Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 28.04.2016

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 2

Aufgabe 5.

Gegeben seien die Schwingungen $f_1(t) = 3\sin(4\pi t + \pi)$ und $f_2(t) = 4\sin(4\pi t + \pi/2)$. Berechnen Sie die Amplitude der durch Superposition von f_1 und f_2 entstehenden Schwingung $f_3 = f_1 + f_2$, also die Zahl A_3 in der Darstellung

$$f_1(t) + f_2(t) = f_3(t) := A_3 \sin(4\pi t + \delta).$$

Lösung: Wir schreiben

$$\begin{aligned}
f_3(t) &= \operatorname{Im}\left(3e^{i(4\pi t+\pi)} + 4e^{i(4\pi t+\pi/2)}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i4\pi t}(3e^{i\pi} + 4e^{i\pi/2})\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i4\pi t} \cdot |3e^{i\pi} + 4e^{i\pi/2}| e^{i\delta}\right) \\
&= |3e^{i\pi} + 4e^{i\pi/2}| \cdot \operatorname{Im} e^{i(4\pi t+\delta)} = |3e^{i\pi} + 4e^{i\pi/2}| \sin(4\pi t + \delta).
\end{aligned}$$

Also wird nach Vorlesung oder Skript:

$$|3e^{i\pi} + 4e^{i\pi/2}| = \sqrt{9 + 16 + 24\cos(\pi - \pi/2)} = \sqrt{25} = 5,$$

da $\cos(\pi/2) = 0$. Einfacher ist hier alternativ:

$$|3e^{i\pi} + 4e^{i\pi/2}| = |3 \cdot (-1) + 4 \cdot i| = |-3 + i4| = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Aufgabe 6.

a) Geben Sie alle Urbilder von $-2 + 3i$ unter der Exponentialfunktion an, d.h. bestimmen Sie alle Zahlen $a \in \mathbb{C}$ mit $e^a = -2 + 3i$.

b) Seien $p, q \in \mathbb{C}$ zwei fest gewählte komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{x_1} \quad , \quad z_{3,4} = \pm\sqrt{x_2}$$

für

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

komplexe Lösungen der Gleichung

$$z^4 + pz^2 + q = 0$$

sind.

Lösung:

a) In Polarkoordinaten ist

$$\begin{aligned} -2+3i &= \sqrt{2^2+3^2}e^{i(\pi-\arctan(3/2))} \approx \sqrt{13}e^{i2.1588} \\ &= e^{\ln\sqrt{13}+i2.1588} \end{aligned}$$

Die gesuchten Zahlen sind also:

$$a \approx \ln\sqrt{13}+i(2.1588+2\pi k)\ , \quad k\in\mathbb{Z}.$$

b) Wegen $z_{1,2}^2 = x_1$ und $z_{3,4}^2 = x_2$ reicht es zu zeigen, dass x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung

$$x^2+px+q=0$$

sind. Wir berechnen also:

$$\begin{aligned} x_{1,2}^2+px_{1,2}+q &= \left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2-\frac{p^2}{2}\pm p\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+q \\ &= \frac{p^2}{4}\mp p\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\left(\frac{p^2}{4}-q\right)-\frac{p^2}{2}\pm p\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+q=0. \end{aligned}$$

Aufgabe 7.

a) Es seien

$$f(t)=t^3+t-2it \quad , \quad g(t)=t-5+it.$$

Berechnen Sie $(fg)'$ und $\int_0^2 f(t)g(t)dt$.

b) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_0^1 (t^2-i)^3 t\,dt\ , \quad \int_0^\pi \big(\cos(2t)-i\sin(2t)\big)^4 dt\ , \quad \int_0^1 (t-2i)(1+it)e^{-t}dt$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} (fg)(t) &= t^4-5t^3+it^4+t^2-5t+it^2-2it^2+10it+2t^2 \\ &= (1+i)t^4-5t^3+(3-i)t^2+(-5+10i)t, \end{aligned}$$

also:

$$(fg)'(t) = 4(1+i)t^3-15t^2+2(3-i)t+(-5+10i).$$

Ausserdem:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (fg)(t)dt &= \int_0^2 \big((1+i)t^4-5t^3+(3-i)t^2+(-5+10i)t\big)dt \\ &= \left[\frac{1+i}{5}t^5-\frac{5}{4}t^4+\frac{3-i}{3}t^3+\frac{-5+10i}{2}t^2\right]_0^2 \\ &= \frac{1+i}{5}32-\frac{5}{4}16+\frac{3-i}{3}8+\frac{-5+10i}{2}4 \\ &= \frac{1}{15}\big(96+96i-300+120-40i-150+300i\big) \\ &= \frac{1}{15}\big(-234+356i\big) = -\frac{78}{5}+\frac{356}{15}i. \end{aligned}$$

b) Die Substitution $s = t^2$, $ds = 2tdt$, liefert:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (t^2 - i)^3 t dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 (s-i)^3 ds = \left[\frac{1}{8}(s-i)^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}\big((1-i)^4 - (-i)^4\big) \\ &= \frac{1}{8}\big(1 - 4i + 6i^2 - 4i^3 + i^4 - 1\big) = \frac{1}{8}\big(1 - 4i - 6 + 4i + 1 - 1\big) = -\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

Ausserdem ist

$$\int_0^\pi \big(\cos(2t) - i\sin(2t)\big)^4 dt = \int_0^\pi \big(\cos(-2t) + i\sin(-2t)\big)^4 dt$$

$$= \int_0^\pi \big(e^{-i2t}\big)^4 dt = \int_0^\pi e^{-i8t} dt = \left[\frac{1}{-i8} e^{-i8t}\right]_0^\pi = \frac{1}{-i8} - \frac{1}{-i8} = 0.$$

Interessant ist hier die allgemeine Beobachtung:

$$\begin{aligned}\big(\cos(kt) - i\sin(kt)\big)^b &= \big(\cos(-kt) + i\sin(-kt)\big)^b = \big(e^{-ikt}\big)^b = e^{-ikbt} \\ &= \cos(-bkt) + i\sin(-bkt) = \cos(bkt) - i\sin(bkt).\end{aligned}$$

Schließlich haben wir noch

$$\int_0^1 (t-2i)(1+it)e^{-t} dt = \int_0^1 (t + it^2 - 2i + 2t)e^{-t} dt = \int_0^1 (it^2 + 3t - 2i)e^{-t} dt.$$

Solche Ausdrücke, d.h. Produkte aus einem Polynom und dem Faktor e^{-t} oder einem Faktor e^t eignen sich hervorragend für partielle Integration. Hier nehmen wir:

$$\begin{aligned} f(t) = it^2 + 3t - 2i \quad &, \quad f'(t) = 2it + 3, \\ g(t) = -e^{-t} \quad &, \quad g'(t) = e^{-t}. \end{aligned}$$

Das liefert:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (it^2 + 3t - 2i)e^{-t} dt &= \big[(it^2 + 3t - 2i)(-e^{-t})\big]_0^1 - \int_0^1 (2it+3)(-e^{-t}) dt \\ &= (-i - 3 + 2i)e^{-1} - 2i + \int_0^1 (2it+3)e^{-t} dt \\ &= (i-3)e^{-1} - 2i + \int_0^1 (2it+3)e^{-t} dt\end{aligned}$$

Für das verbleibende Integral wiederholen wir den Vorgang mit

$$\begin{aligned} f(t) = 2it + 3 \quad &, \quad f'(t) = 2i, \\ g(t) = -e^{-t} \quad &, \quad g'(t) = e^{-t}. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

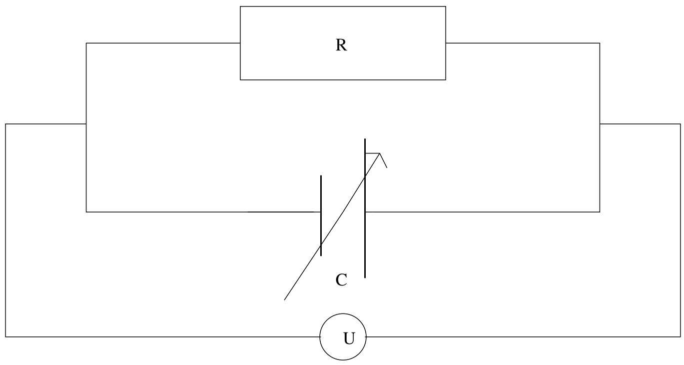
$$\begin{aligned}\int_0^1 (2it+3)e^{-t} dt &= \big[(2it+3)(-e^{-t})\big]_0^1 - \int_0^1 2i(-e^{-t}) dt \\ &= (-2i-3)e^{-1} + 3 + 2i\int_0^1 e^{-t} dt = (-2i-3)e^{-1} + 3 + 2i\left[-e^{-t}\right]_0^1 \\ &= (-2i-3)e^{-1} + 3 - 2ie^{-1} + 2i.\end{aligned}$$

Insegesamt ist also:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (t-2i)(1+it)e^{-t}dt &= (i-3)e^{-1} - 2i + (-2i-3)e^{-1} + 3 - 2ie^{-1} + 2i \\ &= 3 - 6e^{-1} + \big(e^{-1} - 2 - 2e^{-1} - 2e^{-1} + 2\big)i \\ &= 3 - 6e^{-1} - 3e^{-1}i.\end{aligned}$$

Aufgabe 8.

Betrachten Sie die folgende R–C Parallelschaltung:



Der Kondensator hat variable Kapazität C. Es werde eine Wechselspannung U mit Kreisfrequenz $\omega = 20$ Hz angelegt, und $R = 50\ \Omega$. Die Kapazität des Kondensators variiere zwischen Werten von 0 bis $1000\,\mu$F.

a) Auf welcher Kurve verläuft dann die Spitze des (komplexen) Zeigers, der den komplexen Widerstand $\mathcal{C}$ dieser Schaltung repräsentiert?

b) Stellen Sie den Blindwiderstand dieser Schaltung als Funktion ihres Wirkwiderstandes dar.

Lösung:

Es gilt

$$\frac{1}{\mathcal{R}(C)} = \frac{1}{R} + j\omega C,$$

also

$$\mathcal{R}(C) = \frac{1}{1/R + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = R\frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}.$$

a) Die Spitze des Zeigers (d.h. des komplexen Vektors), der $\mathcal{R}(C)$ repräsentiert, läuft also auf der Kurve

$$\alpha(t) := \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 t^2}(1 - j\omega Rt)$$

in $\mathbb{C}$, bzw.

$$\alpha(t) := \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 t^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\omega Rt \end{pmatrix}$$

in Vektorschreibweise in $\mathbb{R}^2$. Mit $R = 50\Omega$ und $\omega = 20\text{Hz}$ folgt

$$\alpha(t) = \frac{50}{1 + 20^2 100^2 t^2}\big(1 - j1000t\big) = \frac{50}{1 + 4 \cdot 10^6 t^2}\big(1 - j1000t\big)$$

b) Wir erhalten für den Wirkwiderstand Re $\mathcal{R}(C)$

$$\text{Re } \mathcal{R}(C) = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

und für den Blindwiderstand Im $\mathcal{R}(C)$:

$$\text{Im } \mathcal{R}(C) = -\frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Lösen wir die erste Gleichung nach C auf, folgt

$$C = \frac{1}{\omega R}\sqrt{\frac{R}{\text{Re } \mathcal{R}(C)} - 1}$$

Dies setzen wir in die Gleichung für Im $\mathcal{R}(C)$ ein:

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathcal{R}(C) &= -R\frac{\sqrt{\frac{R}{\text{Re } \mathcal{R}(C)} - 1}}{1 + R/\text{Re } \mathcal{R}(C) - 1} \\ &= -\text{Re } \mathcal{R}(C)\sqrt{\frac{R}{\text{Re } \mathcal{R}(C)} - 1} \end{aligned}$$