

Mathematik 2 (Master Sicherheitstechnik)

Übungsblatt 10

Aufgabe 37. (Laplace transformation II)

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Laplacetransformierte:

$$f_a(t) = e^{at} \quad , \quad g(t) = 4^t$$

Lösung:

Bei der Laplacetransformation muss auch immer angegeben werden, für welche $s \in \mathbb{C}$ diese definiert ist. In der Regel existiert die Laplacetransformierte für $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ für ein bestimmtes $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Sei $a \in \mathbb{C}$. Die Laplacetransformierte von f_a ist dann:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}f_a(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} \left[e^{(a-s)t} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a-s} \lim_{R \rightarrow +\infty} e^{R\operatorname{Re}(a-s)} e^{iR\operatorname{Im}(a-s)} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

für $\operatorname{Re}(a-s) < 0$, d.h. für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$. In diesem Fall gilt nämlich

$$\left| e^{R\operatorname{Re}(a-s)} e^{iR\operatorname{Im}(a-s)} \right| = \left| e^{R\operatorname{Re}(a-s)} \right| \rightarrow 0$$

für $R \rightarrow +\infty$. Die Funktion g ist definiert als

$$g(t) = 4^t = e^{\ln(4^t)} = e^{t \ln 4}.$$

Damit ist $g(t) = f_{\ln 4}(t)$ und daher die Laplacetransformierte von g :

$$\mathfrak{L}g(s) = \frac{1}{s - \ln 4}$$

für $\operatorname{Re} s > \ln 4$.

Aufgabe 38. (Translationsformel)

Es sei $a > 0$ und $b \in \mathbb{C}$. Verwenden Sie Aufgabe 36, Teil a), und die Translationsformel zur Bestimmung der Laplacetransformierten von:

$$f_{a,b}(t) = e^{bt} \sin(at)$$

Lösung:

Nach Aufgabe 36, Teil a), ist die Laplacetransformierte von $\sin(at)$:

$$(1) \quad G(s) := (\mathfrak{L}(\sin(at)))(s) = \frac{a}{a^2 + s^2}$$

für $\operatorname{Re} s > 0$. Die Translationsregel, Hilfssatz 4.2.1 c) (Translation im Bildbereich), sagt nun aber:

$$\mathfrak{L}(e^{bt} \sin(at)) = G(s-b) = \frac{a}{a^2 + (s-b)^2}$$

für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} b$.

Aufgabe 39. (Differentiationssatz und Partialbruchzerlegung)

a) Die Funktion $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und erfülle die Bedingungen (DGL mit Randwerten):

$$\begin{aligned}f''(t) - 3f'(t) + 7f(t) &= t^2 - 2, \\f(0) &= -2, \\f'(0) &= 1.\end{aligned}$$

Verwenden Sie den Differentiationssatz für die Laplacetransformation im Urbild, um die Laplacetransformierte F von f zu bestimmen.

b) Gesucht ist eine Funktion $f \in \mathcal{E}$ mit Laplacetransformierter

$$\mathfrak{L}f(s) = \frac{1}{s^2 - 4}.$$

Verwenden Sie dazu Aufgabe 37 und die (Partialbruch-)Zerlegung:

$$\frac{1}{s^2 - 4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s - 2} - \frac{1}{s + 2} \right).$$

Lösung:

a) Nach dem Differentiationssatz für die Laplacetransformation im Urbild, Satz 4.2.2, Teil a), gilt:

$$\mathfrak{L}(f')(s) = s\mathfrak{L}(f)(s) - f(0).$$

Zweimalige Anwendung liefert auch:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(f'')(s) &= s\mathfrak{L}(f')(s) - f'(0) \\&= s(s\mathfrak{L}(f)(s) - f(0)) - f'(0) = s^2\mathfrak{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Aussagen (und $f(0) = -2$, $f'(0) = 1$) folgt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(f'' - 3f' + 7f)(s) &= \mathfrak{L}(f'')(s) - 3\mathfrak{L}(f')(s) + 7\mathfrak{L}(f)(s) \\&= s^2\mathfrak{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0) - 3s\mathfrak{L}(f)(s) + 3f(0) + 7\mathfrak{L}(f)(s) \\&= (s^2 - 3s + 7)\mathfrak{L}(f)(s) + (3 - s)f(0) - f'(0) \\&= (s^2 - 3s + 7)\mathfrak{L}(f)(s) + 2s - 6 - 1 \\&= (s^2 - 3s + 7)\mathfrak{L}(f)(s) + 2s - 7.\end{aligned}$$

Andererseits ist nach der Vorlesung:

$$\mathfrak{L}(1)(s) = \frac{1}{s}, \quad \mathfrak{L}(t^2) = \frac{2}{s^3},$$

so dass

$$\mathfrak{L}(t^2 - 2)(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s} = \frac{2 - s^2}{s^3}.$$

Somit transformiert

$$f''(t) - 3f'(t) + 7f(t) = t^2 - 2$$

unter der Laplacetransformation zu:

$$(s^2 - 3s + 7)\mathfrak{L}(f)(s) + 2s - 7 = \frac{2 - s^2}{s^3}.$$

Das ist aber äquivalent zu:

$$(s^2 - 3s + 7)\mathfrak{L}(f)(s) = \frac{2 - s^2}{s^3} - 2s + 7,$$

bzw.

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \frac{2 - s^2 + 7s^3 - 2s^4}{s^3(s^2 - 3s + 7)}.$$

b) Nach Aufgabe 37 wissen wir, dass

$$\mathfrak{L}(e^{2t})(s) = \frac{1}{s - 2} \quad , \quad \mathfrak{L}(e^{-2t})(s) = \frac{1}{s + 2}.$$

Also ist

$$\mathfrak{L}\left(\frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t})\right)(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s - 2} - \frac{1}{s + 2}\right) = \frac{1}{s^2 - 4}.$$

Wegen

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

können wir auch schreiben:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\sinh(2t)\right)(s) = \frac{1}{s^2 - 4}.$$

Aufgabe 40. (Differentiationssatz und Faltungssatz)

a) Verwenden Sie den Satz über die Differentiation der Laplacetransformierten im Bild, um die Laplacetransformierte der folgenden Funktion zu bestimmen:

$$g(t) = t \cos(t).$$

b) Berechnen Sie die Laplacetransformierten von

$$u(x) = \cos(x) - \sin(x) \quad , \quad v(x) = \cos(x) + \sin(x) \quad ,$$

und verwenden Sie den Faltungssatz und Teil a), um zu zeigen, dass die beiden Funktionen

$$u * v(t) = \int_0^t u(x)v(t-x)dx \quad , \quad t \cos(t)$$

die gleiche Laplacetransformierte haben. Nach Hilfssatz 4.3.4 aus der Vorlesung bzw. dem Skript stimmen sie damit überein.

Lösung:

a) Zunächst wissen wir aus Aufgabe 36, Teil b), dass

$$(2) \quad \mathfrak{L}(\cos(t))(s) = \frac{s}{1 + s^2}.$$

Nach dem Differentiationssatz für die Laplacetransformation, Satz 4.2.2 Teil b), ist allgemein:

$$\mathfrak{L}(tf(t))(s) = -(\mathfrak{L}(f(t)))'(s).$$

Das liefert hier also (unter Verwendung von (2)):

$$\mathfrak{L}(t \cos(t))(s) = -\left(\frac{s}{1+s^2}\right)' = -\frac{(1+s^2) - 2s^2}{(1+s^2)^2} = \frac{s^2 - 1}{(1+s^2)^2},$$

wobei wir im vorletzten Schritt mit der Quotientenregel differenziert haben.

b) Nach Aufgabe 36 (siehe (1) und (2)) ist:

$$\mathfrak{L}(\sin(t))(s) = \frac{1}{1+s^2} \quad , \quad \mathfrak{L}(\cos(t))(s) = \frac{s}{1+s^2}.$$

Damit bestimmen wir:

$$\mathfrak{L}(u(t))(s) = \frac{s}{1+s^2} - \frac{1}{1+s^2} = \frac{s-1}{1+s^2}$$

und

$$\mathfrak{L}(v(t))(s) = \frac{s}{1+s^2} + \frac{1}{1+s^2} = \frac{s+1}{1+s^2}$$

Nach dem Faltungssatz (Hilfssatz 4.2.5) ist damit

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(u * v(t))(s) &= \mathfrak{L}(u(t))(s) \cdot \mathfrak{L}(v(t))(s) \\ &= \frac{s-1}{1+s^2} \cdot \frac{s+1}{1+s^2} = \frac{s^2-1}{1+s^2} = \mathfrak{L}(t \cos(t))(s), \end{aligned}$$

wobei

$$u * v(t) = \int_0^t u(x)v(t-x)dx.$$

Also haben $u * v(t)$ und $t \cos(t)$ die gleiche Laplacetransformierte und stimmen nach Hilfssatz 4.3.4 überein.