Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 14.07.2016

Mathematatik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 11

Aufgabe 41.

Bestimmen Sie die Rücktransformierten der Laplacetransformation zu:

a)

$$F_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

b)

$$F_2(s) = \frac{s^3+2s+5}{(s-2)^3(s-3)^2}$$

Lösung:

a) F_1 ist eine rationale Funktion

$$F_1(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

mit

$$\begin{aligned} P(s) &= 1, \\ Q(s) &= (s-1)(s^2+1) = (s-1)(s-i)(s+i), \\ Q'(s) &= (s^3-s^2+s-1)' = 3s^2-2s+1. \end{aligned}$$

Der Nenner Q hat die einfachen Nullstellen $b_1 = 1$, $b_2 = i$, $b_3 = -i$. Wir wollen die Partialbruchzerlegung von F_1 bestimmen. Da F_1 nur einfache Nullstellen hat, ist nach Hilfssatz 4.3.3:

$$F_1(s) = \frac{P(b_1)}{Q'(b_1)} \cdot \frac{1}{s-b_1} + \frac{P(b_2)}{Q'(b_2)} \cdot \frac{1}{s-b_2} + \frac{P(b_3)}{Q'(b_3)} \cdot \frac{1}{s-b_3} \tag{1}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} Q'(b_1) &= 3-2+1 = 2, \\ Q'(b_2) &= 3i^2-2i+1 = -3-2i+1 = -2-2i, \\ Q'(b_3) &= 3(-i)^2+2i+1 = -3+2i+1 = -2+2i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q'(b_2)} &= -\frac{1}{2+2i} = -\frac{\overline{2+2i}}{|2+2i|^2} = -\frac{2-2i}{2^2+2^2} = -\frac{2-2i}{8} = \frac{i-1}{4}, \\ \frac{1}{Q'(b_3)} &= -\frac{1}{2-2i} = -\frac{\overline{2-2i}}{|2-2i|^2} = -\frac{2+2i}{2^2+2^2} = -\frac{2+2i}{8} = -\frac{1+i}{4}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in (1) erhalten wir:

$$F_1(s) \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{i-1}{4}\cdot\frac{1}{s-i}-\frac{1+i}{4}\cdot\frac{1}{s+i}$$

Die Rücktransformierte ist mit Hilfssatz 4.3.4 also:

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{L}^{-1}F_1\right)(t) &= \frac{1}{2}e^t+\frac{i-1}{4}e^{it}-\frac{1+i}{4}e^{-it} \\
&= \frac{1}{2}e^t-\frac{1}{4}\left(e^{it}+e^{-it}\right)-\frac{1}{4i}\left(e^{it}-e^{-it}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}\cos(t)-\frac{1}{2}\sin(t)
\end{aligned}$$

b) F_2 ist eine rationale Funktion

$$F_2(s) \quad = \quad \frac{P(s)}{Q(s)},$$

wobei Q die 3-fache Nullstelle $b_1 = 2$ und die 2-fache Nullstelle $b_2 = 3$ besitzt. Nach Satz 4.3.2 kann F_2 also in der Form

$$F_2(s) \quad = \quad \frac{A_{11}}{s-b_1}+\frac{A_{21}}{(s-b_1)^2}+\frac{A_{31}}{(s-b_1)^3}+\frac{A_{12}}{s-b_2}+\frac{A_{22}}{(s-b_2)^2}$$

dargestellt werden. Wir können die Koeffizienten mit Hilfssatz 4.3.5 berechnen:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{s\to b_1}\left((s-b_1)^3F_2(s)\right)'' \\
&= \frac{1}{2!}\lim_{s\to 2}\left(\frac{s^3+2s+5}{(s-3)^2}\right)'' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 2}\left(\frac{(s-3)^2(3s^2+2)-2(s-3)(s^3+2s+5)}{(s-3)^4}\right)' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 2}\left(\frac{(s-3)(3s^2+2)-2(s^3+2s+5)}{(s-3)^3}\right)' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 2}\left(\frac{3s^3-9s^2+2s-6-2s^3-4s-10}{(s-3)^3}\right)' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 2}\left(\frac{s^3-9s^2-2s-16}{(s-3)^3}\right)' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 2}\frac{(s-3)^3(3s^2-18s-2)-3(s-3)^2(s^3-9s^2-2s-16)}{(s-3)^6} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^3(12-36-2)-3(-1)^2(8-36-4-16)}{(-1)^6} \\
&= \frac{1}{2}\big(26-3(-48)\big)=\frac{1}{2}(26+144)=85
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{21} &= \frac{1}{(3-2)!}\lim_{s\to b_1}\big((s-b_1)^3F_2(s)\big)' \\
&= \lim_{s\to 2}\left(\frac{s^3+2s+5}{(s-3)^2}\right)' \\
&= \lim_{s\to 2}\frac{(s-3)^2(3s^2+2)-2(s-3)(s^3+2s+5)}{(s-3)^4} \\
&= \lim_{s\to 2}\frac{(s-3)(3s^2+2)-2(s^3+2s+5)}{(s-3)^3} \\
&= \frac{(-1)(12+2)-2(8+4+5)}{(-1)^3} = 14+2\cdot 17 = 48
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{31} &= \frac{1}{(3-3)!}\lim_{s\to b_1}\big((s-b_1)^3F_2(s)\big) \\
&= \lim_{s\to 2}\frac{s^3+2s+5}{(s-3)^2} = \frac{8+4+5}{(-1)^2} = 17
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{12} &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to b_2}\big((s-b_2)^2F_2(s)\big)' \\
&= \lim_{s\to 3}\left(\frac{s^3+2s+5}{(s-2)^3}\right)' \\
&= \lim_{s\to 3}\frac{(s-2)^3(3s^2+2)-3(s-2)^2(s^3+2s+5)}{(s-2)^6} \\
&= 1\cdot(27+2)-3\cdot 1\cdot(27+6+5) = 29-3\cdot 38 = -85
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{22} &= \frac{1}{(2-2)!}\lim_{s\to b_2}\big((s-b_2)^2F_2(s)\big) \\
&= \lim_{s\to 3}\frac{s^3+2s+5}{(s-2)^3} = 27+6+5 = 38
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir also

$$
F_2(s) = \frac{85}{s-2}+\frac{48}{(s-2)^2}+\frac{17}{(s-2)^3}-\frac{85}{s-3}+\frac{38}{(s-3)^2}
$$

und nach Hilfssatz 4.3.5 ist die Rücktransformation gegeben durch:

$$
\big(\mathfrak{L}^{-1}F_2\big)(t) = \big(85+48t+\frac{17}{2}t^2\big)e^{2t}+\big(-85+38t\big)e^{3t}
$$

Aufgabe 42.

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} f'(t) + 5f(t) &= 1 \\ f(0) &= 1 \end{cases}$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

Lösung:

Gesucht ist die Lösung $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ des Anfangswertproblems. Wir setzen

$$F \;:=\; \mathfrak{L}f. \tag{2}$$

Nach Satz 4.2.2 (Differentiation im Urbild) ist dann

$$\big(\mathfrak{L}f'\big)(s) \;=\; s\big(\mathfrak{L}f\big)(s) - f(0) = sF(s) - f(0). \tag{3}$$

Wenden wir nun also die Laplacetransformation auf die Gleichung

$$f'(t) + 5f(t) \;=\; 1$$

an, so erhalten wir:

$$\big(\mathfrak{L}f'\big)(s) + 5\big(\mathfrak{L}f\big)(s) \;=\; (\mathfrak{L}1)(s).$$

Unter Verwendung von (2), (3), $f(0) = 1$ und $(\mathfrak{L}1)(s) = \frac{1}{s}$ (Laplacetransformation der Heavisidefunktion) liefert dies:

$$\begin{aligned} sF(s) - f(0) + 5F(s) &= \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow \quad F(s)\big(s+5\big) &= \frac{1}{s} + 1 \\ \Leftrightarrow \quad F(s) &= \frac{1+s}{s(s+5)} \end{aligned}$$

Die rationale Funktion

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

muss nun mittels der Partialbruchzerlegung zerlegt werden. Die Nullstellen von $Q(s)$ sind $b_1 = 0$ und $b_2 = -5$. Nach Hilfssatz 4.3.3 ist mit

$$\begin{aligned} P(s) &= 1 + s \\ Q'(s) &= 2s + 5 \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{P(b_1)}{Q'(b_1)} \cdot \frac{1}{s} + \frac{P(b_2)}{Q'(b_2)} \cdot \frac{1}{s+5} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+5} \end{aligned}$$

Die Rücktransformierte ist mit Hilfssatz 4.3.4 also:

$$f(t) \;=\; \big(\mathfrak{L}^{-1}F\big)(t) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}e^{-5t},$$

und das ist die gesuchte Lösung der Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 43.

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} f'(t) + 6f(t) &= t \\ f(0) &= 3 \end{cases}$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

Lösung:

Gesucht ist die Lösung $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ des Anfangswertproblems. Wir setzen

$$F \;=\; \mathfrak{L}f. \tag{4}$$

Nach Satz 4.2.2 (Differentiation im Urbild) ist dann

$$\big(\mathfrak{L}f'\big)(s) \;=\; s\big(\mathfrak{L}f\big)(s) - f(0) = sF(s) - f(0). \tag{5}$$

Wenden wir nun also die Laplacetransformation auf die Gleichung

$$f'(t) + 6f(t) \;=\; t$$

an, so erhalten wir:

$$\big(\mathfrak{L}f'\big)(s) + 6\big(\mathfrak{L}f\big)(s) \;=\; (\mathfrak{L}t)(s).$$

Unter Verwendung von (4), (5), $f(0) = 3$ und $(\mathfrak{L}t)(s) = \frac{1}{s^2}$ (siehe Vorlesung) liefert dies:

$$\begin{aligned} sF(s) - f(0) + 6F(s) &= \frac{1}{s^2} \\ \Leftrightarrow \quad F(s)\big(s+6\big) &= \frac{1}{s^2} + 3 \\ \Leftrightarrow \quad F(s) &= \frac{1+3s^2}{s^2(s+6)} \end{aligned}$$

Die rationale Funktion

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

muss mittels der Partialbruchzerlegung zerlegt werden. $Q(s)$ besitzt eine doppelte Nullstelle bei $b_1 = 0$ und eine einfache Nullstelle bei $b_2 = -6$. Nach Hilfssatz 4.3.2 kann F in der Form

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{A_{11}}{s-b_1} + \frac{A_{21}}{(s-b_1)^2} + \frac{A_{12}}{s-b_2} \\ &= \frac{A_{11}}{s} + \frac{A_{21}}{s^2} + \frac{A_{12}}{s+6} \end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten A_{11}, A_{21}, A_{21} dargestellt werden.

Nach Hilfssatz 4.3.5 ist

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \to b_1} \big((s-b_1)^2 F(s)\big)' \\ &= \lim_{s \to 0} \big(s^2 F(s)\big)' = \lim_{s \to 0} \left(\frac{1+3s^2}{s+6}\right)' \\ &= \lim_{s \to 0} \left(\frac{(s+6)6s - (1+3s^2) \cdot 1}{(s+6)^2}\right) = \frac{-1}{6^2} = -\frac{1}{36} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{1}{(2-2)!} \lim_{s \to b_1} \big((s-b_1)^2 F(s)\big) \\ &= \lim_{s \to 0} \big(s^2 F(s)\big) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{1+3s^2}{s+6}\right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{1}{(1-1)!} \lim_{s \to b_2} \big((s-b_2) F(s)\big) \\ &= \lim_{s \to -6} \big((s+6) F(s)\big) = \lim_{s \to -6} \left(\frac{1+3s^2}{s^2}\right) = \frac{1+3 \cdot 36}{36} = \frac{109}{36} \end{aligned}$$

Damit ist

$$F(s) = -\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{109}{36} \cdot \frac{1}{s+6}$$

und die Rücktransformation, Hilfssatz 4.3.5, liefert die Lösung

$$f(t) = \big(\mathfrak{L}^{-1} F\big)(t) = -\frac{1}{36} + \frac{1}{6} t + \frac{109}{36} e^{-6t}.$$

Aufgabe 44.

Verwenden Sie die Laplacetransformation zur Lösung des DGL-Systems

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 3y_1(t) - 4y_2(t) \\ y_2'(t) &= -2y_1(t) + 5y_2(t) \end{aligned}$$

mit den Startwerten $y_1(0) = 2$ und $y_2(0) = 4$.

Lösung:

Wir wollen die Laplacetransformation auf das gesamte System anwenden. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} Y_1(s) &:= \big(\mathfrak{L} y_1\big)(s), \\ Y_2(s) &:= \big(\mathfrak{L} y_2\big)(s). \end{aligned}$$

Nach Satz 4.2.2 (Differentiation im Urbild) ist dann:

$$(6) \qquad \big(\mathfrak{L}y_1'\big)(s) = s\big(\mathfrak{L}y_1\big)(s) - y_1(0) = sY_1(s) - y_1(0) = sY_1(s) - 2,$$

$$(7) \qquad \big(\mathfrak{L}y_2'\big)(s) = s\big(\mathfrak{L}y_2\big)(s) - y_2(0) = sY_2(s) - y_2(0) = sY_2(s) - 4.$$

Wenden wir also die Laplacetransformation auf das DGL-System aus der Aufgabenstellung an, so erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} sY_1(s) - 2 &= 3Y_1(s) - 4Y_2(s) \\ sY_2(s) - 4 &= -2Y_1(s) + 5Y_2(s) \end{aligned}$$

bzw. (umgestellt):

$$\begin{aligned} (s-3)Y_1(s) + 4Y_2(s) &= 2 \\ 2Y_1(s) + (s-5)Y_2(s) &= 4 \end{aligned}$$

Um dieses 2x2-System zu lösen subtrahieren wir die 2. Gleichung $(s-3)/2$-mal von der ersten und erhalten das neue System:

$$\begin{aligned} (s-3)Y_1(s) + 4Y_2(s) &= 2 \\ \left(4 - \frac{(s-3)(s-5)}{2}\right) Y_2(s) &= 2 - 2(s-3) \end{aligned}$$

Anhand der (neuen) 2. Gleichung können wir Y_2 bestimmen:

$$\begin{aligned} \left(4 - \frac{(s-3)(s-5)}{2}\right) Y_2(s) &= 8 - 2s \\ \Leftrightarrow \left(4 - \frac{(s-3)(s-5)}{2}\right) Y_2(s) &= 8 - 2s \\ \Leftrightarrow \left(\frac{8 - s^2 + 8s - 15}{2}\right) Y_2(s) &= 8 - 2s \\ \Leftrightarrow Y_2(s) &= \frac{4s - 16}{s^2 - 8s + 7} \end{aligned}$$

Ausserdem ist nach der 2. Gleichung aus dem ursprünglichen System:

$$2Y_1(s) = 4 - (s-5)Y_2(s),$$

also

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= 2 - \frac{s-5}{2} \cdot \frac{4s-16}{s^2-8s+7} \\ &= \frac{2s^2 - 16s + 14}{s^2 - 8s + 7} - \frac{2s^2 - 10s - 8s + 40}{s^2 - 8s + 7} \\ &= \frac{2s - 26}{s^2 - 8s + 7} \end{aligned}$$

Um die Rücktransformierten zu erhalten, müssen wir von den rationalen Funktionen Y_1 und Y_2 die Partialbruchzerlegung bestimmen. Dazu benöbigen wir die Nullstellen des quadratischen Polynoms $s^2 - 8s + 7$. Diese sind:

$$b_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\frac{(-8)^2}{4} - 7} = 4 \pm \sqrt{16 - 7} = 4 \pm 3$$

Somit ist

$$s^2 - 8s + 7 \quad = \quad (s - b_1)(s - b_2) = (s - 1)(s - 7).$$

Es ist also

$$Y_1(s) \quad = \quad \frac{P_1(s)}{Q(s)}$$

mit

$$\begin{aligned} P_1(s) &= 2s - 26 \\ Q(s) &= s^2 - 8s + 7 \\ Q'(s) &= 2s - 8, \end{aligned}$$

wobei Q die beiden einfachen Nullstellen $b_1 = 1$ und $b_2 = 7$ hat. Nach Hilfssatz 4.3.3 ist die Partialbruchzerlegung von Y_1 gegeben durch

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{P_1(b_1)}{Q'(b_1)} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{P_1(b_2)}{Q'(b_2)} \cdot \frac{1}{s-7} \\ &= \frac{2-26}{-6} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{14-26}{14-8} \cdot \frac{1}{s-7} \\ &= \frac{4}{s-1} - \frac{2}{s-7} \end{aligned}$$

Die Rücktransformierte ist mit Hilfssatz 4.3.4 also:

$$y_1(t) \quad = \quad \left(\mathfrak{L}^{-1} Y_1\right)(t) = 4e^t - 2e^{7t}.$$

Analog ist $Y_2(s) = P_2(s)/Q(s)$ mit

$$\begin{aligned} P_2(s) &= 4s - 16 \\ Q'(s) &= 2s - 8, \end{aligned}$$

wobei Q die beiden einfachen Nullstellen $b_1 = 1$ und $b_2 = 7$ hat. Nach Hilfssatz 4.3.3 ist die Partialbruchzerlegung von Y_2 gegeben durch

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= \frac{P_2(b_1)}{Q'(b_1)} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{P_2(b_2)}{Q'(b_2)} \cdot \frac{1}{s-7} \\ &= \frac{4-16}{-6} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{28-16}{14-8} \cdot \frac{1}{s-7} \\ &= \frac{2}{s-1} + \frac{2}{s-7} \end{aligned}$$

Die Rücktransformierte ist mit Hilfssatz 4.3.4 also:

$$y_2(t) \quad = \quad \left(\mathfrak{L}^{-1} Y_2\right)(t) = 2e^t + 2e^{7t}.$$

Das DGL-System wird also gelöst von:

$$y_1(t) = 4e^t - 2e^{7t} \quad , \quad y_2(t) = 2e^t + 2e^{7t}.$$