Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 12.05.2016

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 3

Aufgabe 9.

a) Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass für jede komplexe Zahl z gilt:

$$\text{Re } z = \frac{1}{2}\big(z + \overline{z}\big) \quad , \quad \text{Im } z = \frac{1}{2i}\big(z - \overline{z}\big)$$

b) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie die Definition der komplexen Exponentialfunktion e^z und die Regeln $\cos(-t) = \cos(t)$ und $\sin(-t) = -\sin(t)$, um folgende Identitäten durch Nachrechnen zu beweisen:

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \quad , \quad \cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \quad , \quad \sin(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$$

c) Verwenden Sie Teil b) und die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, $e^{x+y} = e^x e^y$, um die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus durch Nachrechnen zu beweisen:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b \; - \; \sin a \cdot \sin b \; , \\ \sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b \; + \; \cos a \cdot \sin b \end{aligned}$$

gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

d) Verwenden Sie Teil b), um für $t \in \mathbb{R}$ durch Nachrechnen zu beweisen:

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) \;=\; 1$$

e) Verwenden Sie Teil d) und eine partielle Integration, um zu berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt \;=\; \pi$$

Aufgabe 10.

a) Seien $k, m \in \mathbb{Z}$ fest gewählt und $t \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie Aufgabe 9, Teil b), um zu zeigen, dass

$$\sin(kt)e^{-imt} \;=\; \frac{1}{2i}\left(e^{i(k-m)t} - e^{-i(k+m)t}\right)$$

b) Verwenden Sie Teil a) und $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, um zu zeigen, dass:

$$\begin{aligned} \sin(kt)\sin(mt) &= \frac{1}{2}\Big(\cos\big((k-m)t\big) - \cos\big((k+m)t\big)\Big) \; , \\ \sin(kt)\cos(mt) &= \frac{1}{2}\Big(\sin\big((k-m)t\big) + \sin\big((k+m)t\big)\Big) \end{aligned}$$

Bitte wenden.

Aufgabe 11.

Berechnen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 10) die Integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t} dt \ , \ \int_0^{2\pi} \sin(kt)\sin(mt) dt \ , \ \int_0^{2\pi} \sin(kt)\cos(mt) dt$$

in Abhängigkeit von $k, m \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 12.

a) Seien $T > 0$ und $y_0 > 0$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich durch periodische Fortsetzung von $f_0 : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \to \mathbb{R}$,

$$f_0(x) \ = \ y_0 - y_0 \frac{x + T/2}{T} \ ,$$

nach ganz $\mathbb{R}$ ergibt, d.h.

$$f(x) \ = \ f_0\left(x - T\left[\frac{x+T/2}{T}\right]\right) .$$

Dabei bezeichnet $[x]$ die Gauß-Klammer, d.h. $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$. Berechnen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe zu f.

b) Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich durch periodische Fortsetzung von $g_0 : [0, 4) \to \mathbb{R}$,

$$g_0(x) \ = \ \begin{cases} 1 & , \text{ für } 0 \leq x < 3, \\ -1 & , \text{ für } 3 \leq x < 4, \end{cases}$$

nach ganz $\mathbb{R}$ ergibt, d.h.

$$g(x) \ = \ g_0\left(x - 4\left[\frac{x}{4}\right]\right) .$$

Berechnen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe zu g.