Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 12.05.2016

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 3

Aufgabe 9.

a) Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass für jede komplexe Zahl z gilt:

$$\text{Re } z = \frac{1}{2}\big(z + \overline{z}\big) \quad , \quad \text{Im } z = \frac{1}{2i}\big(z - \overline{z}\big)$$

b) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie die Definition der komplexen Exponentialfunktion e^z und die Regeln $\cos(-t) = \cos(t)$ und $\sin(-t) = -\sin(t)$, um folgende Identitäten durch Nachrechnen zu beweisen:

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \quad , \quad \cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \quad , \quad \sin(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$$

c) Verwenden Sie Teil b) und die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, $e^{x+y} = e^x e^y$, um die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus durch Nachrechnen zu beweisen:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b \; - \; \sin a \cdot \sin b \; , \\ \sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b \; + \; \cos a \cdot \sin b \end{aligned}$$

gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

d) Verwenden Sie Teil b), um für $t \in \mathbb{R}$ durch Nachrechnen zu beweisen:

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) \;=\; 1$$

e) Verwenden Sie Teil d) und eine partielle Integration, um zu berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt \;=\; \pi$$

Lösung:

a) Für $z = x + iy = \text{Re } z + i\text{Im } z$ ist $\overline{z} = x - iy$, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(z + \overline{z}) &= \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = x = \text{Re } z, \\ \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) &= \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy) = y = \text{Im } z. \end{aligned}$$

b) Sei $z = x + iy$. Damit ist

$$\begin{aligned} \overline{e^z} &= \overline{e^{x+iy}} = \overline{e^x e^{iy}} = \overline{e^x(\cos y + i \sin y)} = e^x(\cos y - i \sin y), \\ e^{\overline{z}} &= e^{x-iy} = e^x e^{i(-y)} = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^x(\cos(y) - i\sin(y)), \end{aligned}$$

was die erste Gleichung beweist.

Wegen

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad , \quad e^{-it} = \cos t + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t$$

ist ausserdem tatsächlich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(e^{it} + e^{-it}\big) &= \frac{1}{2}\big(\cos t + i \sin t + \cos t - i \sin t\big) = \cos t \ , \\
\frac{1}{2i}\big(e^{it} - e^{-it}\big) &= \frac{1}{2i}\big(\cos t + i \sin t - \cos t + i \sin t\big) = \sin t \ .
\end{aligned}$$

c) Wir berechnen mit Teil b) (zur Erinnerung: $i^2 = -1$):

$$\begin{aligned}
& \cos a \cdot \cos b \ - \ \sin a \cdot \sin b \\
= \ & \frac{1}{4}\left(\big(e^{ia} + e^{-ia}\big)\big(e^{ib} + e^{-ib}\big)\right) - \frac{1}{4i^2}\left(\big(e^{ia} - e^{-ia}\big)\big(e^{ib} - e^{-ib}\big)\right) \\
= \ & \frac{1}{4}\left(e^{ia}e^{ib} + e^{-ia}e^{ib} + e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{-ib}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{ib} - e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{-ib}\right) \\
= \ & \frac{1}{4}\left(2e^{ia}e^{ib} + 2e^{-ia}e^{-ib}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}\right) = \cos(a+b).
\end{aligned}$$

Analog berechnen wir:

$$\begin{aligned}
& \sin a \cdot \cos b \ + \ \cos a \cdot \sin b \\
= \ & \frac{1}{4i}\left(\big(e^{ia} - e^{-ia}\big)\big(e^{ib} + e^{-ib}\big)\right) + \frac{1}{4i}\left(\big(e^{ia} + e^{-ia}\big)\big(e^{ib} - e^{-ib}\big)\right) \\
= \ & \frac{1}{4i}\left(e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{ib} + e^{ia}e^{-ib} - e^{-ia}e^{-ib}\right) + \frac{1}{4i}\left(e^{ia}e^{ib} + e^{-ia}e^{ib} - e^{ia}e^{-ib} - e^{-ia}e^{-ib}\right) \\
= \ & \frac{1}{4i}\left(2e^{ia}e^{ib} - 2e^{-ia}e^{-ib}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}\right) = \sin(a+b).
\end{aligned}$$

d) Unter Verwendung von Teil b) berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\sin^2(t) + \cos^2(t) &= \frac{1}{4i^2}\left(e^{it} - e^{-it}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(e^{it} + e^{-it}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{it}e^{it} - 2e^{it}e^{-it} + e^{-it}e^{-it}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{it}e^{it} + 2e^{it}e^{-it} + e^{-it}e^{-it}\right) \\
&= \frac{1}{4}4e^{it}e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

e) Wir führen partielle Integration durch mit

$$f(t) = \sin(t) \ , \ f'(t) = \cos(t) \ , \ g(t) = -\cos(t) \ , \ g'(t) = \sin(t).$$

Das liefert:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt &= \int_0^{2\pi} f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t)g(t)dt \\
&= -[\sin(t)\cos(t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt.
\end{aligned}$$

Nun setzen wir nach Teil d) $\cos^2 = 1 - \sin^2$ ein und erhalten:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt \quad = \quad \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt - \int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt.$$

Addition von $\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt$ auf beiden Seiten gibt:

$$2\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt \quad = \quad 2\pi \ ,$$

was dem gewünschten Ergebnis entspricht.

Aufgabe 10.

a) Seien $k, m \in \mathbb{Z}$ fest gewählt und $t \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie Aufgabe 9, Teil b), um zu zeigen, dass

$$\sin(kt)e^{-imt} \quad = \quad \frac{1}{2i}\left(e^{i(k-m)t} - e^{-i(k+m)t}\right)$$

b) Verwenden Sie Teil a) und $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, um zu zeigen, dass:

$$\begin{aligned} \sin(kt)\sin(mt) &= \frac{1}{2}\Big(\cos\big((k-m)t\big) - \cos\big((k+m)t\big)\Big) \ , \\ \sin(kt)\cos(mt) &= \frac{1}{2}\Big(\sin\big((k-m)t\big) + \sin\big((k+m)t\big)\Big) \end{aligned}$$

Lösung:

a) Nach Aufgabe 9, Teil b), und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ist:

$$\begin{aligned} \sin(kt)e^{-imt} &= \frac{1}{2i}\left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right)e^{-imt} = \frac{1}{2i}\left(e^{ikt}e^{-imt} - e^{-ikt}e^{-imt}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(k-m)t} - e^{-i(k+m)t}\right) \end{aligned}$$

b) Unter Verwendung von $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ auf beiden Seiten der Gleichung folgt daraus weiter:

$$\begin{aligned} & \sin(kt)\cos(-mt) + i\sin(kt)\sin(-mt) \\ = \ & \frac{1}{2i}\Big(\cos\big((k-m)t\big) + i\sin\big((k-m)t\big) - \cos\big(-(k+m)t\big) - i\sin\big(-(k+m)t\big)\Big) \end{aligned}$$

Dies ist wegen $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $1/i = -i$ äquivalent zu:

$$\begin{aligned} & \sin(kt)\cos(mt) - i\sin(kt)\sin(mt) \\ = \ & \frac{1}{2}\Big(-i\cos\big((k-m)t\big) + \sin\big((k-m)t\big) + i\cos\big((k+m)t\big) + \sin\big((k+m)t\big)\Big) \end{aligned}$$

Hier gilt jetzt, dass der Realteil der linken Seite gleiche dem Realteil der rechten Seite ist, d.h.

$$\sin(kt)\cos(mt) \quad = \quad \frac{1}{2}\Big(\sin\big((k-m)t\big) + \sin\big((k+m)t\big)\Big)\,,$$

und dass der Imaginärteil der linken Seite gleich dem Imaginärteil der rechten Seite ist, d.h.:

$$-\sin(kt)\sin(mt) \quad = \quad \frac{1}{2}\Big(-\cos\big((k-m)t\big) + \cos\big((k+m)t\big)\Big)\,.$$

Das liefert die Behauptung.

Aufgabe 11.

Berechnen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 10) die Integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t}dt\ ,\ \int_0^{2\pi} \sin(kt)\sin(mt)dt\ ,\ \int_0^{2\pi} \sin(kt)\cos(mt)dt$$

in Abhängigkeit von $k, m \in \mathbb{Z}$.

Lösung:

a) Für $k \neq m$ ist:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t}dt \quad = \quad \left[\frac{1}{i(k-m)}e^{i(k-m)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{i(k-m)}\big(1-1\big) = 0.$$

Für $k = m$ ist:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t}dt \quad = \quad \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

b) Unter Verwendung von Aufgabe 10, Teil b), ist:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\sin(mt)dt \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\big((k-m)t\big)dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\big((k+m)t\big)dt.$$

Jetzt unterscheiden wir vier Fälle. Ist $k = m = 0$, so folgt weiter:

$$\ldots \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = 0.$$

Ist $k = m$ aber $\neq 0$, so folgt:

$$\ldots \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\big((k+m)t\big)dt = \pi - \frac{1}{2(k+m)}\Big[\sin\big((k+m)t\big)\Big]_0^{2\pi} = \pi.$$

Ist $k = -m$ aber $\neq 0$, so folgt:

$$\ldots \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\big((k-m)t\big)dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2(k-m)}\Big[\sin\big((k-m)t\big)\Big]_0^{2\pi} - \pi = -\pi.$$

Ist $k \neq m$ und $k \neq -m$, so erhalten wir:

$$... \quad = \quad \frac{1}{2(k-m)} \left[\sin\big((k-m)t\big)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2(k+m)} \left[\sin\big((k+m)t\big)\right]_0^{2\pi} = 0.$$

c) Unter Verwendung von Aufgabe 10, Teil b), ist:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\cos(mt) \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin\big((k-m)t\big) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin\big((k+m)t\big)$$

Nun ist aber

$$\int_0^{2\pi} \sin\big((k-m)t\big) \quad = \quad \int_0^{2\pi} 0 \cdot dt = 0,$$

falls $k = m$ und

$$\int_0^{2\pi} \sin\big((k-m)t\big) \quad = \quad \frac{1}{k-m}\left[-\cos\big((k-m)t\big)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{k-m}(-1+1) = 0,$$

falls $k \neq m$. Analog ist

$$\int_0^{2\pi} \sin\big((k+m)t\big) \quad = \quad \int_0^{2\pi} 0 \cdot dt = 0,$$

falls $k = -m$ und

$$\int_0^{2\pi} \sin\big((k+m)t\big) \quad = \quad \frac{1}{k+m}\left[-\cos\big((k+m)t\big)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{k-m}(-1+1) = 0,$$

falls $k \neq -m$. Zusammengefasst folgt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\cos(mt) \quad = \quad 0.$$

Aufgabe 12.

a) Seien $T > 0$ und $y_0 > 0$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich durch periodische Fortsetzung von $f_0 : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \to \mathbb{R}$,

$$f_0(x) \quad = \quad y_0 - y_0 \frac{x + T/2}{T} \ ,$$

nach ganz $\mathbb{R}$ ergibt, d.h.

$$f(x) \quad = \quad f_0\left(x - T\left[\frac{x+T/2}{T}\right]\right).$$

Dabei bezeichnet $[x]$ die Gauß-Klammer, d.h. $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$. Berechnen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe zu f.

b) Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich durch periodische Fortsetzung von $g_0 : [0,4) \to \mathbb{R}$,

$$g_0(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & , \text{ für } 0 \leq x < 3, \\ -1 & , \text{ für } 3 \leq x < 4, \end{cases}$$

nach ganz $\mathbb{R}$ ergibt, d.h.

$$g(x) \quad = \quad g_0\left(x - 4\left[\frac{x}{4}\right]\right).$$

Berechnen Sie die komplexe und die reelle Fourierreihe zu g.

Lösung:

a) Die Funktion f hat die Periode T und die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$. Da auch die Funktion $e^{-ik\omega x} = e^{-2\pi ikx/T}$ die Periode T hat, hat

$$f(x)e^{-ik\omega x}$$

die Periode T und wir können statt über das Intervall $[0,T]$ auch über $[-T/2, T/2]$ (oder jedes andere Intervall der Länge T) integrieren:

$$c_k^*(f) \quad = \quad \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-ik\omega x}dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-ik\omega x}dx.$$

Jetzt setzen wir f_0 ein und erhalten:

$$c_k^*(f) \quad = \quad \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(y_0 - y_0\frac{x+T/2}{T}\right)e^{-ik\omega x}dx = \frac{y_0}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{T}\right)e^{-ik\omega x}dx$$

Hier bietet sich die Substitution $s = x/T$ an (mit $ds = dx/T$). Es folgt:

$$c_k^*(f) \quad = \quad y_0\int_{-1/2}^{1/2}(1/2 - s)e^{-ik\omega Ts}ds = y_0\int_{-1/2}^{1/2}(1/2 - s)e^{-ik2\pi s}ds,$$

wobei wir noch $\omega = 2\pi/T$ eingesetzt haben. Jetzt berechnen wir:

$$c_0^*(f) \quad = \quad y_0\int_{-1/2}^{1/2}(1/2 - s)ds = y_0/2 - y_0\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{-1/2}^{1/2} = y_0/2.$$

Für den Fall $k \neq 0$ berechnen wir einerseits:

$$\begin{aligned} y_0\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{2}e^{-i2\pi ks}ds \quad &= \quad \frac{y_0}{-4i\pi k}[e^{-2\pi iks}]_{-1/2}^{1/2} = \frac{y_0}{-4i\pi k}\left((e^{-i\pi})^k - (e^{i\pi})^k\right) \\ &= \quad \frac{y_0}{-4i\pi k}\left((-1)^k - (-1)^k\right) = 0. \end{aligned}$$

Andererseits verwenden wir die partielle Integration $f(s) = s$, $f'(s) = 1$, $g(s) = \frac{1}{-ik2\pi}e^{-ik2\pi s}$ und $g'(s) = e^{-ik2\pi s}$, um zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{1/2} se^{-ik2\pi s}ds &= \int_{-1/2}^{1/2} f(s)g'(s)ds = [f(s)g(s)]_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} f'(s)g(s)ds \\
&= \frac{i}{2k\pi}[se^{-2\pi iks}]_{-1/2}^{1/2} - \frac{i}{2\pi k}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi iks}ds \\
&= \frac{i}{4k\pi}\big((e^{-\pi i})^k + (e^{\pi i})^k\big) + \frac{1}{4\pi^2k^2}[e^{-2\pi iks}]_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{i}{2k\pi}(-1)^k + \frac{1}{4\pi^2k^2}\big((e^{-\pi i})^k - (e^{\pi i})^k\big) \\
&= \frac{i}{2k\pi}(-1)^k + \frac{1}{4\pi^2k^2}\big((-1)^k - (-1)^k\big) = \frac{i}{2k\pi}(-1)^k.
\end{aligned}$$

Mit den beiden letzten Berechnungen ist dann also:

$$c_k^*(f) = y_0\int_{-1/2}^{1/2}(1/2 - s)e^{-ik2\pi s}ds = 0 - \frac{iy_0}{2k\pi}(-1)^k = -\frac{iy_0}{2k\pi}(-1)^k$$

Die komplexe Fourierreihe ist daher:

$$f \sim \frac{y_0}{2} - \frac{iy_0}{2\pi}\sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k}{k}e^{ik\omega t} = \frac{y_0}{2} - \frac{iy_0}{2\pi}\sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k}{k}e^{ik\frac{2\pi}{T}t},$$

und die reelle Fourierreihe (da f reell ist) ist:

$$\begin{aligned}
f &\sim c_0^*(f) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{Re } c_k^*(f)\cos(k\omega t) - 2\text{Im } c_k^*(f)\sin(k\omega t) \\
&= \frac{y_0}{2} + \frac{y_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin(k\omega t) = \frac{y_0}{2} + \frac{y_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin(k\frac{2\pi}{T}t)
\end{aligned}$$

b) Hier ist die Periode $T = 4$ und die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = \frac{1}{2}\pi$. Wir berechnen also für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
T\cdot c_k^*(g) &= \int_0^4 g_0(t)e^{-ik\omega t}dt = \int_0^3 e^{-ik\omega t}dt - \int_3^4 e^{-ik\omega t}dt \\
&= \frac{1}{-ik\omega}\left[e^{-ik\omega t}\right]_0^3 - \frac{1}{-ik\omega}\left[e^{-ik\omega t}\right]_3^4 \\
&= \frac{i}{k\omega}\big(e^{-ik\frac{3}{2}\pi} - e^0\big) - \frac{i}{k\omega}\big(e^{-ik2\pi} - e^{-ik\frac{3}{2}\pi}\big) \\
&= \frac{i}{k\omega}\big((e^{i\frac{3}{2}\pi})^{-k} - 1 - 1 + (e^{i\frac{3}{2}\pi})^{-k}\big) = \frac{i}{k\omega}\big(2(-i)^{-k} - 2\big) \\
&= \frac{2i}{k\omega}\left(\left(\frac{1}{-i}\right)^k - 1\right) = \frac{2i}{k\omega}\left(i^k - 1\right) = \frac{4i}{k\pi}(i^k - 1),
\end{aligned}$$

d.h. $c_k^*(g) = \frac{i}{k\pi}(i^k - 1)$. Ausserdem ist

$$c_0^*(g) = \frac{1}{4}\int_0^4 g_0(t)dt = \frac{1}{4}\int_0^3 dt - \frac{1}{4}\int_3^4 dt = \frac{1}{2}.$$

Die komplexe Fourierreihe ist daher:

$$f \quad \sim \quad \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{(i^k - 1)}{k} e^{ik\omega t} = \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{(i^k - 1)}{k} e^{ik\frac{\pi}{2}t}.$$

Für die reelle Fourierreihe berechnen wir:

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\ c_k^*(g) &= c_k^*(g) + \overline{c_k^*(g)} = \frac{i}{k\pi}(i^k - 1) + \overline{\frac{i}{k\pi}(i^k - 1)} \\
&= \frac{1}{k\pi}\left(i(i^k - 1) + \overline{i(i^k - 1)}\right) = \frac{1}{k\pi}\left(i(i^k - 1) + \bar{i} \cdot \overline{(i^k - 1)}\right) \\
&= \frac{1}{k\pi}\left(i(i^k - 1) + \bar{i} \cdot (\bar{i}^k - 1)\right) = \frac{1}{k\pi}\left(i(i^k - 1) + (-i) \cdot ((-i)^k - 1)\right) \\
&= \frac{1}{k\pi}\left(i^{k+1} + (-i)^{k+1}\right) = \frac{1}{k\pi}\left(i^{k+1} + (-1)^{k+1} i^{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{k\pi}(1 - (-1)^k) i^{k+1} = \frac{2}{k\pi} \begin{cases} 0 & , k \text{ gerade}, k \neq 0 \\ 1 & , k = 4l - 1 \text{ mit } l \in \mathbb{N}, \\ -1 & , k = 4l - 3 \text{ mit } l \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Analog ist für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Im}\ c_k^*(g) &= \frac{1}{i}\left(c_k^*(g) - \overline{c_k^*(g)}\right) = \frac{1}{k\pi}(i^k - 1) + i\overline{\frac{i}{k\pi}(i^k - 1)} \\
&= \frac{1}{k\pi}\left(i^k - 1 + (-i)^k - 1\right) = \frac{1}{k\pi}\left((1 + (-1)^k) i^k - 2\right) \\
&= -\frac{2}{k\pi} \begin{cases} 1 & , k \text{ ungerade}, \\ 0 & , k = 4l \text{ mit } l \in \mathbb{N}, \\ 2 & , k = 4l - 2 \text{ mit } l \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit ist die reelle Fourierreihe (da f reell ist):

$$\begin{aligned}
f \quad \sim \quad & c_0^*(f) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\ c_k^*(f) \cos(k\omega t) - 2\mathrm{Im}\ c_k^*(f) \sin(k\omega t) \\
= \quad & \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4l - 1} \cos\left((4l - 1)\omega t\right) - \frac{1}{4l - 3} \cos\left((4l - 3)\omega t\right) \right) \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4l - 1} \sin\left((4l - 1)\omega t\right) + \frac{2}{4l - 2} \sin\left((4l - 2)\omega t\right) + \frac{1}{4l - 3} \sin\left((4l - 3)\omega t\right) \right)
\end{aligned}$$