:

$$\begin{aligned}
c_k^*(f) &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega t}dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} f(t)e^{-ik\omega t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega t}dt - \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)e^{ik\omega t}dt \\
&= -\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\big(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\big)dt = -\frac{2i}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)dt.
\end{aligned}$$

Aufgabe 16.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige T-periodische Funktion, d.h. eine Funktion mit Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$.

a) Sei $[\alpha, \beta]$ ein Intervall mit $\beta - \alpha = T$. Zeigen Sie, dass dann

$$c_k^*(f) \quad = \quad \frac{1}{T} \int_\alpha^\beta f(t) e^{-ik\omega t} dt$$

gilt, d.h. wir können frei auswählen, über welches Intervall der Länge T wir integrieren, um die Fourierkoeffizienten zu bestimmen.

b) Zeigen Sie: Nimmt f nur reelle Werte an, d.h. ist $\overline{f(t)} = f(t)$, so gilt:

$$c_{-k}^*(f) \quad = \quad \overline{c_k^*(f)}$$

Damit folgt dann für $k \neq 0$:

$$c_k^*(f) e^{ik\omega t} + c_{-k}^*(f) e^{-ik\omega t} \quad = \quad 2\mathrm{Re}\; c_k^*(f) \cos(k\omega t) - 2\mathrm{Im}\; c_k^*(f) \sin(k\omega t).$$

Verwenden Sie diese Aussage, um in Aufgabe 13 Teil b) aus Teil c) ohne Rechnungen herzuleiten.

Lösung:

a) Wir berechnen (mit $\beta = \alpha + T$):

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(t) e^{-ik\omega t} dt &= \int_\alpha^{\alpha+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt \\
&= \int_\alpha^T f(t) e^{-ik\omega t} dt + \int_T^{\alpha+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt \\
&= \int_\alpha^T f(t) e^{-ik\omega t} dt + \int_0^\alpha f(s+T) e^{-ik\omega(s+T)} ds \\
&= \int_\alpha^T f(t) e^{-ik\omega t} dt + \int_0^\alpha f(s) e^{-ik\omega s} e^{-ik\omega T} ds \\
&= \int_\alpha^T f(t) e^{-ik\omega t} dt + \int_0^\alpha f(s) e^{-ik\omega s} e^{-ik2\pi} ds \\
&= \int_\alpha^T f(t) e^{-ik\omega t} dt + \int_0^\alpha f(s) e^{-ik\omega s} \cdot 1 \; ds \\
&= \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt = c_k^*(f).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im dritten Schritt die Substitution $s = t - T$ (mit $ds = dt$) verwendet, und im vierten Schritt die T-Periodizität von f ausgenutzt.

b) Unter Verwendung von $\overline{f(t)} = f(t)$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\overline{c_k^*(f)} &= \overline{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t) e^{-ik\omega t}} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} \cdot \overline{e^{-ik\omega t}} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{ik\omega t} dt = c_{-k}^*(f).
\end{aligned}$$

Damit ist dann:

$$\begin{aligned}
& c_k^*(f)e^{ik\omega t} + c_{-k}^*(f)e^{-ik\omega t} \\
= \; & c_k^*(f)e^{ik\omega t} + \overline{c_k^*(f)}e^{-ik\omega t} \\
= \; & c_k^*(f)\big(\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)\big) + \overline{c_k^*(f)}\big(\cos(-k\omega t) + i\sin(-k\omega t)\big) \\
= \; & c_k^*(f)\big(\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)\big) + \overline{c_k^*(f)}\big(\cos(k\omega t) - i\sin(k\omega t)\big) \\
= \; & \big(c_k^*(f) + \overline{c_k^*(f)}\big)\cos(k\omega t) + i\big(c_k^*(f) - \overline{c_k^*(f)}\big)\cos(k\omega t) \\
= \; & 2\mathrm{Re}\; c_k^*(f)\cos(k\omega t) - 2\mathrm{Im}\; c_k^*(f)\sin(k\omega t).
\end{aligned}$$

Nach Aufgabe 13, Teil c), ist

$$c_k^*(Q) \quad = \quad a_k.$$

Da wir nun gerade

$$\overline{c_k^*(Q)} \quad = \quad c_{-k}^*(Q)$$

gezeigt haben, folgt natürlich wie gewünscht:

$$\overline{a_k} \quad = \quad a_{-k}.$$