

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 10

Aufgabe 37. (Laplace-Transformation II)

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Laplace-Transformierte:

$$f_a(t) = e^{at} \quad , \quad g(t) = 4^t$$

Aufgabe 38. (Translationsformel)

Es sei $a > 0$ und $b \in \mathbb{C}$. Verwenden Sie Aufgabe 36, Teil a), und die Translationsformel zur Bestimmung der Laplace-Transformierten von:

$$f_{a,b}(t) = e^{bt} \sin(at)$$

Aufgabe 39. (Differentiationssatz und Partialbruchzerlegung)

a) Die Funktion $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und erfülle die Bedingungen (DGL mit Randwerten):

$$\begin{aligned} f''(t) - 3f'(t) + 7f(t) &= t^2 - 2, \\ f(0) &= -2, \\ f'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Verwenden Sie den Differentiationssatz für die Laplace-Transformation im Urbild, um die Laplace-Transformierte F von f zu bestimmen.

b) Gesucht ist eine Funktion $f \in \mathcal{E}$ mit Laplace-Transformierter

$$\mathfrak{L}f(s) = \frac{1}{s^2 - 4}.$$

Verwenden Sie dazu Aufgabe 37 und die (Partialbruch-)Zerlegung:

$$\frac{1}{s^2 - 4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s - 2} - \frac{1}{s + 2} \right).$$

Aufgabe 40. (Differentiationssatz und Faltungssatz)

a) Verwenden Sie den Satz über die Differentiation der Laplace-Transformierten im Bild, um die Laplace-Transformierte der folgenden Funktion zu bestimmen:

$$g(t) = t \cos(t).$$

b) Berechnen Sie die Laplace-Transformierten von

$$u(x) = \cos(x) - \sin(x) \quad , \quad v(x) = \cos(x) + \sin(x) \quad ,$$

und verwenden Sie den Faltungssatz und Teil a), um zu zeigen, dass die beiden Funktionen

$$u * v(t) = \int_0^t u(x)v(t-x)dx \quad , \quad t \cos(t)$$

die gleiche Laplace-Transformierte haben. Nach Hilfssatz 4.3.4 aus der Vorlesung bzw. dem Skript stimmen sie damit überein.